

MATEMATIKA TANÁRI SZAK

Analízis szigorlati tétel

2010/11. II. félév

1. Logikai, kombinatorikai, halmazelméleti alapfogalmak. Logikai alapfogalmak. Az indirekt bizonyítás módszere. A teljes indukció módszere. A számtani-mértani-harmonikus közép közötti egyenlőtlenség. Bernoulli-egyenlőtlenség. Binomiális tétel. Halmazelméleti alapfogalmak. Megszámlálható halmazok.

2. Valós számok. Testaxiómák, rendezési axiómák. Természetes számok, egész számok, racionális számok. Arkhimedeszi axióma. Felső és alsó határ létezése. Pozitív valós számok racionális és egész kitevős hatványai. A hatványozás tulajdonságai.

3. Számsorozatok határértéke. Sorozat fogalma. Sorozat határértéke: konvergencia, végtelenhez tartás, divergencia fogalma. Határérték és műveletek. Határérték és rendezés. Nevezetes sorozatok határértékei. Monoton sorozatok. Az e szám. Bolzano-Weierstrass tétel. Cauchy-kritérium.

4. Végtelen sorok. Végtelen (numerikus) sor fogalma. Végtelen sor összege, konvergencia és divergencia fogalma. A geometriai sor. Cauchy-kritérium, összehasonlító kritérium. Gyökkritérium és hányadoskritérium. Abszolút konvergens sorok. Leibniz-tétel.

5. Elemi függvények. Függvény fogalma. Injektív, bijektív függvények. Függvények kompozíciója, függvény inverze. Valós függvények. Páros, páratlan, korlátos, monoton függvények, konvex függvények, grafikus értelmezés. Hatványfüggvények, polinomok és racionális törtfüggvények. Exponenciális függvények, logaritmusfüggvények. Trigonometrikus és hiperbolás függvények, inverzeik.

6. Függvények határértéke, folytonossága. Valós függvények határértéke. Féloldali határérték. Monoton függvények féloldali határértékei. Határérték és műveletek, kompozíciófüggvény határértéke. Folytonos függvények. Folytonosság és műveletek. Intervallumon értelmezett folytonos függvények alaptulajdonságai: Darboux, Bolzano és Weierstrass tételei. Intervallumon értelmezett folytonos függvény inverze. Egyenletes folytonosság, Heine tétele.

7. Differenciálszámítás. Függvény deriváltja egy pontban, érintő fogalma. A deriváltfüggvény. Nevezetes függvények deriváltja. Műveleti szabályok. Kompozíció- és inverzfüggvény deriváltja. Középtértéktételek differenciálható függvényekre. L'Hospital-szabály. Taylor-polinom, Taylor-formula. Nevezetes Taylor-sorok.

8. Differenciálszámítás alkalmazásai. A derivált előjele és a függvény monoton növekedése ill. csökkenése közötti kapcsolat. Lokális szélsőérték szükséges feltétele. Elégséges feltétel lokális szélsőértékre az 1. és 2. derivált segítségével. Függvény konvexitása és az 1. ill. 2. derivált közötti kapcsolat. Inflexiós pont. Differenciálegyenletek: lineáris és szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Kezdetiérték-feladat.

9. Primitív függvény, Riemann-integrál. Primitív függvény fogalma. Alapintegrálok. Parciális és helyettesítéses integrálás. A Riemann-integrál fogalma. Darboux-féle alsó és felső integrál. Riemann-integrál alapvető tulajdonságai. Newton-Leibniz tétel. Parciális és helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra. Integrálfüggvény, folytonos függvény integrálfüggvénye. Improprius integrál. Integrálszámítás alkalmazásai.

10. Függvénysorozatok és függvénysorok. Függvénysorozat és függvénysor pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság, differenciálhatóság öröklődése a limesz- ill. összegfüggvényre, példák. Függvénysor egyenletes konvergenciájára vonatkozó kritériumok. Hatványsorok tulajdonságai. Abel-tétel és néhány következménye. Taylor-sor, nevezetes Taylor-sorok.

11. Metrikus terek. Metrikus tér fogalma, fontos példák. Metrikus terek alapfogalmai: pontok osztályozása, gömbök, nyílt és zárt halmazok. Konvergens sorozatok metrikus terekben. Teljes metrikus terek, példák. Banach-féle fixponttétel. Korlátosság, sorozatkompaktság. Az \mathbb{R}^p tér. Határérték és folytonosság metrikus terek között ható függvényekre. Kompozíciófüggvény határértéke és folytonossága metrikus terekben. Weierstrass tétele metrikus terekben.

12. A többváltozós differenciálszámítás elemei I. \mathbb{R}^p -ből \mathbb{R} -be illetve \mathbb{R}^q -ba képező függvények deriváltja. Parciális és iránymenti derivált. Differenciálhatóság és műveletek. Kompozíció- és inverzfüggvény deriváltja. Lagrange-középértéktétel. Többszörös differenciálhatóság. Taylor-polinom, Taylor-formula.

13. A többváltozós differenciálszámítás elemei II. \mathbb{R}^p -ből \mathbb{R} -be képező függvények lokális szélsőértékének létezésére és konvexitására vonatkozó feltételek. Többszörös differenciálhatóság. Young-tétel. Egy- és többváltozós implicitfüggvénytétel. Lokális injektivitás, nyílt leképezések tétele, inverzfüggvény-tétel. Lagrange-féle multiplikatormódszer.

14. A többváltozós integrálszámítás elemei. Az \mathbb{R}^p -beli Jordan-mérték. Darboux-féle alsó és felső integrál. Az integrál elemi tulajdonságai. Integrál és mérték kapcsolata. Fubini tétele. Normáltartományon vett integrál, Cavalieri-elv. Integráltranszformáció. Görbe fogalma, ívhossz-számítás. Vonalintegrál. Primitív függvény, Newton-Leibniz formula vonalintegrálra. Green-, Gauss-Osztrogradszkij-, Stokes-tétel.