Analízis IV., 7. előadás

Sikolya Eszter

2011. március 31.

Vissza az integrálszámításhoz:

6.1. Tétel (Integráltranszformáció, 22.23)**.** *Legyen* $H \subset \mathbb{R}^p$ *mérhető halmaz,* $g : H \to \mathbb{R}^p$ *folytonosan differenciálható és injektív* $\operatorname{int} H$*-ban. Ekkor* $g(H)$ *is mérhető, és ha* $f : g(H) \to \mathbb{R}$ *korlátos, akkor*

$$\int_{g(H)} f = \int_H (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

(az egyik oldal pontosan akkor létezik, ha a másik, és ekkor egyenlők).

Példa. Legyen $g(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $(r, \varphi) \in H$ az ún. *polártranszformáció.* Ekkor

$$\det g' = \left| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

7 *Implicit és inverz függvények*

Probléma. Az $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével? Vagyis: van-e olyan φ függvény, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x \in D(\varphi)$.

Példa.

$$f_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

$$f_2(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

7.1. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel, 20.28)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, és tegyük fel, hogy* $f(a, b) = 0$*,* $(a, b) \in \mathcal{D}(f)$*. Tegyük fel, hogy* f *folytonos az* (a, b) *pont egy környezetében és* $\exists D_2 f \neq 0$ *ebben a környezetben. Ekkor létezik* a*-nak ill.* b*-nek olyan* $K(a) \subset \mathbb{R}$ *ill.* $K(b) \subset \mathbb{R}$ *környezete, hogy*

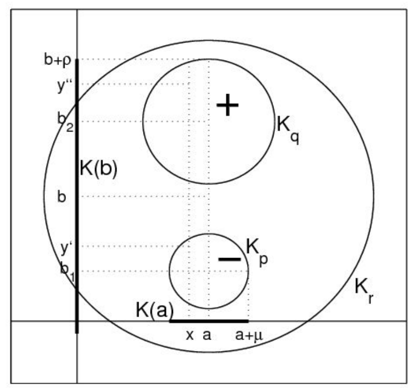
(i) Minden $x \in K(a)$ *esetén* $\exists!\ \varphi(x) \in K(b)$*, melyre*

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

(ii) A $\varphi : K(a) \to K(b)$ *függvény folytonos* $K(a)$*-n.*

(iii) Ha f *folytonosan differenciálható* (a, b)*-ben, akkor* φ *differenciálható is az a pontban, és*

$$\varphi'(a) = -\frac{D_1 f(a, b)}{D_2 f(a, b)}.$$



1. ábra: Implicitfüggvény-tétel

7.2. Definíció. Legyenek $g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények, továbbá $H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_q(x) = 0\}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0, \ldots, g_q = 0$ feltétel mellett *feltételes szélsőértéke* van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

7.3. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer, 20.43)**.** *Legyenek* $f, g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy az* f *függvénynek a* $g_1 = 0$*,* $g_2 = 0, \ldots, g_q = 0$ *feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az* $a \in \mathcal{D}(f)$ *pontban. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & D_2 g_1(a) & \ldots & D_p g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 g_q(a) & D_2 g_q(a) & \ldots & D_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ *számok, hogy az*

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

függvényre $F'(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$*.*

$$D_1 f(a) + \lambda_1 D_1 g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_1 g_q(a) = 0$$
$$D_2 f(a) + \lambda_1 D_2 g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_2 g_q(a) = 0$$
$$\vdots$$
$$D_p f(a) + \lambda_1 D_p g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_p g_q(a) = 0$$