EGYVÁLTOZÓS IMPLICITFÜGGVÉNY-TÉTEL

BSC MATEMATIKATANÁR SZAKIRÁNY
2008/2009. TAVASZI FÉLÉV

Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása során gyakran találkozunk azzal a problémával, hogy egy $f(x,y)=0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével, van-e olyan φ függvény, hogy $f(x,\varphi(x))=0$ minden $x\in D(\varphi)$ esetén.
Például

$$f_1(x,y):=x^2+y^2-2x-4y+5=0$$

csupán $x=1$ és $y=2$ esetén teljesül, hiszen

$$x^2+y^2-2x-4y+5=(x-1)^2+(y-2)^2,$$

míg az

$$f_2(x,y):=x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

esetében a

$$\varphi:[0,2]\to[2,3],\ \ \varphi(x):=\sqrt{2x-x^2}+2$$

és a

$$\psi:[0,2]\to[1,2],\ \ \psi(x):=-\sqrt{2x-x^2}+2$$

függvényre is igaz, hogy $f_2(x,\varphi(x))=0$ $(x\in D(\varphi))$ és $f_2(x,\psi(x))=0$ $(x\in D(\psi))$.
A felvázolt példák nyomán fogalmazzuk meg az implicit módon definiált függvényt.
Legyen $f:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ $(q<p)$ egy függvény.

0.1. Definíció. Ha van olyan $\varphi:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ függvény, amelyre minden $x\in D(\varphi)$ esetén $(x,\varphi(x))\in D(f)$ és

$$f(x,\varphi(x))=0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $f(x,y)=0$ egyenlőség egy **implicit függvény**t definiál (a φ függvény az $f(x,y)=0$ által definiált implicit függvény).

Felvetődik a kérdés, hogy milyen feltételek esetén létezik ilyen függvény, és ha létezik, milyen tulajdonságai vannak. Az alábbiakban a $p=q=1$ esettel foglalkozunk.

0.2. Tétel. *(Egyváltozós implicitfüggvény-tétel)*
Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy van olyan $(a,b)\in D(f)$ pont, hogy $f(a,b)=0$. Tegyük fel továbbá, hogy f folytonos az (a,b) pont egy környezetében és $\exists D_2f\neq 0$ ebben a környezetben. Ekkor létezik a-nak ill. b-nek olyan $K(a)\subset\mathbb{R}$ ill. $K(b)\subset\mathbb{R}$ környezete, hogy

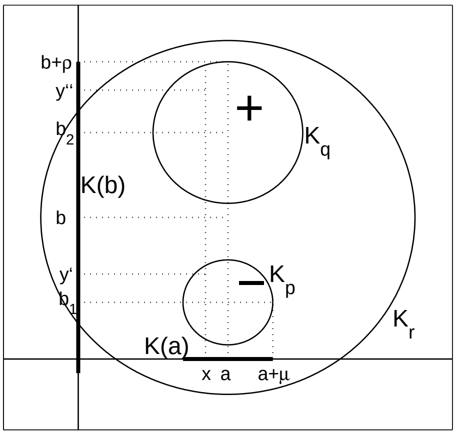
(i) Minden $x\in K(a)$ esetén $\exists!\,\varphi(x)\in K(b)$, melyre

$$f(x,\varphi(x))=0.$$

(ii) A $\varphi:K(a)\to K(b)$ függvény folytonos $K(a)$-n.

(iii) Ha f-ről azt is feltesszük, hogy folytonosan differenciálható (vagyis differenciálható, és a parciális deriváltjai folytonosak), akkor φ differenciálható is az a pontban, és

$$\varphi'(a)=-\frac{D_1f(a,b)}{D_2f(a,b)}.$$



1. ábra.

Megjegyezzük, hogy a tétel csak a φ implicit függvény létezéséről szól, általában nem tudjuk ezt a függvényt előállítani. Ennek ellenére a φ deriváltját ki tudjuk számítani az a pontban...!

Bizonyítás. A tételnek az (i) részét bizonyítjuk abban az esetben, mikor f folytonosan differenciálható.
Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ezért a $D_2 f$ parciális derivált is folytonos, és $D_2 f(a,b) \neq 0$. Legyen például $D_2 f(a,b) > 0$ (a $D_2 f(a,b) < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor $D_2 f$ folytonossága miatt létezik az $(a,b) \in D(f)$ pontnak olyan $r > 0$ sugarú $K_{\mathrm{r}}(a,b) \subset D(f)$ környezete, hogy

$$\forall (x,y) \in K_{\mathrm{r}}(a,b) \text{ esetén } D_2 f(x,y) > 0. \tag{0.1}$$

Tekintsük az

$$f_a : y \mapsto f(a,y)$$

függvényt! Mivel

$$f_a(b) = f(a,b) = 0, \text{ és } (f_a)'(b) = D_2 f(a,b) > 0,$$

ezért f_a lokálisan növő b-ben, így léteznek olyan $b_1 < b < b_2$ számok, hogy

$$f(a,b_1) = f_a(b_1) < 0 < f_a(b_2) = f(a,b_2),$$

és feltehető, hogy $(a,b_1),(a,b_2) \in K_{\mathrm{r}}(a,b)$. Az f függvény folytonossága miatt van olyan $p > 0$ és $q > 0$, hogy

$$\forall (x',y') \in K_{\mathrm{p}}(a,b_1) \text{ és } \forall (x'',y'') \in K_{\mathrm{q}}(a,b_2) \text{ esetén } f(x',y') < 0 < f(x'',y''). \tag{0.2}$$

A p és q elegendően kicsire választásával feltehető, hogy

$$K_{\mathrm{p}}(a,b_1) \subset K_{\mathrm{r}}(a,b),\ K_{\mathrm{q}}(a,b_2) \subset K_{\mathrm{r}}(a,b).$$

Legyen

$$\mu := \min\{p,q\}, \text{ és } K(a) := (a-\mu, a+\mu),$$

vagyis $K(a)$ tartalmazza K_{p} és K_{q} közül a kisebb sugarú (az ábrán K_{p}) vetületét az x-tengelyen. Legyen

$$\rho := \max\{b-(b_1-p), b_2+q-b\}, \text{ és } K(b) := (b-\rho, b+\rho),$$

vagyis $K(b)$ tartalmazza K_p és K_q közül a nagyobb sugarú (az ábrán K_q) vetületét az y-tengelyen.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $x \in K(a)$ pontot, definiálni fogjuk hozzá a megfelelő $\varphi(x) \in \in K(b)$ értéket. Jelölje

$$f_x : y \mapsto f(x, y),$$

mely f folytonossága következtében egy valós változós folytonos függvény.
A (0.2) alapján

$$f(x, b_1) = f_x(b_1) < 0 < f_x(b_2) = f(x, b_2),$$

mivel $x \in K(a)$ miatt $(x, b_1) \in K_\mathrm{p}(a, b_1)$ és $(x, b_2) \in K_\mathrm{q}(a, b_2)$. Alkalmazva f_x-re a Bolzano-tételt $[b_1, b_2]$-n, létezik olyan $y \in (b_1, b_2)$, amelyre

$$f_x(y) = f(x, y) = 0.$$

Csak egyetlen ilyen y létezik, ugyanis, ha $y^* \neq y$ is olyan lenne, hogy

$$f_x(y^*) = f(x, y^*) = 0,$$

akkor f_x-re alkalmazva a Rolle-tételt $[y, y^*]$-on (vagy $[y^*, y]$-on), létezne olyan c az y és y^* között, hogy

$$(f_x)'(c) = D_2 f(x, c) = 0$$

lenne. Ez pedig lehetetlen, hiszen $(x, c) \in K_\mathrm{r}(a, b)$, és (0.1) miatt $D_2 f(x, c) > 0$ kellene legyen.

Tehát bármely $x \in K(a)$ számhoz egyértelműen rendelhető olyan $y \in K(b)$ szám, hogy $f(x, y) = 0$, azaz létezik olyan

$$\varphi : K(a) \to K(b),\ \varphi(x) := y$$

függvény, hogy

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \ \ \forall x \in K(a).$$

Az egyértelműség miatt $\varphi(a) = b$ is teljesül. □