Analízis IV. gyakorlat

BSc matematikatanár szakirány
2008/2009. tavaszi félév

1. Differenciálegyenletek

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes, valamint a megadott feltételeket kielégítő megoldásait!

1. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
2. $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$
3. $y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(1) = 1$
4. $y'(x) = 4x \cdot \sqrt{y(x)}$
5. $y'(x) = \lambda \cdot y(x)\,(\lambda \in \mathbb{R}), \quad y(0) = -2$
6. $(1 + \mathrm{e}^x) \cdot y'(x) = y(x) \cdot \mathrm{e}^x$
7. $y'(x) = (x + y(x))^2$
8. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}$
9. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
10. $y'(x) + \dfrac{2}{x} \cdot y(x) = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}$
11. $y'(x) + 2x \cdot y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

2. Többváltozós függvények, folytonosság, határérték

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, és határozzuk meg az értelmezési tartományukat!

12. $f(x, y) = ax + by + c,\ a, b \in \mathbb{R}$
13. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $f(x, y) = x^2 + y^2$
15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
16. $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$
17. $f(x, y) = x^2 - y^2$

Folytonosak-e az alábbi függvények az értelmezési tartományukon?

18. $f(x, y) = x + y$
19. $f(x, y) = \frac{x}{y}$
20. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
21. Mutassuk meg, hogy ha a kétváltozós f függvény folytonos (a, b)-ben, akkor az $x \mapsto f(x, b)$ (egyváltozós) függvény folytonos a-ban és az $y \mapsto f(a, y)$ (egyváltozós) függvény folytonos b-ben! Igazoljuk, hogy az állíás megfordítása nem igaz! (ld. $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$)

Számítsuk ki az alábbi határértékeket (ha léteznek)!

22. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

23. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{1-\cos\frac{x}{y}}{x^2}$

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

25. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$

26. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

27. * $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Létezik-e a határértéke a $(0,0)$-ban az alábbi függvényeknek?

28.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}, & x,y\neq 0,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

29.

$$f(x,y)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

30.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & x,y\neq 0,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

3. Parciális deriválás, derivált, $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ eset

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait!

31. $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x+1$
32. $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}}$
33. $f(x,y)=xy\cos x^2y^2$
34. $f(x,y)=xy\ln(x+y)$
35. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{y^2+\frac{1}{x^6}}}$
36. $f(x,y)=\frac{1}{x\sin\frac{x}{y}}$
37. $f(x,y)=2^{-\frac{x}{y}}$
38. $f(x,y)=\frac{x\arcsin y}{y\arccos x}$
39. $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\lg x}$
40. $f(x,y)=\frac{x^2+3xy-1}{y^2+3xy-1}$
41. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2y^2}$
42. $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$
43. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$
44. $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
45. $f(x,y)=x^y$
46. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Számítsuk ki az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltjait!

47. $f(x,y)=x^3-3x^2y+xy^2+y^3$
48. $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$
49. $f(x,y)=\sin x\cos y$
50. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$
51. $f(x,y)=\ln\frac{x+y}{x-y}$
52. $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-x-y-z}$

Léteznek-e a $(0,0)$ pontbeli parciális deriváltjai a következő függvényeknek?

53. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

54. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Differenciálhatók-e a $(0,0)$-ban a következő függvények?

55. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

56. $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}$

57. $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^6}$

58. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$

59. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

60. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

61. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Differenciálhatók-e a következő függvények az értelmezési tartományukon?

62. $f(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^3)}$

63. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

64. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Számítsuk ki a következő többszörös parciális deriváltakat!

65. $f(x,y) = x^3y$, $D_{12}f(x,y)$, $D_{21}f(x,y)$;

66. $f(x,y) = x \cdot \ln y$, $D_1^2D_2f(x,y)$;

67. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$, $D_1D_2D_3f(x,y,z)$;

68. $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y$, $D_1^mD_2^nf(x,y)$;

69. $f(x,y) = y^3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{xy}{\cosh(x^2+y^2)}}$, $D_2D_1^3f(0,0)$;

70. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}}$, $x \neq 0$. Számítsuk ki a
$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 f$$
értékét! (f *Laplace*-át)

71. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényre nem teljesül a Young-tétel a $(0,0)$ pontban!
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi iránymenti deriváltakat!

72. $f(x,y) = (x-y)^2$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D_vf(0,0) = ?$

73. $f(x,y) = x^2+y^2$, $v = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}})$, $D_vf(3,1) = ?$

74. Mely irány mentén 0 az $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+\mathrm{e}^y$ függvény deriváltja a $(2,0)$ pontban? Mely irány mentén maximális?

75. $f(x,y) = \frac{25x^2y}{x^2+y^3}$, v az $x+3y=5$ egyenes irányvektora, $D_vf(2,1) = ?$

Írjuk fel az alábbi felületek megadott pontjában az érintősík egyenletét!

76. $f(x,y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 6y + 18,\ P = (2,1)$

    Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(2,01; 1,02)$-re!

77. $f(x,y) = x^2y + y^2 + 2y,\ P = (3,4)$

    Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(3,09; 3,92)$-re!

78. $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x},\ P = (1,1)$

79. $f(x,y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^2,\ P = (1,1)$

    Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

4. Szélsőértékszámítás

Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

80. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$;
81. $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$;
82. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
83. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
84. $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$
85. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$;
86. $f(x,y) = (1-x)^2 + (2+y)^2 - 4$;
87. $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$;
88. $f(x,y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$;
89. $f(x,y) = x^2y - 3xy + 2y^4$;
90. $f(x,y) = x^3 + (y+1)^3 - 3x \cdot (y+1)$;
91. $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$;
92. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27}$;
93. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2-2xy+2y^2)}$;
94. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}$;
95. $f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$;
96. $f(x,y) = (3 - 2x + y) \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$;
97. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 12$;
98. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2x+2z+2)}$.

Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

99. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!

100. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!

101. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!

102. Határozzuk meg az $f(x,y) = y \cdot (2x - 3)$ függvény minimumát és maximumát az x-tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!

103. Határozzuk meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$ függvény minimumát és maximumát a tengelyek és az $x + y = 6$ egyenletű egyenes által határolt tartományon!

104. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ szélsőértékeit az $x + y - 1 = 0$ egyenletű egyenesen!

105. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott K halmazokon!

(a) $f(x,y) = x + 2y, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 5\}$;

(b) $f(x,y) = 2xy, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

(c) $f(x,y) = x + 8y, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 17\}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \le 1\}$;

(e) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

(f) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3, \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

5. Összetett és implicit függvények differenciálása

106. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

(a) $u(x,y) = f(x+y)$;

(b) $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$;

(c) $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

(d) $u(x,y,z) = f\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

107. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ illetve $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

(a) $u(x,y) = f(ax, by)$;

(b) $u(x,y) = f(x+y, x-y)$;

(c) $u(x,y) = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$;

(d) $u(x,y,z) = f(x+y, z)$;

(e) $u(x,y,z) = f\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)$;

(f) $u(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

108. Legyen y a $[-1,1]$-en értelmezett olyan függvény, mely kielégíti az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egyenletet. Hány folytonos y megoldás van? Hány folytonos megoldás van, ha kikötjük, hogy $y(0) = 1$? És ha $y(1) = 0$?

109. Fejezzük ki az alábbi egyenletekkel meghatározott y függvények y' deriváltjait x és y segítségével!

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$;

(b) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$;

(c) $y - \frac{1}{2}\sin y = x$;

(d) $x^y = y^x$, $(x \neq y)$;

(e) $y = 2x \arctan\frac{y}{x}$.

6. Ívhossz, vonalintegrál

110. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $(R > 0)$ (körvonal)

b) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t)$ $(R > 0)$ (ciklois)

c) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos^3 t, R\sin^3 t)$ $(R > 0)$ (asztroid)

d) $\gamma\colon [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, R\cos t, R\sin t)$ $(h, R > 0)$ (csavarvonal)

111. Legyen $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

112. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált, ha $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ és a Γ görbe paraméterezése a következő:

a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

b) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$

113. Legyen Γ a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x, y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

114. Legyen Γ a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

115. Legyen Γ a $(2, 0)$, $(0, 2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0, 2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x, y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

116. Legyen $\gamma\colon \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\gamma(t) = (3\cos t, \sin t)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált, ha f a következő alakú:

a) $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

b) $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

c) $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

117. Legyen Γ az origó középpontú egység sugarú körvonalnak az $(1, 0)$ pontból az $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontba haladó nyolcada. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált, ha az f függvény a következő alakú:

a) $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$ b) $f(x, y) = \left(1 + \dfrac{1}{(x+2y)^2}, 2 + \dfrac{2}{(x+2y)^2}\right)$

118. Legyen $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\log(1+t^2)\sin t, \sqrt{5t^2 + \cos \pi t}\right)$, továbbá legyen $f(x, y) = (x + y, x + y)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

119. Legyen $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, továbbá legyen $f(x, y) = (e^{-x^2} + y, e^{-y^2} + x)$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\Gamma f$ vonalintegrált!