2. GYAKORLAT - megszámlálható halmazok, infimum, szuprémum, környezetek $\mathbb{R}$-ben, nevezetes függvények

1. Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok megszámlálhatóan végtelenek!
   (a) $(1,3)\cap\mathbb{Q}$ (b) $\{\frac{n}{2^k} : k,n\in\mathbb{N}\}$ (c) $\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{N}\}$ (d) $\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Q}\}$
   (e) racionális együtthatós másodfokú polinomok halmaza
   (f) $\{(a,b,c) : a,b,c\in\mathbb{N}$, létezik háromszög a,b és c oldalhosszakkal$\}$
   (g) egy $\mathbb{R}^2$-beli koordinátarendszerben legalább 2 egész koordinátájú pontot tartalmazó egyenesek halmaza

2. Adjuk meg az alábbi halmazok infimumát és szuprémumát! Melyeknek van minimuma?
   (a) $(-1,2)$ (b) $[-2,0)$ (c) $\{k+2 : k\in\mathbb{N}\}$ (d) $\mathbb{Q}\cap[-2,0)$
   (e) $\mathbb{Q}^*\cap[-2,0)$ (f) $\{\frac{a}{2^k} : a\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}\}$ (g) $\left\{a^2+\frac{2}{a} : a\in\mathbb{R}^+\right\}$ (h) $\{-\log_2 n : n\in\mathbb{Z}^+\}$
   (i) $\{\frac{n}{n+1} : n\in\mathbb{N}\}$ (j) $\{\frac{n+1}{n} : n\in\mathbb{Z}^+\}$ (k) $\{x\in\mathbb{Q} : x^2<2\}$ (l) $\{\frac{k}{n+k} : k,n\in\mathbb{Z}^+\}$

3. A következő állítások mindegyikében $A,B\subset\mathbb{R}$ tetszőleges nemüres halmazok.
   (a) Igazoljuk, hogy ha $A\subset B$, akkor $\sup A\le\sup B$ és $\inf B\le\inf A$ egyaránt teljesülnek!
   (b) Igazoljuk, hogy ha minden $a\in A$ elemhez van olyan $b\in B$ elem, hogy $b\ge a$, akkor $\sup B\ge\sup A$.
   (c) Igaz-e, hogy ha A összes eleme nagyobb B összes eleménél, akkor $\inf A>\sup B$?
   (d) Igazoljuk, hogy ha A és B felülről korlátosak, akkor $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is, amikor $\sup A$ vagy $\sup B$ végtelen!
   (e) Igazoljuk, hogy ha A és B alulról korlátosak, akkor $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is, amikor $\inf A$ vagy $\inf B$ mínusz végtelen!
   (f) Bevezetve a $-A=\{-a : a\in A\}$ jelölést, igazoljuk, hogy ha A alulról korlátos, akkor $-A$ felülről korlátos, és $\inf A=\sup(-A)$ teljesül!
   (g) Igazoljuk, hogy ha A nem korlátos, akkor A-ból véges sok elemet elhagyva szintén nem korlátos halmazt kapunk!
   (h) Igazoljuk, hogy ha az A halmaz korlátos, akkor tetszőleges $p\in\mathbb{R}^+$ esetén a
   $$p\cdot A=\{pa : a\in A\}$$
   halmazra $\sup(p\cdot A)=p\cdot\sup A$, valamint $\inf(p\cdot A)=p\cdot\inf A$ teljesül!
   Fogalmazzunk meg és igazoljunk hasonló állítást $p\in\mathbb{R}^-$ esetén is!
   (i) * Igazoljuk, hogy ha A korlátos, akkor
   $$\sup A-\inf A=\sup\{p-q : p,q\in A\}.$$

4. (a) Igazoljuk, hogy az $a\in\mathbb{R}$ pont véges sok környezetének metszete is környezete a-nak!
   (b) Igaz az is, hogy az $a\in\mathbb{R}$ pont végtelen sok környezetének metszete is mindig környezete a-nak? Lehet egy ilyen metszet üres?
   (c) Igazoljuk, hogy az $a\in\mathbb{R}$ pont véges sok környezetének uniója is környezete a-nak!
   (d) Igazoljuk, hogy az egymástól különböző $a,b\in\mathbb{R}$ pontoknak van olyan U_a és U_b környezetük, amelyeknek metszete üres!
   (e) Igazoljuk, hogy ha $b\in\mathbb{R}$ benne van $a\in\mathbb{R}$ minden környezetében, akkor $a=b$ teljesül!

(f) Igazoljuk, hogy ha a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az a pont minden környezetében van legalább *egy* a-tól különböző eleme, akkor végtelen sok is van!

(g) Igazoljuk, hogy ha $\inf A = a_0 \in \mathbb{R}$, akkor a_0 tetszőleges környezetében van A-beli elem!

(h) * Mutassunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely a *nulla* egy környezetét olyan halmazba képezi, amely nem környezete $f(0)$-nak!

5. Határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel megadott függvények inverzét!

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) $f(x) = \sqrt{5x-2}$, $\mathcal{D}(f) = [\frac{2}{5}, \infty)$

(c) $f(x) = 1 + 2^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \log_{10}(3x^3 - 3)$, $\mathcal{D}(f) = (1, \infty)$

(e) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $\mathcal{D}(f) = [-\pi, \pi]$

(f) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$

(g) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$

(h) $f(x) = 1 - \cos \sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f) = [0, \pi^2]$

(i) $f(x) = e^x - e^{-x} - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

(j) $f(x) = 3 - \operatorname{tg} x$, $\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$