

## ANALÍZIS IV. TÉTELSOR

BSC MATEMATIKATANÁR SZAKIRÁNY  
2008/2009. TAVASZI FÉLÉV

Tudnivalók a vizsgáról: a vizsga írásban fog történni. Csak indexet, diákigazolványt (vagy személyit), tiszta papírt, írószerszámot és enni-innivalót hozhatnak be a terembe. A vizsga anyaga: ami előadáson elhangzott. Bizonyítást mindenhol kell tudni, kivéve ahol alább jelzem. A tételsor összeállításában elsősorban a fő témakörökre és az azokhoz tartozó állításokra, tételekre koncentráltam – a definíciókat természetesen mindenütt kell tudni, ott is, ahol külön nem jeleztem.

### 1. $\mathbb{R}^p$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvények differenciálhatósága

Függvények grafikonja. Parciális deriváltfüggvény. Differenciálhatóság, derivált fogalma. Differenciálhatóság elégséges feltétele a parciális deriváltak segítségével. Érintőhipersík. Iránymenti derivált, ennek előállítása a deriválttal. Lagrange-közéértéktétel.

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Weierstrass tételének általánosítása.

### 2. $\mathbb{R}^p$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvények többszörös differenciálhatósága

Többszörös differenciálhatóság fogalma. Young-tétel. Taylor-polinom. Taylor-formula. Az  $n$ . Taylor-polinom  $n$ -edrendben közelíti a függvényt.

Kvadratikus alakok definitisége. Kétszer differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére vonatkozó elégséges ill. szükséges feltétel. Kétszer differenciálható függvény konvexitására/konkavitására vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.

### 3. $\mathbb{R}^p$ -ből $\mathbb{R}^q$ -ba képező függvények

Koordinátafüggvények. Differenciálhatóság, derivált fogalma. Differenciálhatóság elégséges feltétele. Differenciálási szabályok.

Kompozíciófüggvény deriváltja. Láncszabály. Szorzat, hányados differenciálhatósága. Inverzfüggvény deriváltja.

### 4. Implicit- és inverzfüggvények

Implicitfüggvény fogalma. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel. Folytonos inverz létezése. Lokális injektivitás tétele (*bizonyítás nélkül*). Lokális szürjektivitás tétele (*bizonyítás-ötlet*). Nyílt leképezés-tétel. Inverzfüggvény-tétel (*bizonyítás nélkül*). Többváltozós implicitfüggvény-tétel (*bizonyítás lineáris esetben*). Lagrange-féle multiplikátor-elv (*bizonyítás  $p = 2, q = 1$  esetben*).

### 5. Ívhossz, vonalintegrál

Görbe. Görbe ívhossza, rektifikálhatósága. Lipschitz-tulajdonságú görbe. Folytonosan differenciálható görbe ívhossza (*bizonyítás „közelítéssel”*).

Vonalintegrál fogalma, fizikai interpretáció. Folytonos függvény folytonosan differenciálható görbe mentén vett vonalintegrálja (*bizonyítás „közelítéssel”*). Vonalintegrál csatolt görbék és ellentétes irányítású görbe mentén.

Felszín, felületi integrál fogalma.

### 6. Primitív függvény

Primitív függvény. Newton-Leibniz formula vonalintegrálra (*bizonyítás általános esetben „közelítéssel”, folytonos esetben precízen*), következmények. Folytonos függvény primitív függvénye létezésének szükséges és elégséges feltételei. Paraméteres integrál, paraméteres integrál deriválása. Folytonosan differenciálható függvény primitív függvénye létezésének szükséges és elégséges feltétele.