Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. május 26.

I. RÉSZ: BEUGRÓ FELADATOK – MEGOLDÁS

1. Adja meg egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbe menti vonalintegráljára tanult képletet!

   Válasz: $\int_a^b \langle f(g(t)), g'(t)\rangle \, dt$ (vagy $\int_a^b (f_1(g(t)) \cdot g_1'(t) + f_2(g(t)) \cdot g_2'(t)) \, dt$)

   A 2–5. feladatokban legyen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$

2. Az. 1. kérdésre adott válaszban szereplő képlet alapján határozza meg $\int_g f$-et, ha $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$!

   Válasz: 2π

   (Számolás: $\int_g f = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{1} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{1} \cdot \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$)

3. Van-e f-nek primitív függvénye? Ha a válasza igen, adja meg a primitív függvényt! Ha nem, írjon egy fél mondatos indoklást, miért nem!

   Válasz: Nem, mert a 2. feladatból látszik, hogy egy zárt görbén vett integrálja nem 0.

4. Igaz-e, hogy $D_1 f_2 = D_2 f_1$?

   Válasz: Igen.

   (Számolás: $D_1 f_2(x,y) = D_2 f_1(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$)

5. Alkalmazható-e f-re a primitív függvény létezéséről tanult azon tétel, mely a $D_1 f_2 = D_2 f_1$ feltételről szól?

   Válasz: Nem.

   (Indoklás: Bár a $D_1 f_2 = D_2 f_1$ feltétel teljesül, de a függvény nem csillagtartományon van értelmezve. Persze abból is látszik, hogy a 3. kérdésre nem a válasz...)

6. Igaz-e, hogy egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet egyben lineáris is?

   Válasz: Nem.

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Írja fel az (a,b) pontbeli érintősíkjának egyenletét!

   Válasz: $z = f(a,b) + D_1 f(a,b) \cdot (x-a) + D_2 f(a,b) \cdot (y-b)$.

8. Lehet-e egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény (a,b) pont körüli 2. Taylor-polinomja $10 + 2x - y$ alakú ?

   Válasz: Igen.

   (Ugyanis előfordulhat, hogy $D_{11} f(a,b) = D_{12} f(a,b) = D_{22} f(a,b) = 0$, pl., ha f maga is egy elsőfokú polinom...)

9. Igaz-e, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény esetén a $D_j f_i$ $(i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, p)$ függvények léteznek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálhatók a-ban, akkor f is differenciálható a-ban?

   Válasz: Igen.

   (Már akkor is, ha $D_j f_i$-kről csak folytonosságot teszünk fel... Ld. a megfelelő tételt.)

10. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható a síkon, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0$ és $D_2 f(a, \varphi(a)) \neq 0$. $\varphi'(a) =?$

    Válasz: $\varphi'(a) = -\frac{D_1 f(a,\varphi(a))}{D_2 f(a,\varphi(a))}$

    (Ld. implicitfüggvény-tétel.)

11. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =?$

    Válasz: $D_j F(x) = \sum_{i=1}^{q} (D_i f)(g_1(x), \ldots, g_q(x)) \cdot D_j g_i(x)$

    (Ld. láncszabály.)

12. Melyik, az egyváltozós differenciálszámításból ismert fontos tételen múlt mind a görbe ívhosszára vonatkozó, mind az 1. kérdésben szereplő képlet bizonyítása?

    Válasz: Lagrange-középértéktétel.