FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK

Többváltozós függvény lokális szélsőértékét eddig nyílt halmazon kerestük. Az alkalmazások során gyakran van szükség egy függvény szélsőértékére olyan esetben is, amikor a változók között bizonyos összefüggéseket írhatunk elő. Ezek lesznek a feltételes szélsőérték problémák.
Legyenek $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ és $g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(q < p)$ adott függvények. Legyen

$$H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_q(x) = 0\}.$$

Tegyük fel, hogy $H \neq \emptyset$.

0.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$,..., $g_q = 0$ feltétel mellett **feltételes szélsőértéke** van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|_H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

A feltételes szélsőérték egy szükséges feltételét adja a következő tétel.

0.2. Tétel. *(Lagrange-féle multiplikátor módszer)*
Legyenek $f, g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$,..., $g_q = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az $a \in H \cap D(f)$ pontban. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & D_2 g_1(a) & \ldots & D_p g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 g_q(a) & D_2 g_q(a) & \ldots & D_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ számok, hogy az

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$F'(a) = 0.$$

Vagyis, F p darab paricális deriváltjára felírva

$$\begin{aligned}
&D_1 f(a) + \lambda_1 D_1 g_1(a) + \lambda_2 D_1 g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_1 g_q(a) = 0 \\
&D_2 f(a) + \lambda_1 D_2 g_1(a) + \lambda_2 D_2 g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_2 g_q(a) = 0 \\
&\vdots \\
&D_p f(a) + \lambda_1 D_p g_1(a) + \lambda_2 D_p g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_p g_q(a) = 0
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítást $p = 2$, $q = 1$ és feltételes minimum esetén végezzük el (a feltételes maximum esete hasonlóan gondolható meg).
A feltételek alapján a $g := g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és az $a := (a_1, a_2)$ pontban $g(a_1, a_2) = 0$. Ebben a pontban a rangfeltétel

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} D_1 g(a_1, a_2), & D_2 g(a_1, a_2) \end{pmatrix} = 1$$

azt jelenti, hogy például $D_2 g(a_1, a_2) \neq 0$. Ekkor az egyváltozós implicitfüggvény-tétel szerint létezik a_1-nek $K(a_1)$ és a_2-nek $K(a_2)$ környezete, és létezik olyan $\varphi : K(a_1) \to K(a_2)$ differenciálható függvény, amelyre

$$\forall x \in K(a_1) \text{ esetén } g(x, \varphi(x)) = 0,$$

és $\varphi(a_1)=a_2$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}\supset\{(x,\varphi(x))\in\mathbb{R}^2 \mid x\in K(a_1)\}=:H^*. \tag{0.1}$$

Továbbá

$$\varphi'(a_1)=-\frac{D_1g(a_1,a_2)}{D_2g(a_1,a_2)},$$

azaz

$$D_1g(a_1,a_2)+\varphi'(a_1)D_2g(a_1,a_2)=0. \tag{0.2}$$

Mivel az $f_{|_H}$ függvénynek lokális minimuma van az $(a_1,a_2)\in H$ pontban, ezért létezik $r>0$, hogy az (a_1,a_2) pont $K_r(a_1,a_2)$ környezetére

$$\forall(x,y)\in K_r(a_1,a_2)\cap H \text{ esetén } f(x,y)\geq f(a_1,a_2). \tag{0.3}$$

A (0.1) alapján $x\in K(a_1)$ esetén $(x,\varphi(x))\in H^*\subset H$. Felhasználva, hogy φ folytonos $K(a_1)$-en, meggondolható, hogy létezik olyan $K^*(a_1)\subset K(a_1)$ környezet, hogy

$$\forall x\in K^*(a_1) \text{ esetén } (x,\varphi(x))\in K_r(a_1,a_2)\cap H.$$

Így (0.3)-ból

$$\forall x\in K^*(a_1) \text{ esetén } f(x,\varphi(x))\geq f(a_1,\varphi(a_1))=f(a_1,a_2).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$h:K^*(a_1)\to\mathbb{R},\ h(x):=f(x,\varphi(x))$$

valós függvénynek lokális minimuma van az a_1 pontban. A h függvény differenciálható (differenciálható függvények kompozíciója), ezért $h'(a_1)=0$. A kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x,\varphi(x))\cdot(x',\varphi'(x)) \\ &= \langle\begin{pmatrix} D_1f(x,\varphi(x)), & D_2f(x,\varphi(x)) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1, & \varphi'(x) \end{pmatrix}\rangle \\ &= D_1f(x,\varphi(x))+\varphi'(x)D_2f(x,\varphi(x)). \end{aligned}$$

Ezért

$$h'(a_1)=D_1f(a_1,a_2)+\varphi'(a_1)D_2f(a_1,a_2)=0. \tag{0.4}$$

Legyen $\lambda\in\mathbb{R}$ egyelőre tetszőleges szám, és szorozzuk meg λ-val az (0.2) egyenlőséget, majd adjuk össze a (0.4) egyenlőséggel. Ekkor

$$D_1f(a_1,a_2)+\lambda D_1g(a_1,a_2)+\varphi'(a_1)[D_2f(a_1,a_2)+\lambda D_2g(a_1,a_2)]=0. \tag{0.5}$$

A λ megválasztható úgy, hogy

$$D_2f(a_1,a_2)+\lambda^*D_2g(a_1,a_2)=0 \tag{0.6}$$

(látható, hogy a $\lambda^*:=-\frac{D_2f(a_1,a_2)}{D_2g(a_1,a_2)}$ megfelelő.) Ha a λ^* esetén (0.5)-ben a szögletes zárójelben lévő tényező 0, akkor

$$D_1f(a_1,a_2)+\lambda^*D_1g(a_1,a_2)=0 \tag{0.7}$$

is teljesül. Összesítve az eredményeket, azt kaptuk, hogy ha az f függvénynek feltételes minimuma van a $g=0$ feltétel mellett az $a=(a_1,a_2)$ pontban, akkor az $F:=f+\lambda^*g$ függvénynek az első változó szerinti parciális deriváltja 0 (ezt mutatja (0.7)), és a második változó szerinti parciális deriváltja is 0 (ezt mutatja (0.6)).
Tehát

$$F'(a)=F'(a_1,a_2)=\begin{pmatrix} D_1F(a_1,a_2), & D_2F(a_1,a_2) \end{pmatrix}=0.$$

□