Analízis IV. 2. előadás

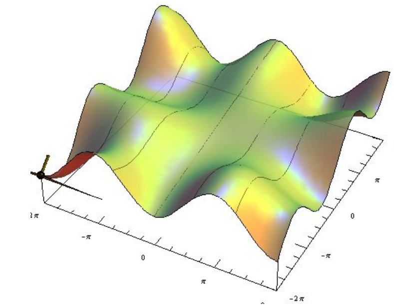
Sikolya Eszter

2011. február 24.

Emlékeztető

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathcal{D}(f),\ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$



1. ábra: Kétváltozós függvény grafikonja

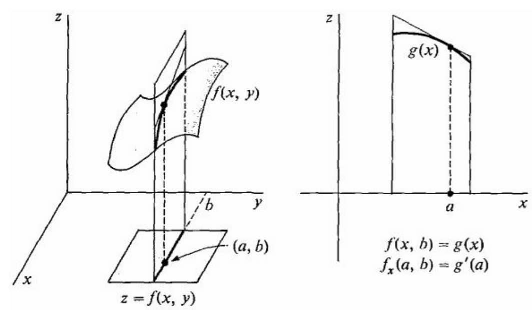
2 Parciális derivált

2.1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset

2.1. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Az f függvény *x szerinti* vagy *első változó szerinti parciális deriváltja létezik (a,b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_1 f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ vagy $f'_x(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 2. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x \mapsto f(x,b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a-ban.

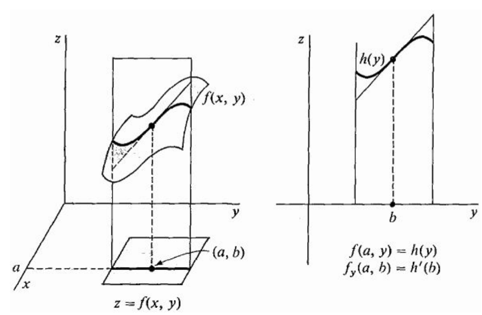


2. ábra: x szerinti parciális derivált

2.2. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Az f függvény *y szerinti* vagy *második változó szerinti parciális deriváltja létezik (a,b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_2 f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ vagy $f'_y(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 1. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y \mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b-ben.



3. ábra: y szerinti parciális derivált

2.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *első ill. második parciális deriváltfüggvénye* $D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ill. $D_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(D_1 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_1 f(x,y)\}, \quad (D_1 f)(x,y) := D_1 f(x,y)$$
$$\mathcal{D}(D_2 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_2 f(x,y)\}, \quad (D_2 f)(x,y) := D_2 f(x,y)$$

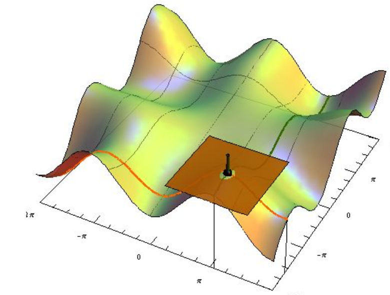
2.4. Definíció (19.78)**.** Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *másodrendű parciális deriváltjait* az első ill. második parciális deriváltfüggvények további paricális deriváltjaiból nyerjük:

$$D_{11} f := D_1(D_1 f),\ D_{12} f := D_1(D_2 f),\ D_{21} f := D_2(D_1 f),\ D_{22} f := D_2(D_2 f)$$

2.2 Lokális szélsőérték és parciális derivált

2.5. Definíció (19.57)**.** Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma ill. maximuma (lokális szélsőértéke) van az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban*, ha (a,b)-nek létezik olyan $U = B((a,b),r)$ környezete, hogy

$$f(x,y) \geq f(a,b) \text{ ill. } f(x,y) \leq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U.$$



4. ábra: Lokális maximum

Az $f(a,b) \in \mathbb{R}$ szám az f *lokális minimuma ill. maximuma* (a,b)-ben.
Ha

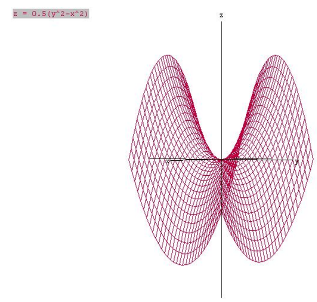
$$f(x,y) > f(a,b) \text{ ill. } f(x,y) < f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U$$

teljesül, akkor f-nek *szigorú lokális minimuma ill. maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van* (a,b)*-ben.*

2.6. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele, 19.58)**.** *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai* (a,b)*-ben, akkor*

$$D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0.$$

Példa. Az $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$ függvényre $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) = 0$, mégsincs lokális szélsőértéke (0,0)-ban.



5. ábra: $f(x,y) = xy$

Példa. Az $f(x,y) = xy$ (nyeregfelület) függvényre $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) = 0$, mégsincs lokális szélsőértéke (0,0)-ban.

2.7. Tétel (19.59)**.** *Legyen* f *az* A *korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy* f*-nek léteznek a parciális deriváltjai* $\operatorname{int} A$ *pontjaiban. Ekkor* f *a legkisebb és legnagyobb értékét vagy* ∂A*-n veszi fel, vagy* $\operatorname{int} A$ *egy olyan pontjában, ahol* $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$.

Példa (19.56)**.** Az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0, & (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai (0,0)-ban, $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) =$ $= 0$, de a függvény nem folytonos (0,0)-ban (ld. előző félév.)

2.3 $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

A fentiek könnyen általánosíthatók p változós függvényekre. Például:

2.8. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Az f függvény *i. változó szerinti parciális deriváltja létezik a-ban*, ha

$$\exists \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \dots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_p)}{t - a_i} \in \mathbb{R}.$$

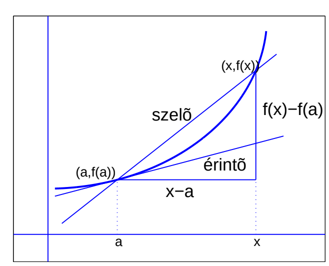
Jelölés: $D_i f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vagy $f'_{x_i}(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az a pont összes koordinátáját lerögzítjük az i. kivételével, és az így kapott $t \mapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a_i-ben.

3 Differenciálhatóság

3.1 Bevezető

3.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban*, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$$



6. ábra: Egyváltozós függvény deriváltja a-ban

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)}{x-a}=0 \qquad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\varepsilon(x)\cdot(x-a),\quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0. \qquad (2)$$

Megjegyzés. Az

$$y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

a függvény *a pontbeli érintőjének* egyenlete.

3.2. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x,y)=\alpha_1\cdot x+\alpha_2\cdot y,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(Itt $\alpha_1=\ell(1{,}0)$, $\alpha_2=\ell(0{,}1)$.)

3.2 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *eset*

3.3. Definíció (19.61)**.** Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény, $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az* (a,b) *pontban*, ha létezik olyan $\ell=\ell_{(a,b)}:$ $:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-\ell(x-a,y-b)}{|(x-a,y-b)|}=0 \text{ (vö. (1))}$$

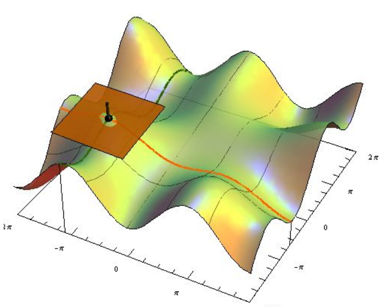
$$\Updownarrow$$

$$f(x,y)=f(a,b)+\ell(x-a,y-b)+\varepsilon(x,y)\cdot|(x-a,y-b)|,\ \lim_{(x,y)\to(a,b)}\varepsilon(x,y)=0 \text{ (vö. (2))}$$

3.4. Tétel (19.64)**.** *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor folytonos is (a,b)-ben.*

3.5. Tétel (19.65)**.** *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor f-nek léteznek a parciális deriváltjai (a,b)-ben, és a fenti definícióban*

$$\ell(x,y)=D_1f(a,b)\cdot x+D_2f(a,b)\cdot y.$$



7. ábra: Kétváltozós függvény deriváltja

3.6. Definíció (19.68)**.** Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor az $f'(a,b):=$ $=(D_1f(a,b),D_2f(a,b))\in\mathbb{R}^2$ vektort a függvény (a,b)-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük.

3.7. Tétel (19.69)**.** *Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény, $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a D_1f és D_2f parciális deriváltfüggvények léteznek az (a,b) pont egy környezetében és* folytonosak *(a,b)-ben. Ekkor f differenciálható (a,b)-ben.*