Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. május 26.

I. rész: Beugró feladatok

Név:

Az I. részre 30 perc van. Eldöntendő kérdésre csak igen/nem-el válaszoljon! A 12-ből 9 pontot kell elérni. Csak erre az oldalra, lehetőleg a pontozott részre írjon!

1. Adja meg egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbe menti vonalintegráljára tanult képletet!

   ....

   A 2–5. feladatokban legyen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$

2. Az. 1. kérdésre adott válaszban szereplő képlet alapján határozza meg $\int_g f$-et, ha $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$!

   ....

3. Van-e f-nek primitív függvénye? Ha a válasza igen, adja meg a primitív függvényt! Ha nem, írjon egy fél mondatos indoklást, miért nem!

   ....

4. Igaz-e, hogy $D_1 f_2 = D_2 f_1$? ....

5. Alkalmazható-e f-re a primitív függvény létezéséről tanult azon tétel, mely a $D_1 f_2 = D_2 f_1$ feltételről szól?

   ....

6. Igaz-e, hogy egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet egyben lineáris is?............

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Írja fel az (a, b) pontbeli érintősíkjának egyenletét!

   ....

8. Lehet-e egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény (a, b) pont körüli 2. Taylor-polinomja $10 + 2x - y$ alakú ?

   ....

9. Igaz-e, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény esetén a $D_j f_i$ $(i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, p)$ függvények léteznek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálhatók a-ban, akkor f is differenciálható a-ban?

   ....

10. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható a síkon, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0$ és $D_2 f(a, \varphi(a)) \neq 0$. $\varphi'(a) =$?

    ....

11. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =$?

    ....

12. Melyik, az egyváltozós differenciálszámításból ismert fontos tételen múlt mind a görbe ívhosszára vonatkozó, mind az 1. kérdésben szereplő képlet bizonyítása?

    ....

Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. május 26.

II. rész: Vizsgakérdések

Név:

Az II. részre 90 perc van és 60 pontot ér. Várható pontozás: 24− 2, 33− 3, 42− 4, 51− 5.

1. (a) Mondja ki a kétszer differenciálható kétváltozós függvény lokális szélsőértékének létezéséről szóló tételt! (6 pont)

   (b) Bizonyítsa a tétel állításai közül az egyiket! (12 pont)

2. Definiálja egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény (pontbeli) deriváltjának fogalmát! Definiálja a Jacobi-mátrixot! (3+3 pont)

3. (a) Mondja ki az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény (jobb)inverzének deriváltjáról szóló állítást! (5 pont)

   (b) Vezesse le a bizonyításnak azt a II. részét, ahol kihasználtuk az $f'(0) = I$ esetről szóló állítást! (6 pont)

4. Mondja ki a folytonos függvény primitív függvénye létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel(ek)ről szóló tételt! Definiálja a tételben szereplő összes fogalmat! (6+9 pont)

5. Mondja ki a lokális szürjektivitás és a nyílt leképezés tételét! Hogyan következik ez utóbbi az előbbiből? (10 pont)