Analízis IV. gyakorlat

BSc matematikatanár szakirány
2010/2011. tavaszi félév

Ajánlott irodalom (sok gyakorló feladat, megoldásokkal):
Thomas-féle kalkulus 3., Typotex, 2007. (Jól használhatók az 1-2. kötetek is)
Fekete Z. - Zalay M.: *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.
Denkinger G. - Gyurkó L.: *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
Gyemidovics, B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1987.

1. Differenciálegyenletek

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes, valamint a megadott feltételeket kielégítő megoldásait!

1. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
2. $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$
3. $y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(1) = 1$
4. $y'(x) = 4x \cdot \sqrt{y(x)}$
5. $y'(x) = \lambda \cdot y(x)\,(\lambda \in \mathbb{R}), \quad y(0) = -2$
6. $(1 + \mathrm{e}^x) \cdot y'(x) = y(x) \cdot \mathrm{e}^x$
7. $y'(x) = (x + y(x))^2$
8. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}$
9. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
10. $y'(x) + \dfrac{2}{x} \cdot y(x) = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}$
11. $y'(x) + 2x \cdot y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

Megoldási módszerek:
I. Szétválasztható egyenletek: $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$. Átalakítva: $y'(x)/g(y(x)) = f(x)$ olyan intervallumon, melyen a nevező nem 0. Jelölje G az $\frac{1}{g}$, F az f egy primitív függvényét. Ekkor a fenti egyenlet: $(G \circ y)' = F'$, amiből $G(y(x)) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Ebből szerencsés esetben y ki is fejezhető.
II. Lineáris egyenletek (1. módszer): $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + g(x)$, $f, g \in C(I)$.
1. lépés: homogén egyenlet megoldása $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$. Ez egy szétválasztható változójú egyenlet. $\ln|y(x)| = F(x) + c$, ahol $F' = f$. Ebből $|y(x)| = C \cdot \mathrm{e}^{F(x)}$, $C > 0$.
2. lépés: inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)}$ alakban. Ebből

$$y'(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} \cdot f(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + b(x),$$

amiből $c'(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} = g(x)$, tehát $c'(x) = g(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)}$. Innen c-t kifejezve nyerjük az y megoldást.
II. Lineáris egyenletek (2. módszer): $y'(x) - f(x) \cdot y(x) = g(x)$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $\mathrm{e}^{-F(x)}$-szel!

$$y'(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)} - f(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)} \cdot y(x) = g(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

Innen

$$\left(y(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)}\right)' = g(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)},$$

amiből kapjuk a megoldást y-ra.

2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit!

12. $f(x,y) = x$
13. $f(x,y) = x^2y$
14. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$
15. $f(x,y) = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7$
16. $f(x,y) = \sqrt{x^2y^2 - 1}$
17. $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$
18. $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}}$
19. $f(x,y) = xy\cos x^2y^2$
20. $f(x,y) = xy\ln(x+y)$
21. $f(x,y) = \frac{1}{x\sin\frac{1}{y}}$
22. $f(x,y) = 2^{-\frac{x}{y}}$
23. $f(x,y) = \frac{x^2+3xy-1}{y^2+3xy-1}$
24. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2y^2}$
25. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$
26. $f(x,y) = \frac{x\arcsin y}{y\arccos x}$
27. $f(x,y) = x^y$

Számítsuk ki az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

28. $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + y^3$
29. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$
30. $f(x,y) = \sin x\cos y$
31. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
32. $f(x,y) = \ln\frac{x+y}{x-y}$
33. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$

Parciális derivált

I. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Az f függvény *x szerinti* vagy *első változó szerinti parciális deriváltja létezik (a,b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_1f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ vagy $f'_x(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 2. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x \mapsto f(x,b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a-ban.
II. Az f függvény *y szerinti* vagy *második változó szerinti parciális deriváltja létezik (a,b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_2f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ vagy $f'_y(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 1. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y \mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b-ben.
III. Az f függvény *első ill. második parciális deriváltfüggvénye* $D_1f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ill. $D_2f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(D_1f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_1f(x,y)\}, \quad (D_1f)(x,y) := D_1f(x,y)$$
$$\mathcal{D}(D_2f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_2f(x,y)\}, \quad (D_2f)(x,y) := D_2f(x,y)$$

IV. Az f *másodrendű parciális deriváltjait* az első ill. második parciális deriváltfüggvények további paricális deriváltjaiból nyerjük:

$$D_{11}f := D_1(D_1f),\ D_{12}f := D_1(D_2f),\ D_{21}f := D_2(D_1f),\ D_{22}f := D_2(D_2f)$$

3. Differenciálhatóság

(*Ismétlés*) Számítsuk ki az alábbi határértékeket (ha léteznek)!

34. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
35. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$
36. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
37. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
38. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$
39. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Differenciálhatók-e a $(0,0)$-ban a következő függvények?

40. $f(x,y) = xy$
41. $f(x,y) = \sqrt{xy}$
42. $f(x,y) = x^2y$
43. $f(x,y) = x^2y^2$
44. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
45. $f(x,y) = x^2+y^2$
46. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$
47. $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^6}$
48. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

Differenciálhatók-e a következő függvények az értelmezési tartományukon?

49. $f(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^3)}$
50. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
51. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Határozzuk meg az alábbi iránymenti deriváltakat!

52. $f(x,y) = (x-y)^2$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D_vf(0,0) = ?$
53. $f(x,y) = x^2+y^2$, $v = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}})$, $D_vf(3,1) = ?$
54. Mely irány mentén 0 az $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+\mathrm{e}^y$ függvény deriváltja a $(2,0)$ pontban? Mely irány mentén maximális?
55. $f(x,y) = \frac{25x^2y}{x^2+y^3}$, v az $x+3y=5$ egyenes irányvektora, $D_vf(2,1) = ?$

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban!

56. $f(x,y) = 4x^2-16x+y^2+6y+18$, $P = (2,1)$
57. $f(x,y) = x^2y+y^2+2y$, $P = (3,4)$
58. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, $P = (1,1)$
59. $f(x,y) = 2x^4y^3+3x^2y^2$, $P = (1,1)$

Differenciálhatóság. Egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, ha $\exists\ D_1f(a,b)$, $\exists\ D_2f(a,b)$, továbbá

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-D_1f(a,b)\cdot(x-a)-D_2f(a,b)\cdot(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

Állítás. Ha egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek az $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és folytonosak (a,b)-ben, akkor f differenciálható (a,b)-ben.

Iránymenti derivált. Ha egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v=(v_1,v_2)$, $|v|=1$ irány menti deriváltja $D_vf(a,b)$, továbbá

$$D_vf(a,b) = \langle (D_1f(a,b), D_2f(a,b)), (v_1,v_2)\rangle = D_1f(a,b)\cdot v_1 + D_2f(a,b)\cdot v_2$$

Érintősík. Ha egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, akkor az (a,b) pontbeli érintősíkjának egyenlete

$$z = f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b)$$

3. Differenciálhatóság, folytatás

Számítsuk ki a következő többszörös parciális deriváltakat!

60. $f(x,y) = x^3y$, $D_{12}f(x,y)$, $D_{21}f(x,y)$;

61. $f(x,y) = x \cdot \ln y$, $D_1^2 D_2 f(x,y)$;

62. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$, $D_1D_2D_3f(x,y,z)$;

63. $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y$, $D_1^m D_2^n f(x,y)$.

64. * Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}}$, $x \neq 0$. Számítsuk ki a $\Delta f = \sum_{i=1}^n D_i^2 f$értékét! ($f$ *Laplace*-át)

65. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényre nem teljesül a Young-tétel a $(0,0)$ pontban!

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban, továbbá végezzük el a megadott feladatokat!

66. $f(x,y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 6y + 18$, $P = (2,1)$

    Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(2,01; 1,02)$-re!

    Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

67. $f(x,y) = x^2y + y^2 + 2y$, $P = (3,4)$

    Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(3,09; 3,92)$-re!

    Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

68. $f(x,y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^2$, $P = (1,1)$

    Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját!

Young-tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény D_1f és D_2f parciális deriváltfüggvényei értelmezve vannak az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és *differenciálhatók* az (a,b) pontban, akkor

$$D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b).$$

Közelítés az érintősíkkal. A differenciálhatóság definíciója alapján

$$f(x,y) = f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b) + \varepsilon(x,y)\cdot|(x-a,y-b)|, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0,$$

ahol a jobb oldalon az érintősík egyenlete plusz egy 0-hoz tartó tag áll.

Kétszer differenciálhatóság. Legyen f differenciálható az $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a,b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az (a,b) pontban.

Taylor-polinom. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a,b) pontbeli 2. *Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned} T^f_{2,(a,b)}(x,y) = & f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b) + \\ & + \frac{1}{2!}\left(D_{11}f(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2D_{12}f(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b) + D_{22}f(a,b)\cdot(y-b)^2\right) \end{aligned}$$

4. Szélsőértékszámítás

Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

69. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$;
70. $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$;
71. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
72. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
73. $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$
74. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$;
75. $f(x,y) = (1-x)^2 + (2+y)^2 - 4$;
76. $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$;
77. $f(x,y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$;
78. $f(x,y) = x^2y - 3xy + 2y^4$;
79. $f(x,y) = x^3 + (y+1)^3 - 3x \cdot (y+1)$;
80. $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$;
81. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27}$;
82. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2-2xy+2y^2)}$;
83. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}$;
84. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$;
85. $f(x,y) = (3 - 2x + y) \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$;

Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

86. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!
87. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!
88. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!
89. Határozzuk meg az $f(x,y) = y \cdot (2x - 3)$ függvény minimumát és maximumát az x-tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!
90. Határozzuk meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$ függvény minimumát és maximumát a tengelyek és az $x + y = 6$ egyenletű egyenes által határolt tartományon!

2×2-es mátrix definitsége. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2×2-es mátrix. Ha $\det A > 0$ és $a > 0$, akkor A *pozitív definit*, ha $\det A > 0$ és $a < 0$, akkor A *negatív definit.* A $b = c$ (*szimmetrikus* mátrix) esetben ha $\det A = 0$, akkor A *(pozitív vagy negatív) szemidefinit*, ha $\det A < 0$, akkor A *indefinit.* (Ebben az esetben a $\det A > 0$, $a = 0$ nem fordulhat elő.)

Tétel lokális szélsőérték létezéséről. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$. Ha a

$$\begin{pmatrix} D_{11}f(a,b) & D_{21}f(a,b) \\ D_{12}f(a,b) & D_{22}f(a,b) \end{pmatrix}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix pozitív/negatív definit, akkor f-nek szigorú lokális minimuma/maximuma van (a,b)-ben. Ha a mátrix indefinit, akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke (a,b)-ben.

Tétel korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény abszolút szélsőértékéről. Legyen f az A korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai $\operatorname{int} A$ pontjaiban. Ekkor f a legkisebb és legnagyobb értékét vagy ∂A-n veszi fel, vagy $\operatorname{int} A$ egy olyan pontjában, ahol $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$.

5. Összetett és implicit függvények differenciálása

91. Adjuk meg az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(\mathrm{e}^{xyz},\sin x)$ függvény deriváltját a $P=(1,2,3)$ pontban!

92. Adjuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x^2-2xy, y\mathrm{e}^{y^2}+3x, \sin x+\tan y)$ függvény deriváltját a $P=(1,0)$ pontban!

93. Az alábbi feladatokban legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

    (a) $u(x,y)=f(x+y)$;

    (b) $u(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$;

    (c) $u(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

    (d) $u(x,y,z)=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

94. Az alábbi feladatokban legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ illetve $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

    (a) $u(x,y)=f(ax,by)$;

    (b) $u(x,y)=f(x+y,x-y)$;

    (c) $u(x,y)=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$;

    (d) $u(x,y,z)=f(x+y,z)$;

    (e) $u(x,y,z)=f\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)$;

    (f) $u(x,y,z)=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

95. Legyen y a $[-1,1]$-en értelmezett olyan függvény, mely kielégíti az $x^2+y^2=1$ egyenletet. Hány folytonos y megoldás van? Hány folytonos megoldás van, ha kikötjük, hogy $y(0)=1$? És ha $y(1)=0$?

96. Fejezzük ki az alábbi egyenletekkel meghatározott y függvények y' deriváltjait x és y segítségével!

    (a) $x^2+2xy-y^2=1$;

    (b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$;

    (c) $y-\frac{1}{2}\sin y=x$;

    (d) $x^y=y^x$, $(x\neq y)$;

    (e) $y=2x\arctan\frac{y}{x}$.

97. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(\mathrm{e}^x\cos y,\mathrm{e}^x\sin y)$. Mely $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pontokban alkalmazható f-re az inverzfüggvénytétel?

Összetett függvény differenciálása. Legyen $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ differenciálható az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^s$ differenciálható a $g(a)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f\circ g)$, $f\circ g$ differenciálható a-ban és

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a),$$

ahol a jobb oldalon a megfelelő $s\times q$ és $q\times p$ mátrixok szorzata áll.

Implicit függvény differenciálása. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy van olyan $(a,b)\in\mathcal{D}(f)$ pont, hogy $f(a,b)=0$. Tegyük fel továbbá, hogy f folytonosan differenciálható (a,b)-ben (vagyis differenciálható (a,b) egy környezetében, és a parciális deriváltjai folytonosak (a,b)-ben), és $D_2f\neq 0$ az (a,b) egy környezetében. Ekkor létezik a-nak ill. b-nek olyan $K(a)\subset\mathbb{R}$ ill. $K(b)\subset\mathbb{R}$ környezete, hogy

(i) Minden $x\in K(a)$ esetén $\exists! y(x)\in K(b)$, melyre

$$f(x,y(x))=0.$$

(ii) y differenciálható az a pontban, és

$$y'(a)=-\frac{D_1f(a,b)}{D_2f(a,b)}.$$

6. Feltételes szélsőérték

98. Oldjuk meg a 86. és 88. feladatokat feltételes szélsőérték-feladatokként!

99. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ szélsőértékeit az $x + y - 1 = 0$ egyenletű egyenesen!

100. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott K halmazokon!

   (a) $f(x, y) = x + 2y, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$;
   (b) $f(x, y) = 2xy, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
   (c) $f(x, y) = x + 8y, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 17\}$;
   (d) $f(x, y) = x^2 - 2y^2, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   (e) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
   (f) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3, \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Lagrange-féle multiplikátor módszer feltételes szélsőérték-keresésre.
Legyenek $f, g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, $p > q$. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \ldots, g_q = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban (vagyis $H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^p$ jelöléssel $a \in H$ és f-nek lokális szélsőértéke van a $H \cap \mathcal{D}(f)$ halmazon). Tegyük fel továbbá, hogy

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & D_2 g_1(a) & \ldots & D_p g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 g_q(a) & D_2 g_q(a) & \ldots & D_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ számok, hogy az

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$F'(a) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Vagyis, F p darab paricális deriváltjára felírva

$$\begin{aligned} &D_1 f(a) + \lambda_1 D_1 g_1(a) + \lambda_2 D_1 g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_1 g_q(a) = 0 \\ &D_2 f(a) + \lambda_1 D_2 g_1(a) + \lambda_2 D_2 g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_2 g_q(a) = 0 \\ &\vdots \\ &D_p f(a) + \lambda_1 D_p g_1(a) + \lambda_2 D_p g_2(a) + \cdots + \lambda_q D_p g_q(a) = 0 \end{aligned}$$

7. Ívhossz, vonalintegrál

101. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

   a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(r > 0)$ (körvonal)
   b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$ $(r > 0)$ (ciklois)
   c) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos^3 t, r\sin^3 t)$ $(r > 0)$ (asztroid)
   d) $g\colon [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (t, r\cos t, r\sin t)$ $(h, r > 0)$ (csavarvonal)

102. Legyen $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

103. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ és

   a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$ b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\cos t, \sin t)$

104. Legyen g a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

105. Legyen g a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

106. Legyen g a $(2,0)$, $(0,2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0,2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x,y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

107. Legyen $g\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (3\cos t, \sin t)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha f a következő alakú:

   a) $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ b) $f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ c) $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

108. Legyen g az origó középpontú egység sugarú körvonalnak az $(1,0)$ pontból az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontba haladó nyolcada. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha az f függvény a következő alakú:
   a) $f(x,y) = (x - 2y, x + y)$ b) $f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{(x+2y)^2}, 2 + \frac{2}{(x+2y)^2}\right)$

109. Legyen $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \left(\ln(1+t^2)\sin t, \sqrt{5t^2 + \cos \pi t}\right)$, továbbá legyen $f(x,y) = (x+y, x+y)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

110. Legyen $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$, továbbá legyen $f(x,y) = (e^{-x^2} + y, e^{-y^2} + x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Ívhossz. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható. Ekkor g ívhossza

$$s(g) = \int_a^b |g'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + \cdots + (g_p'(t))^2}\, dt.$$

Vonalintegrál. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$. Ekkor f vonalintegrálja a g görbe mentén

$$\int_g f = \int_a^b < f(g(t)), g'(t) > \, dt = \int_a^b \left(f_1(g(t)) \cdot g_1'(t) + \cdots + f_p(g(t)) \cdot g_p'(t)\right)\, dt.$$

Vonalintegrál primitív függvénnyel (Newton-Leibniz-formula). Legyen $g : [a,b] \to G \subset \mathbb{R}^p$ folytonos és rektifikálható, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, és tegyük fel, hogy f-nek létezik primitív függvénye G-n, vagyis $\exists\, F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, melyre $F' = f$ G-n $\Leftrightarrow D_i F(x) = f_i(x)$ $\forall x \in G$, $\forall i$. Ekkor

$$\int_g f = F(g(b)) - F(g(a)).$$