Analízis IV., 8. előadás

Sikolya Eszter

2011. április 7.

7.1. Tétel (Folytonos lokális inverz létezése)**.** *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a b pont egy környezetében, itt $g'(y) \neq 0$. Ekkor g-nek létezik a $g(b) = a$ egy $K_\delta(a)$ környezetében értelmezett folytonos (jobb)inverze, φ, melyre $g(\varphi(x)) = x$ minden $x \in K_\delta(a)$.*

7.2. Definíció (20.31)**.** Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvénye *folytonosan differenciálható* az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, ha f differenciálható az a pont egy környezetében, és koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai folytonosak a-ban.

7.3. Tétel (Lokális injektivitás, 20.32)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ($p \leq q$) folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés injektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja p). Ekkor f is injektív az a pont egy környezetében.*

7.4. Tétel (Lokális szürjektivitás, 20.35)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ($p \geq q$) folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.*

7.5. Következmény (Nyílt leképezés tétele, 20.37)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ($p \geq q$) folytonosan differenciálható a $\mathcal{D}(f)$ halmazon, és tegyük fel, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén az $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(x)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor a $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet nyílt halmaz.*

7.6. Tétel (Inverzfüggvény-tétel, 20.38)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés injektív (vagyis, $\det f'(a) \neq 0$). Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$, hogy*

1. *$\forall\ x \in B(f(a), \delta)$ esetén $\exists!\ \varphi(x) \in B(a, \eta) : f(\varphi(x)) = x$;*
2. *a $\varphi : B(f(a), \delta) \to B(a, \eta)$ függvény differenciálható $B(f(a), \delta)$-n;*
3. *$f'(x)$ injektív (vagyis, $\det f'(x) \neq 0$) minden $x \in B(a, \eta)$ esetén és*

$$\varphi'(f(x)) = \left[f'(x)\right]^{-1}, \quad x \in B(a, \eta).$$

7.7. Tétel (Többváltozós implicitfüggvény-tétel, 20.40)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható a $c = (a, b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében, ahol $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, és $f(c) = f(a, b) = 0_{\mathbb{R}^q}$. Tegyük fel, hogy az $f_a : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $f_a(y) = f(a, y)$ függvényre $(f_a)'(b)$ injektív (vagyis, $\det f'_a(b) \neq 0$.) Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$, hogy*

1. *$\forall\ x \in B(a, \delta)$ esetén $\exists!\ \varphi(x) \in B(b, \eta) : f(x, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$;*
2. *a $\varphi : B(a, \delta) \to B(b, \eta)$ függvény folytonosan differenciálható $B(a, \delta)$-n;*
3. *az $f^b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f^b(x) = f(x, b)$ jelöléssel*

$$\varphi'(x) = -\left[f'_a(x)\right]^{-1} \cdot (f^b)'(\varphi(x)), \quad x \in B(a, \delta).$$