Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 10.

I. rész: Beugró feladatok

Név:

Az I. részre 30 perc van. Eldöntendő kérdésre csak igen/nem-el válaszoljon! A 12-ből 9 pontot kell elérni. Csak erre az oldalra, lehetőleg a pontozott részre írjon!

1. Mi az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja?

   ....

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Mi a pontbeli érintősíkjának normálvektora?

   ....

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha $\exists D_1 f(a, b)$, $\exists D_2 f(a, b)$, akkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_v f(a, b)$?

   ....

4. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2} =?$

   ....

5. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Definiáljuk a $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alakot!

   ....

6. Konvex-e az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ síkbeli halmaz? ....

7. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =?$

   ....

8. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható a síkon, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0$ és $D_2 f(a, \varphi(a)) \neq 0$. $\varphi'(a) =?$

   ....

9. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálhatók, $(a, b) \in \mathcal{D}(f)$ feltételes szélsőértékhelye f-nek a $g = 0$ feltétel mellett, $D_2 g(a, b) \neq 0$. Mi igaz az f és g parciális deriváltjaira?

   ....

10. Legyen a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a b pont egy környezetében. Milyen feltétellel következik, hogy g-nek a $g(b) = a$ egy környezetében létezik (folytonos) jobbinverze?

    ....

11. Alkalmazható-e az inverzfüggvény-tétel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$ függvényre a $(0, 0)$ pontban?

    ....

12. Milyen fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt a vonalintegrálra vonatkozó Newton-Leibniz formula bizonyítása?

    ....

Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 10.

II. RÉSZ: VIZSGAKÉRDÉSEK

Név:

A II. részre 90 perc van és 60 pontot ér. Pontozás: 24– 2, 33– 3, 42– 4, 51– 5.

1. Mondja ki és bizonyítsa egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjainak létezése és differenciálhatósága közötti kapcsolatról tanult tételt! (4+6 pont)

2. Definiálja egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény (pontbeli) deriváltjának fogalmát! Definiálja a Jacobi-mátrixot! (3+2 pont)

3. Mondja ki a Young-tételt! Ezt felhasználva részletezze, hogy hogyan dönthető el egy (kétváltozós) függvény lokális szélsőértékének létezése! (4+8 pont)

4. Mondja ki az egyváltozós implicitfüggvény-tételt! Mondja ki a Lagrange-féle multiplikátor módszerről szóló tételt! Definiálja azt a fontos fogalmat, amiről ez utóbbi tétel szól!

   (8+6+2 pont)

5. Mivel ekvivalens egy folytonosan differenciálható függvény primitív függvényének létezése? Mondja ki a tanult tételt! Bizonyítsa azt az irányt, mely a primitív függvény létezését igazolja! (5+12 pont)