Szigorlati beugró 2009. június 23.

Név:

Minden (rész)feladat 5 pontot ér, összesen 50 pont. 30 pontot kell elérni.

1. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény értelmezve (0,0) egy környezetében. Mi az összefüggés az alábbi tulajdonságok között?
   (a) f differenciálható (0,0)-ban
   (b) f-nek létezik határértéke (0,0)-ban
   (c) f folytonos (0,0)-ban
   (d) f minden irányból differenciálható (0,0)-ban.

2. Hol lehet lokális szélsőértéke az $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ függvénynek? Számítsa ki ez(ek)ben a pont(ok)ban a függvényértéket! Van-e esetleg abszolút szélsőértéke valamelyik pontban?

3. Mondja ki a folytonos függvény vonalintegráljára tanult képletről szóló tételt!

   (a) Bizonyítsa („közelítőleg") az állítást!

   (b) Számítsa ki a képlet segítségével az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ függvény vonalintegrálját a $g(t)=(-\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ görbe mentén!

4.

(a) Mondja ki egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény adott pontbeli differenciálhatóságának elégséges feltételéről tanult tételt!

(b) Ellenőrizze a tétel feltételeinek teljesülését az $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$ függvényre $\mathbb{R}^2$-en!

5. Mondja ki az egyváltozós implicitfüggvény-tételt!

6. Definiálja a paraméteres integrált, és mondja ki a differenciálhatóságáról tanult tételt!

7. Mondja ki a Young-tételt 2 dimenzióban! Ellenőrizze a tételt az $f(x, y) = \sin(x^2 \cdot y)$ függvényre!