KIEGÉSZÍTÉS A VONALINTEGRÁLHOZ

BSC MATEMATIKATANÁR SZAKIRÁNY
2008/2009. TAVASZI FÉLÉV

Az alábbiakban az előadáson a vonalintegrálról ill. primitív függvényről elhangzottak közül azok olvashatók, amik a Laczkovich-T. Sós: Analízis II. jegyzetben nincsenek vagy másképp vannak benne.

1. Folytonos függvény primitív függvénye létezésének elégséges feltétele

1.1. Állítás. *Ha* $g_1 : [\alpha,\beta] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$, $g_2 : [\beta,\gamma] \to \Omega$ *és* $g_1(\beta) = g_2(\beta)$ *ún.* csatolt görbék, *akkor legyen*

$$g_1 \cup g_2 : [\alpha,\gamma] \to \Omega$$

az ún. egyesített görbe*, melyre*

$$(g_1 \cup g_2)_{|[\alpha,\beta]} = g_1 \text{ és } (g_1 \cup g_2)_{|[\beta,\gamma]} = g_2.$$

Ekkor bármely $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvényre*

$$\int_{g_1 \cup g_2} f = \int_{g_1} f + \int_{g_2} f,$$

ha az integrálok léteznek.

Bizonyítás. A vonalintegrál definíciójából adódik. □

1.2. Állítás. *Ha* $g : [\alpha,\beta] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ *görbe, akkor az*

$$\overleftarrow{g} : [\alpha,\beta] \to \Omega, \quad \overleftarrow{g}(t) := g(\alpha+\beta-t)$$

legyen az ellentétesen irányított *görbe. Ekkor ha egy* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvény esetén létezik* $\int_g f$, *akkor létezik* $\int_{\overleftarrow{g}} f$ *is, és*

$$\int_{\overleftarrow{g}} f = -\int_g f.$$

Bizonyítás. Mivel az $\int_{\overleftarrow{g}} f$ definíciójában

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{g}(c_i)), \overleftarrow{g}(t_i) - \overleftarrow{g}(t_{i-1}) \rangle, \tag{1.1}$$
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta,\ c_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

alakú közelítőösszegek szerepelnek, ezért elég meggondolni, hogy minden ilyen közelítőösszeg egyenlő egy, az $\int_g f$ integrált közelítő összeg mínusz egyszeresével, és fordítva. Mivel $\overleftarrow{g}(t) = g(\alpha+\beta-t)$ teljesül, azért a fenti (1.1) közelítőösszeg az alábbival egyenlő:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(\tilde{c}_i)), g(\tilde{t}_i) - g(\tilde{t}_{i-1}) \rangle,$$
$$\alpha = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = \beta,\ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}],$$

ahol $\tilde{x} = \alpha + \beta - x$. Így

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{g}(c_i)), \overleftarrow{g}(t_i) - \overleftarrow{g}(t_{i-1})\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(\tilde{c}_i)), g(\tilde{t}_{i-1}) - g(\tilde{t}_i)\rangle,$$

ahol

$$\alpha = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = \beta,\ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}].$$

Tehát az osztópontok átsorszámozása után az $\int_g f$ egy közelítő összegének mínusz egyszeresét kapjuk. A megfordítás ugyanígy meggondolható. □

Az előadáson beláttuk a vonalintegrálra vonakozó *Newton-Leibniz tételt*, vagyis hogy ha $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ (folytonos és) rektifikálható görbe, továbbá $f : R(g) \to \mathbb{R}^p$ olyan függvény, melynek az $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ primitív függvénye $R(g)$-n (vagyis F differenciálható és $F' = f$ $R(g)$-n), akkor

$$\int_g f = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)). \tag{1.2}$$

Az állításnak megfogalmaztuk két közvetlen következményét is. Az egyik, hogy primitív függvénnyel rendelkező függvény zárt görbén vett vonalintegrálja 0. A másik pedig, hogy ilyen függvény vonalintegrálja „független az úttól”, vagyis ugyanolyan végpontokkal rendelkező görbéken vett vonalintegráljai megegyeznek.
Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha f-ről feltesszük, hogy folytonos, akkor ezen állítások mindegyike megfordítható, vagyis bármelyikből következik, hogy f-nek van primitív függvénye. A továbbiakban görbe alatt mindig folytonos és rektifikálható görbét értünk.

1.3. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor ekvivalensek:*

(i) Minden $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ zárt görbe (vagyis $g(\alpha) = g(\beta)$) esetén

$$\int_g f = 0.$$

(ii) Minden olyan $g_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ és $g_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$ görbék esetén, melyekre $g_1(\alpha_1) = g_2(\alpha_2)$ és $g_1(\beta_1) = g_2(\beta_2)$ is igaz (vagyis a két görbe értékkészletének végpontjai megegyeznek), teljesül, hogy

$$\int_{g_1} f = \int_{g_2} f.$$

(Másképp: a vonalintegrál független az úttól.)

(iii) f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre

$$D_i F(x) = f_i(x), \quad \forall i = 1, \ldots, p,\ \forall x \in \Omega.$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$.
Legyenek $g_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ és $g_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$ olyan görbék, melyekre $g_1(\alpha_1) = g_2(\alpha_2)$ és $g_1(\beta_1) = g_2(\beta_2)$. Feltehető, hogy $\alpha_2 = \beta_1$ (pl. g_2 átparaméterezésével). Ekkor az 1.2. Állítás szerint a

$$\overleftarrow{g_2} : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega, \quad \overleftarrow{g_2}(t) := g_2(\alpha_2 + \beta_2 - t)$$

ellentétesen irányított görbével a

$$g_1 \cup \overleftarrow{g_2} : [\alpha_1, \beta_2] \to \Omega$$

zárt görbe lesz, ugyanis

$$(g_1 \cup \overleftarrow{g_2})(\alpha_1) = g_1(\alpha_1) \text{ és } (g_1 \cup \overleftarrow{g_2})(\beta_2) = \overleftarrow{g_2}(\beta_2) = g_2(\alpha_2),$$

és a feltétel szerint $g_1(\alpha_1) = g_2(\alpha_2)$. Így (i) és az 1.2. Állítás alapján

$$0 = \int_{g_1 \cup \overleftarrow{g_2}} f = \int_{g_1} f + \int_{\overleftarrow{g_2}} f = \int_{g_1} f - \int_{g_2} f,$$

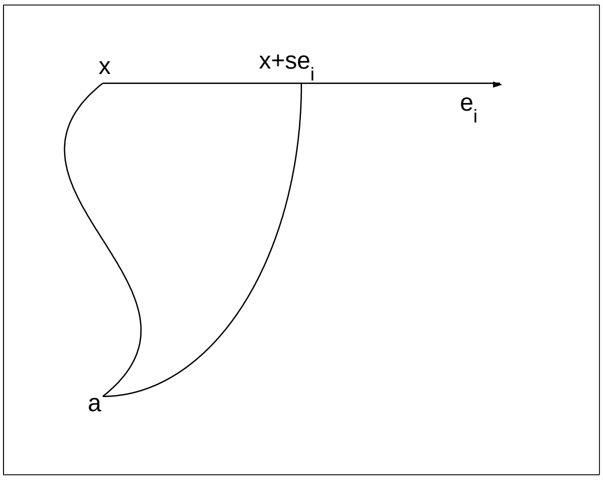
tehát

$$\int_{g_1} f = \int_{g_2} f.$$

$(ii) \Rightarrow (ii)$.
Rögzítsünk egy $a \in \Omega$ pontot. Legyen

$$F : \Omega \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_{g_{a,x}} f,$$

ahol $g_{a,x}$ jelöljön egy a-t x-szel összekötő sima görbét. Legyen $e_i \in \mathbb{R}^p$ $(i = 1,2,\ldots,p)$ az i-edik egységvektor.



1. ábra.

Ekkor

$$\begin{aligned} D_iF(x) &= \lim_{s\to 0} \frac{F(x+se_i) - F(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left(\int_{g_{a,x+se_i}} f - \int_{g_{a,x}} f \right) = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{g_{x,x+se_i}} f. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $g_{x,x+se_i}(t) = x + t \cdot e_i$, $t \in [0, s]$ folytonosan differenciálható, $g'_{x,x+se_i}(t) = e_i$, az előadáson belátott tétel alapján kapjuk, hogy

$$D_iF(x) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \langle f(x+te_i), e_i \rangle \mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s f_i(x+te_i) \mathrm{d}t.$$

Az Riemann-integrálnál tanultak alapján egy $h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény esetén létezik olyan $\theta\in[a,b]$, melyre

$$\int_a^b h = h(\theta)\cdot(b-a),$$

(vagyis a függvény alatti terület egy $b-a$ és $h(\theta)$ oldalhosszúságú téglalap területével egyezik meg). Felhasználva, hogy a $[0,s]\ni t\mapsto f_i(x+te_i)$ függvény folytonos (mivel f az), létezik olyan $\theta\in[0,s]$, melyre

$$D_iF(x)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^s f_i(x+te_i)\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}f_i(x+\vartheta e_i)\cdot s=\lim_{s\to 0}f_i(x+\vartheta e_i)=f_i(x),$$

mivel $s\to 0$ esetén $\theta\to 0$ és f_i folytonos. Tehát

$$D_iF(x)=f_i(x),\quad \forall x\in\Omega.$$

Mivel i tetszőleges volt, és f_i folytonos, ebből az is következik, hogy D_iF folytonos Ω-n minden i-re. Így következik, hogy F differenciálható Ω-n és $F'=f$.

$(iii)\Rightarrow(i)$
A vonalintegrálra vonatkozó (1.2) Newton-Leibniz-tételből következik. □

1.4. *Megjegyzés.* A fenti bizonyítás $(ii)\Rightarrow(iii)$ részében felhasználtuk, hogy bármely $a,x\in\in\Omega$ esetén létezik a-t x-szel összekötő, Ω-ban futó sima görbe. Ez csak akkor igaz, ha Ω-ról feltesszük, hogy ún. *összefüggő* halmaz. Ha Ω nem összefüggő, akkor az egyes *összefüggőségi komponenseire* alkalmazva a bizonyítást, az F primitív függvény az így kapott függvényekből előállítható.

2. Folytonosan differenciálható függvény primitív függvénye létezésének elégséges feltétele

2.1. Paraméteres integrál. Legyen $h:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol most $[a,b]$ és $[c,d]$ valós intervallumok). A

$$H:[c,d]\to\mathbb{R},\ H(y):=\int_a^b h(x,y)\mathrm{d}x$$

függvényt „**paraméteres integrál**nak” nevezzük (y a „paraméter”).

2.1. Tétel. *Legyen $h\colon[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy D_2h létezik és folytonos $[a,b]\times[c,d]$-n.*
Ekkor a $H:[c,d]\to\mathbb{R}$,

$$H(y):=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$$

függvény differenciálható (c,d)-n és minden $y\in(c,d)$ esetén

$$H'(y)=\int_a^b D_2h(x,y)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in (c,d)$ tetszőleges. Ekkor $\forall s \in (c,d),\ \ s \neq y$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{H(s)-H(y)}{s-y} - \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\left(\int_a^b h(x,s)\mathrm{d}x - \int_a^b h(x,y)\mathrm{d}x\right) - \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b (h(x,s)-h(x,y))\mathrm{d}x - \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b D_2 h(x,\eta)(s-y)\mathrm{d}x - \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b (D_2 h(x,\eta) - D_2 h(x,y))\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti sorban alkalmaztuk a Lagrange-féle középértéktételt h-ra a 2. változóban, $\eta \in (s,y)$ vagy $\eta \in (y,s)$ (és η tulajdonképpen függ x-től, de ennek a továbbiakban nem lesz szerepe). Mivel $D_2 h$ folytonos $[a,b]\times[c,d]$-n, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,s),(x,y) \in \in [a,b]\times[c,d]$, amelyre

$$|(x,s)-(x,y)| = |s-y| < \delta,$$

teljesül, hogy $|D_2 h(x,s) - D_2 h(x,y)| < \varepsilon$. Mivel η az y és s között van, így $|\eta - y| < \delta$ is fennáll, amiből

$$|D_2 h(x,\eta) - D_2 h(x,y)| < \varepsilon$$

is következik.
Legyen $s \in (c,d),\ \ s \neq y$ olyan, hogy $|s-y| < \delta$. Ekkor a fenti egyenlőségből

$$\left|\frac{H(s)-H(y)}{s-y} - \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |D_2 h(x,\eta) - D_2 h(x,y)|\mathrm{d}x < \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon(b-a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\exists \lim_{s\to y} \frac{H(s)-H(y)}{s-y}$ és

$$H'(y) = \lim_{s\to y}\frac{H(s)-H(y)}{s-y} = \int_a^b D_2 h(x,y)\mathrm{d}x.$$

□

Ezt a tételt a „paraméteres integrál deriválása" néven szokták emlegetni, és formálisan azt mondja, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b h(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x,$$

azaz kellően sima függvény esetén az integrál paraméter szerinti deriválását az integrál alatt is el lehet végezni.

2.2. Folytonosan differenciálható függvény csillagtartományon. A következőkben szintén egy, az előadáson belátott tétel megfordítását fogjuk igazolni. Meggondoltuk, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f:\Omega \to \mathbb{R}^p$ differenciálható, és f-nek létezik $F:\Omega\to\mathbb{R}$ primitív függvénye, akkor

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad \forall i,j = 1,\ldots,p,\ \forall x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha Ω ún. *csillagtartomány* és f folytonosan differenciálható Ω-n, akkor a fenti (2.1) feltételből következik, hogy f-nek van primitív függvénye.

2.2. Definíció. Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^p$. Az Ω tartomány **csillagtartomány**, ha létezik olyan $a\in\Omega$ pont, hogy minden $x\in\Omega$ esetén az

$$[a,x]:=\{a+t(x-a)\in\mathbb{R}^p : t\in[0,1]\}\subset\Omega$$

(az a pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni"...).

2.3. Tétel. *Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^p$ csillagtartomány. Legyen $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, vagyis f differenciálható és minden $i,j=1,2,\dots,p$ esetén D_if_j folytonos Ω-n. Ekkor ekvivalensek:*

(i) Minden $x\in\Omega$ esetén

$$D_if_j(x)=D_jf_i(x),\quad \forall i,j=1,\dots,p,$$

azaz $f'(x)\in\mathbb{R}^{p\times p}$ szimmetrikus mátrix.

(ii) f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F:\Omega\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre

$$D_iF(x)=f_i(x),\quad \forall i=1,\dots,p,\ \forall x\in\Omega.$$

Bizonyítás. $(i)\Rightarrow(ii)$
Legyen $x\in\Omega,\ x\neq a$ tetszőleges. Legyen az a pontot x-szel összekötő görbe az a

$$g_{a,x}(t):=a+t(x-a)\in\Omega,\ t\in[0,1].$$

Az $g_{a,x}$ görbén vett vonalintegrál legyen a F függvény x-beli értéke, azaz definiálja az $F:\Omega\to\mathbb{R}$ függvényt

$$F(x):=\int_{g_{a,x}} f,\quad x\in\Omega.$$

Ekkor

$$F(x)=\int_0^1\langle f(a+t(x-a)),x-a\rangle\mathrm{d}t,$$

mivel $g'_{a,x}(t)=x-a$. Megmutatjuk, hogy F primitív függvénye az f-nek. Legyen $i\in$ $\in\{1,2,\dots,p\}$ tetszőleges index. Ekkor minden $x\in\Omega$ esetén

$$D_iF(x)=D_i\int_0^1\langle f(a+t(x-a)),x-a\rangle\mathrm{d}t=D_i\int_0^1\sum_{j=1}^p f_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)\mathrm{d}t.$$

Most alkalmazzuk a paraméteres integrál deriválásáról szóló 2.1. Tételt. A „paraméter" most x_i, az i. változó lesz. Így folytatva a számolást:

$$D_iF(x)=\int_0^1\left(\sum_{j=1}^p\{D_if_j(a+t(x-a))\cdot t\}\cdot(x_j-a_j)+f_i(a+t(x-a))\cdot 1\right)\mathrm{d}t,$$

hiszen ha $j\neq i$, akkor $D_i(x_j-a_j)=0$. Most használjuk ki, hogy $D_if_j=D_jf_i$. Így kapjuk, hogy

$$D_iF(x)=\int_0^1\left(\sum_{j=1}^p\{D_jf_i(a+t(x-a))\cdot t\}\cdot(x_j-a_j)+f_i(a+t(x-a))\right)\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Tekintsük a

$$\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \Phi(t):=f_i(a+t(x-a))\cdot t$$

függvényt. A feltevések miatt Φ differenciálható (mivel f_i az), és a kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \langle f_i'(a+t(x-a)),(x-a)\rangle\cdot t+f_i(a+t(x-a)) = \\ &= \sum_{j=1}^{p} D_j f_i(a+t(x-a))\cdot t\cdot(x_j-a_j)+f_i(a+t(x-a)).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a (2.2) integrál alatt éppen $\Phi'(t)$ áll. Ezért:

$$D_iF(x) = \int_0^1 \Phi'(t)\mathrm{d}t = [\Phi(t)]_0^1 = \Phi(1)-\Phi(0) = f_i(a+x-a) = f_i(x).$$

Tehát $D_iF(x)=f_i(x)$. Mivel f_i folytonos Ω-n, ezért D_iF folytonos minden i-re, amiből már következik, hogy F differenciálható. Így valóban F az f primitív függvénye.

$(ii)\Rightarrow(i)$
Az állítás a Young-tételből adódik, felhasználva, hogy $D_iF=f_i$ differenciálható Ω-n minden $i=1,\ldots,p$ esetén (ld. előadás). $\square$