

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

1. FELADATSOR

2011. február 16.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

1. Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{2}, \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \dots, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{2}}}, \dots$$

sorozat szigorúan monoton növény és felülről korlátos! Számítsuk ki a határértékét!

2. Legyenek $x_1 < x_2$ tetszőleges számok. Tekintsük az

$$x_1, x_2, x_3 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_{n+1} := \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \dots$$

sorozatot! Mutassuk meg, hogy az (x_{2k+1}) sorozat szigorúan monoton növény, az (x_{2k}) sorozat szigorúan monoton fogyó, mindkettő konvergens, és határértékük

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \frac{x_1 + 2x_2}{3} !$$

3. Legyenek $0 < a_0 < b_0$, és képezzük a következő számpárokat:

$$\begin{aligned} a_1 &:= \frac{2}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}}, & b_1 &:= \frac{a_0 + b_0}{2}; \\ a_2 &:= \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}}, & b_2 &:= \frac{a_1 + b_1}{2}; \\ & & & \vdots \\ a_{n+1} &:= \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}, & b_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}; \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy az (a_n) sorozat szigorúan monoton növény, a (b_n) sorozat szigorúan monoton fogyó, mindkettő konvergens, és határértékük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{a_0 \cdot b_0} !$$

4. Számítsuk ki az

$$a_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozat határértékét!

5. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = +\infty.$$

6. Igazoljuk, hogy ha $a_n \rightarrow a$ és $a_n < a$ minden n esetén, akkor az (a_n) sorozat átrendezhető monoton növény sorozattá! Hasonlóan, ha $a_n > a$, teljesül minden n -re, akkor (a_n) monoton fogyó sorozattá rendezhető át!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

2. FELADATSOR

2011. február 23.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

Az alábbiakban e -t mint az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat határértékét definiáljuk.

7. Igazoljuk!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, \quad a > 0$$

8. Legyen

$$a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e,$$

valamint hogy

$$0 < e - a_n < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

9. Legyen

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{e}.$$

10. Legyen (a_n) az alábbi rekurzióval definiált sorozat:

$$a_1 = 1, \quad a_n = n(a_{n-1} + 1), \quad n = 2, 3, \dots$$

Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$$

határértéket!

11. Bizonyítsuk!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!e - [n!e]) = 0$$

12. Legyen

$$a_n := 3 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

3. FELADATSOR

2011. március 9.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

13. Legyenek a_1, \dots, a_n pozitív számok és $a := a_1 + \dots + a_n$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leq \frac{a^2}{4}.$$

14. Igazoljuk a *Weierstrass-egyenlőtlenségeket*:

Ha $0 < a_k < 1$, $k = 1, \dots, n$ és $a_1 + \dots + a_n < 1$, akkor

a)

$$1 + \sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n (1 + a_k) < \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n a_k};$$

b)

$$1 - \sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n (1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n a_k}.$$

15. Legyenek $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ és p_1, p_2, \dots, p_n adott nemnegatív számok úgy, hogy $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Igazoljuk:

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{1}{a_k} \right) \leq \frac{A^2}{G^2},$$

ahol $A = \frac{a_1 + a_n}{2}$ és $G = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

16. Tetszőleges n pozitív egész szám esetén jelölje $\sigma(n)$ az n összes pozitív osztójának összegét, $\tau(n)$ pedig ezen osztók számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}.$$

17. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra teljesülnek az alábbiak:

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

18. Legyen $p \in \mathbb{N}$ és $a > 0$ adva. Definiálja az (a_n) sorozat elemeit

$$a_1 > 0 \text{ (tetszőleges)} \text{ és } a_{n+1} = \frac{1}{p} \left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

4. FELADATSOR

2011. március 16.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

19. Mutassuk meg, hogy ha f korlátos $[0,1]$ -en és valamely $a, b > 1$ számokra

$$f(ax) = bf(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{a},$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

20. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\left[\frac{1}{x} \right] + \left[\frac{2}{x} \right] + \cdots + \left[\frac{k}{x} \right] \right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

21. Legyen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $a \geq 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + n) = 0.$$

Létezik-e az $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték?

22. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, és tegyük fel, hogy a $g(x) = f(x) - x$ függvény periodikus, (egy) periódusa 1. Jelölje f^n az f függvény n . iteráltját, vagyis

$$f^1 := f, \quad f^n := f \circ f^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n}$ létezik, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n}.$$

23. Legyenek $a \geq b > 0$ adva, és definiáljuk az (a_n) sorozatot mint

$$a_1 := a + b, \quad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Adjunk képletet a_n -re, és számítsuk ki $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ -et (ha létezik)!

24. Legyen $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ adva. Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + aa + \cdots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ db}}}{10^n}$$

határértéket!

25. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_p adott pozitív számok. Határozzuk meg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[p]{(n + a_1) \cdot (n + a_2) \cdots (n + a_p)} - n \right)$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

5. FELADATSOR

2011. április 6.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

26. (Segítség a 25. feladathoz.) Tegyük fel, hogy a pozitív számokból álló (a_n) sorozat 0-hoz tart, és legyen $p \geq 2$ egész! Számítsuk ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[p]{1 + a_n} - 1}{a_n}$$

27. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, periodikus függvények, T_1 és T_2 periódussal, ahol T_1/T_2 racionális. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f = g$.

28. Egyenletesen folytonos-e $[0, +\infty)$ -en az

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

függvény?

29. Legyen f folytonos $[a, b]$ -n. Bizonyítsuk be, hogy az

$$m(x) := \inf \{f(s) : s \in [a, x]\}, \quad M(x) := \sup \{f(s) : s \in [a, x]\}$$

függvények is folytonosak $[a, b]$ -n!

30. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, periodikus $T > 0$ periódussal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan x_0 , melyre

$$f(x_0 + T/2) = f(x_0).$$

31. Tegyük fel, hogy az f függvényre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$f(f(x)) = -x$$

egyenlőség. Mutassuk meg, hogy f nem lehet folytonos!

32. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely minden értékét pontosan 2-szer veszi fel?

33. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely minden értékét pontosan 3-szor veszi fel?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

6. FELADATSOR

2011. április 13.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

34. Tegyük fel, hogy az $f : (-a, a) \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ függvényre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$$

teljesül. Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$!

35. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(2x)) = 0$$

teljesül, de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ nem igaz!

36. Igazoljuk, hogy ha az előző feladat feltétele mellett teljesül, hogy létezik egy olyan φ függvény, melyre $f(x) \geq \varphi(x)$ a 0 egy kipontozott környezetében és $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$!

37. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzítve. Tegyük fel, hogy minden pozitív a számra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{x^\alpha} = g(a)$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $g(x) = c \cdot x^\alpha$ ($x \in \mathbb{R}^+$) alakú valamely $c \in \mathbb{R}$ számra!

38. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvényre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor bármely $c > 0$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1!$$

39. Igaz-e, hogy ha az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre minden $a > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a \cdot n) = 0$$

teljesül, akkor létezik az $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték?

40. Igaz-e, hogy ha az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre minden $a \geq 0$, $b > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + b \cdot n) = 0$$

teljesül, akkor létezik az $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

7. FELADATSOR

2011. május 4.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

41. Legyen $a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$ és $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n.$$

42. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget tetszőleges $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ számokra!

$$\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

43. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f \left(x \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) \right) = 0.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$!

44. Határozzuk meg azon (a_n) és (b_n) sorozatokat, melyekre az

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x, & \text{ha } x \in [2n, 2n + 1] \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ b_n + \cos \pi x, & \text{ha } x \in (2n - 1, 2n) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

függvény folytonos \mathbb{R} -en!

45. Hol folytonos az $f(x) = [x^2] \cdot \sin \pi x$ függvény?

46. Ábrázoljuk és jellemezzük folytonosság szempontjából a következő függvényt!

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0.$$

47. Legyen f folytonos $[0,1]$ -en. Igazoljuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f \left(\frac{k}{n} \right) = 0.$$

48. A differenciálszámítás felhasználása nélkül igazoljuk, hogy egy I *nyílt* intervallumon konvex függvény folytonos is! Mi a helyzet, ha I nem nyílt?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

8. FELADATSOR

2011. május 11.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

49. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Igazoljuk, hogy tetszőleges x_1, \dots, x_n (a, b) -beli pontok esetén létezik $x_0 \in (a, b)$, melyre

$$f(x_0) = \frac{1}{n} \cdot (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

50. Legyen P tetszőleges, nem azonosan 0 polinom. Igazoljuk, hogy a $|P(x)| = e^x$ egyenletnek van megoldása!

51. Legyenek $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$ valós számok. Igazoljuk, hogy a

$$P(x) = \prod_{k=0}^n (x + a_k) + 2 \prod_{k=0}^n (x + b_k), \quad x \in \mathbb{R}$$

polinom minden gyöke valós!

52. Legyen $f \in C[0,2]$ (azaz, f folytonos a $[0,2]$ intervallumon). Igazoljuk, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0,2]$ számok, melyekre

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ és } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2} (f(2) - f(0)).$$

53. Legyen $f \in C[0, n]$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, és tegyük fel, hogy $f(0) = f(n)$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0, n]$ számok, melyekre

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ és } f(x_2) = f(x_1).$$

54. Tegyük fel, hogy az f és g valós, folytonos függvények kommutálnak, vagyis

$$f(g(x)) = g(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk, hogy ha az $f(f(x)) = g(g(x))$ egyenletnek van megoldása, akkor az $f(x) = g(x)$ egyenletnek is van! Mutassuk meg egy példán, hogy f és g folytonossága nem elhagyható!

55. Legyen $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény. Igazoljuk, hogy tetszőleges rögzített T esetén létezik olyan (x_n) sorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

56. Legyen $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és szakaszonként szigorúan monoton (azaz, léteznek olyan $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ számok, hogy f szigorúan monoton a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumokon, $i = 0, \dots, n-1$). Igazoljuk, hogy f legalább egy értékét páratlan sokszor veszi fel!