Analízis IV., 9. előadás

Sikolya Eszter

2011. április 14.

8 Ívhossz, vonalintegrál, primitív függvény

8.1 Görbe

8.1. Definíció. Egy $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ leképezést *görbé*nek nevezünk. $d = 2$ esetben *síkgörbé*ről, $d = 3$ esetben *térgörbé*ről beszélünk.
Speciális síkgörbe: $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, f(t))$, ahol $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény.

8.2. Definíció. Egy $[x,y] \subset \mathbb{R}^d$ halmazt $\mathbb{R}^d$-beli *szakasz*nak hívunk, ha

$$[x,y] = \{t \cdot x + (1-t) \cdot y : t \in [0,1]\}.$$

Egy $\mathbb{R}^d$-beli *poligon* (vagy *töröttvonal*) egymáshoz csatlakozó szakaszok uniója.

8.3. Definíció (14.15)**.** Egy $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe *ívhossza* az

$$s(g) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\right\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Itt $|g(t_i) - g(t_{i-1})| = |[g(t_{i-1}), g(t_i)]|$ szakasz hossza.
A $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe *rektifikálható*, ha $s(g) < \infty$.

8.4. Definíció. A g görbe *egyszerű ív*, ha $\mathcal{R}(g)$-nek létezik bijektív folytonos paraméterezése.

8.5. Állítás (14.19)**.** *Ha g_1 és g_2 ugyanannak az egyszerű ívnek a bijektív folytonos paraméterezései, akkor $s(g_1) = s(g_2)$.*

8.6. Definíció (14.16)**.** A $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe *folytonos/(folytonosan) differenciálható/Lipschitz-tulajdonságú*, ha minden $j = 1, \ldots, d$ esetén a $g_j :$ $: [a,b] \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvény folytonos/(folytonosan) differenciálható ill. Lipschitz-tulajdonságú.

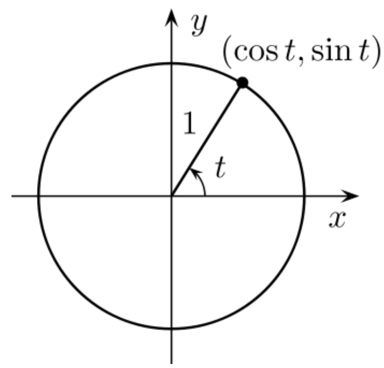
8.7. Tétel (14.20)**.** *Ha a $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe Lipschitz-tulajdonságú (pl. folytonosan differenciálható), akkor g rektifikálható.*

8.8. Tétel (14.21)**.** *Ha a $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, d$ esetén $g_j' \in R[a,b]$ (pl., ha g folytonosan differenciálható), akkor*

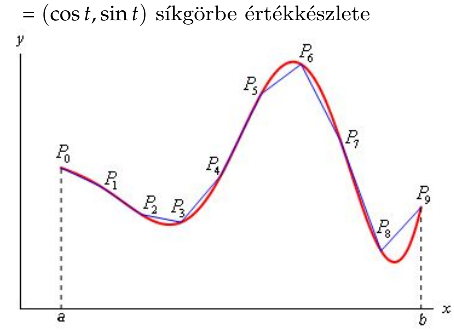
$$s(g) = \int_a^b |g'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + \cdots + (g_d'(t))^2}\, dt.$$

Megjegyzés (14.13)*.* A fenti tétel speciális esete, ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, f(t))$, és így f grafikonjának ívhossza

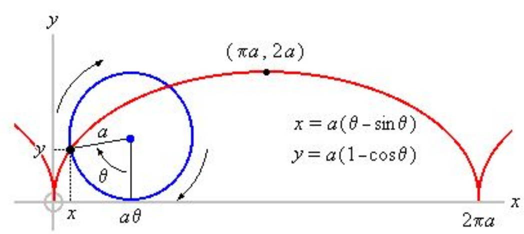
$$s(g) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$



1. ábra: A $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) =$ $= (\cos t, \sin t)$ síkgörbe értékkészlete



2. ábra: Görbe ívhosszának közelítése poligonnal



3. ábra: Cikloisgörbe értékkészlete

Példa. A $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ cikloisgörbe ívhossza:

$$s(g) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$$

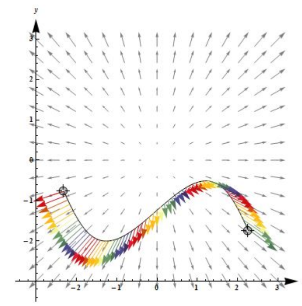
$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8a$$

8.2 Vonalintegrál

8.9. Definíció (22.28)**.** Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy az f *vonalintegrálja a* g *görbe mentén* $\int_g f \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| \int_g f - \sum_{i=1}^{n} \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle \right| < \varepsilon.$$



4. ábra: Görbe menti vektormező

8.10. Tétel (22.35)**.** *Legyen* $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ *görbe differenciálható és minden* $j = 1, \ldots, p$ *esetén* $g_j' \in R[a, b]$ *(pl.,* g *folytonosan differenciálható), továbbá* $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$ *folytonos. Ekkor*

$$\int_g f = \int_a^b \langle f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{p} f_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \, dt.$$

8.3 Primitív függvény

8.11. Definíció (22.36)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $G \subset \mathcal{D}(f)$ nyílt. Azt mondjuk, hogy a $F : G \to \mathbb{R}$ *primitív függvénye* f*-nek* G*-n*, ha F differenciálható G-n és minden $x \in G$ esetén

$$F'(x) = f(x) \iff D_j F(x) = f_j(x), \ j = 1, \ldots, p.$$

8.12. Tétel (Newton-Leibniz formula vonalintegrálra, 22.38)**.** *Tegyük fel, hogy az* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *van* $F : G \to \mathbb{R}$ *primitív függvénye* G*-n. Ekkor tetszőleges* $g : [a, b] \to G \subset \mathbb{R}^p$ *folytonos és rektifikálható görbére*

$$\int_g f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Megjegyzés (22.39)*.* Ha a $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $g_j' \in R[a, b]$ (pl., g folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$ pedig folytonos, és primitív függvénye F, akkor a 8.10. Tétel alapján

$$\int_g f = \int_a^b \langle f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt = \int_a^b (F \circ g)'(t) \, dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

az egyváltozós Newton-Leibniz-tételből adódik.

8.13. Definíció. A $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *zárt görbe*, ha $g(a) = g(b)$.

8.14. Következmény. *Ha az* $f : G \to \mathbb{R}^p$ *(*$G \subset \mathbb{R}^p$*) függvénynek van primitív függvénye, akkor tetszőleges* $g : [a, b] \to G$ *folytonos és rektifikálható* zárt *görbe mentén vett vonalintegrálja* 0*. Továbbá, tetszőleges folytonos és rektifikálható görbe mentén vett vonalintegrálja független az „úttól”.*

8.15. Tétel (22.44)**.** *Legyen* $f : G \to \mathbb{R}^p$ *(*$G \subset \mathbb{R}^p$*) differenciálható* G*-n. Ha* f*-nek van primitív függvénye* G*-n, akkor minden* $x \in G$ *esetén*

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad i, j = 1, \ldots, p.$$