Analízis IV., 5. előadás

Sikolya Eszter

2011. március 17.

5 A differenciálszámítás alkalmazásai

5.1. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a, b) pontbeli 1. *Taylor-polinomja*

$$T^f_{1,(a,b)}(x, y) = f(a, b) + D_1 f(a, b) \cdot (x - a) + D_2 f(a, b) \cdot (y - b)$$

az a legfeljebb elsőfokú polinomfüggvény, melynek grafikonja az érintősík.

5.2. Definíció (19.92)**.** Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a, b) pontbeli 2. *Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned} T^f_{2,(a,b)}(x, y) =& f(a, b) + D_1 f(a, b) \cdot (x - a) + D_2 f(a, b) \cdot (y - b)+ \\ &+\frac{1}{2!}\Big(D_{11} f(a, b) \cdot (x - a)^2 + D_{21} f(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + D_{12} f(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + D_{22} f(a, b) \cdot (y - b)^2\Big) \end{aligned}$$

egy legfeljebb másodfokú polinomfüggvény.

Jelölés. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Jelölje $\mathrm{d}^1 f(a, b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $\mathrm{d}^2 f(a, b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az alábbi (kétváltozós) függvényeket:

$$\begin{aligned} \Big(\mathrm{d}^1 f(a, b)\Big)(x, y) &:= D_1 f(a, b) \cdot x + D_2 f(a, b) \cdot y; \\ \Big(\mathrm{d}^2 f(a, b)\Big)(x, y) &:= D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + D_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{12} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22} f(a, b) \cdot y^2 \\ &= D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + 2D_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22} f(a, b) \cdot y^2 \end{aligned}$$

Ezzel a jelöléssel

$$T^f_{2,(a,b)}(x, y) = f(a, b) + (\mathrm{d}^1 f(a, b))(x - a, y - b) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(a, b))(x - a, y - b)$$

Ez nagyon hasonlít az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények 2. Taylor-polinomjának alakjához:

$T^f_{2,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a)^2.$

5.3. Tétel (19.91)**.**

$$T^f_{2,(a,b)}(a, b) = f(a, b), \quad D_i T^f_{2,(a,b)}(a, b) = D_i f(a, b), \quad D_{ij} T^f_{2,(a,b)}(a, b) = D_{ij} f(a, b),\ i, j = 1,2.$$

Továbbá, ha p olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre a fentiek teljesülnek, akkor $p = T^f_{2,(a,b)}$.

5.4. Tétel (19.97)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor*

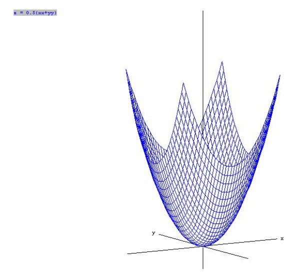
1.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - T^f_{2,(a,b)}(x, y)}{|(x - a, y - b)|^2} = 0; \qquad (1)$$

2. Ha p olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre (1) *teljesül, akkor $p = T^f_{2,(a,b)}$.*

5.5. Definíció. Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinom. Azt mondjuk, hogy q *kvadratikus alak*, ha

$$q(x,y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2. \tag{2}$$

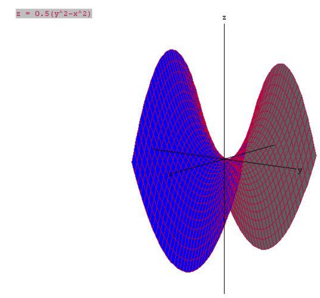


1. ábra: Pozitív definit kvadratikus alak, $q(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Példa. Kvadratikus alakra: f kétszer differenciálható (a,b)-ben, $q = \mathrm{d}^2 f(a,b)$

$$\left(\mathrm{d}^2 f(a,b)\right)(x,y) =$$
$$D_{11}f(a,b)\cdot x^2 + D_{21}f(a,b)\cdot x\cdot y + D_{12}f(a,b)\cdot x\cdot y + D_{22}f(a,b)\cdot y^2. \tag{3}$$

5.6. Definíció (19.98)**.** Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *pozitív ill. negatív definit*, ha minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén $q(x,y) > 0$ ill. $q(x,y) < 0$. A kvadratikus alakot *pozitív ill. negatív szemidefinit*nek hívjuk, ha az előbbiekben egyenlőség is meg van engedve. Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *indefinit*, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.



2. ábra: Indefinit kvadratikus alak, $q(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$

Megjegyzés. A fenti definícióban a feltételek teljesülését elég egy abszolút értékű (hosszú) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vektorokra megkövetelni.
Továbbá, lineáris algebrából ismeretes, hogy egy q kvadratikus alak definitsége a (2) egyenletben szereplő együtthatókból képezett

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix definitségével egyezik meg. Ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0$, akkor C *pozitív definit*, ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0$, akkor C *negatív definit.* A $c_{21} = c_{12}$ (*szimmetrikus* mátrix) esetben ha $\det C = 0$, akkor C *(pozitív vagy negatív) szemidefinit*, ha $\det C < 0$, akkor C *indefinit.* (Ebben az esetben a $\det C > 0$, $c_{11} = 0$ nem fordulhat elő.)

5.7. Tétel (Lokális szélsőérték létezése, 19.99)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható az* $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ *pontban, és tegyük fel, hogy* $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$.

1. *Ha f-nek (a,b)-ben lokális minimuma ill. maximuma van, akkor a (3)-ban definiált $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív ill. negatív szemidefinit.*
2. *Ha a (3)-ban definiált $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív ill. negatív definit, akkor f-nek (szigorú) lokális minimuma ill. maximuma van (a,b)-ben.*

Megjegyzés. A fenti megjegyzés alapján $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ definitsége eldönthető a

$$\begin{pmatrix} D_{11}f(a,b) & D_{21}f(a,b) \\ D_{12}f(a,b) & D_{22}f(a,b) \end{pmatrix}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix definitsége alapján.

Megjegyzés. A fenti tétel egyik állítása sem megfordítható! (Ld. egyváltozós eset.)