SZIGORLATI BEUGRÓ

2009. JÚNIUS 19.

Név:

Értelmezzük az f függvényt az összes valós számpárok halmazán az

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y\,,\ e^x \sin y)$$

hozzárendeléssel.

1. Melyek azok az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontok, amelyekben alkalmazható f-re az inverzfüggvénytétel?

2. Válassza ki az $u^2 + v^2 = 1$ feltételnek eleget tevő $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ számpárok közül az(oka)t, amely(ek)re az f_1 függvény $(0, \frac{\pi}{4})$ pontbeli (u, v) irányú iránymenti deriváltja a lehető legnagyobb!

3. Írja fel annak az érintősíknak az egyenletét, amelyet az f_2 függvény grafikonjához lehet húzni az $(\ln 2, \frac{\pi}{2}, 2)$ ponton keresztül!

4. Bizonyítsa be, hogy f_2-nek nincs lokális szélsőértékhelye!

5. Mennyi az f vonalintegrálja a $[0, \pi] \ni t \mapsto (\ln 2, t)$ görbe mentén?

6. Van-e primitív függvénye az összes valós számpárok halmazán értelmezett $(x, y) \mapsto (e^x \sin y, e^x \cos y)$ függvénynek?

7. Mondja ki az inverz függvény deriválhatóságáról és deriváltjáról szóló tételt, majd írja le a bizonyítás befejező részét, amelyben kihasználtuk az $f'(0) = \mathrm{Id}$ esetben bizonyítottakat!

8. Fogalmazza meg a folytonos függvény primitív függvénye létezésének szükséges és elégséges feltételeiről szóló tételt!

9. Hogy szól az inverzfüggvénytétel?

10. Mikor nevezünk konvexnek egy három változós valós értékű függvényt?

Mindegyik feladat megoldásával 5 pontot lehet szerezni, összesen 50 pontot. A beugró eredményes teljesítéséhez 30 pontot kell elérni.