Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 10.

I. rész: Beugró feladatok – megoldás

1. Mi az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja?

   Válasz: $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + g(x)$, $f, g \in C(I)$.

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Mi a pontbeli érintősíkjának normálvektora?

   Válasz: $(D_1 f(a, b), D_2 f(a, b), -1)$.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha $\exists D_1 f(a, b)$, $\exists D_2 f(a, b)$, akkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_v f(a, b)$?

   Válasz: Nem.

4. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2} =?$

   Válasz: $D_{12} f(a, b) (= D_{21} f(a, b))$. (Ld. a Young-tétel bizonyításához használt lemmát.)

5. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Definiáljuk a $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alakot!

   Válasz: $\left(\mathrm{d}^2 f(a, b)\right)(x, y) := D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + D_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{12} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22} f(a, b) \cdot y^2 = D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + 2D_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22} f(a, b) \cdot y^2$

6. Konvex-e az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ síkbeli halmaz?

   Válasz: Nem. (Pl. az $(1, 1)$ és $(-1, -1)$ pontokat összekötő szakaszon rajta van a $(0, 0)$ pont, ami nem eleme a halmaznak.)

7. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =?$

   Válasz: $D_j F(x) = \sum_{i=1}^{q} (D_i f)(g_1(x), \ldots, g_q(x)) \cdot D_j g_i(x)$. (Ld. Láncszabály.)

8. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható a síkon, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0$ és $D_2 f(a, \varphi(a)) \neq 0$. $\varphi'(a) =?$

   Válasz: $\varphi'(a) = -\frac{D_1 f(a,\varphi(a))}{D_2 f(a,\varphi(a))}$. (Ld. Implicitfüggvény-tétel.)

9. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálhatók, $(a, b) \in \mathcal{D}(f)$ feltételes szélsőértékhelye f-nek a $g = 0$ feltétel mellett, $D_2 g(a, b) \neq 0$. Mi igaz az f és g parciális deriváltjaira?

   Válasz: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : D_1 f(a, b) + \lambda D_1 g(a, b) = 0$, $D_2 f(a, b) + \lambda D_2 g(a, b) = 0$.

   (Ld. Lagrange-multiplikátorelv, $p = 2$, $q = 1$ eset.)

10. Legyen a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a b pont egy környezetében. Milyen feltétellel következik, hogy g-nek a $g(b) = a$ egy környezetében létezik (folytonos) jobbinverze?

    Válasz: $g' \neq 0$ a b egy környezetében. (Ld. Folytonos lokális inverz létezéséről szóló tétel.)

11. Alkalmazható-e az inverzfüggvény-tétel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$ függvényre a $(0, 0)$ pontban?

    Válasz: Igen.

    (Indoklás: a folytonos differenciálhatóság nyilván teljesül, másrészt az f $(0, 0)$ pontbeli Jacobi-mátrixára $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertálható.)

12. Milyen fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt a vonalintegrálra vonatkozó Newton-Leibniz formula bizonyítása?

    Válasz: Lagrange-középértéktétel.