Analízis gyakorló feladatok
Meteorológus MSc, 2011/2012. I. félév

1. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

(a) $a_n = \frac{1}{n}$;
(b) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
(c) $a_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$;
(d) $a_n = q^n,\ \ |q| \leq 1$;
(e) $a_n = n^k \cdot q^n,\ k \in \mathbb{N}, |q| \leq 1$;
(f) $a_n = \frac{n^k}{c^n},\ ,c > 1$;
(g) $a_n = \frac{c^n}{n!},\ c > 0$;
(h) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;
(i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
(j) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$;
(k) $a_n = \frac{2^{2n}+n^2}{5^n-n}$;
(l) $a_n = \frac{3\cdot 8^{2n}-n^{10}\cdot 3^{3n}}{n^2\cdot 5^n-2\cdot 4^{3n+1}}$.
(m) $a_n = \sqrt[n]{b_n},\ b_n \to a > 0$;
(n) $a_n = \sqrt[n+2]{2n+3}$;
(o) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3}$;
(p) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.
(r) $a_n = \sqrt[n]{5n+3}$
(s) $a_n = \sqrt[2n]{n}$
(t) $a_n = \sqrt[n]{2+\sqrt{n}}$
(u) $a_n = \sqrt[n]{10n^3+2}$
(v) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^3}$
(w) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{4^n-3^n}}$
(z) $a_n = \sqrt[2n]{\frac{n^2\cdot 2^n+3^n}{\sqrt{4^n-3^n}}}$
(x) $a_n = \sqrt[4n]{4^n+n^4+n^3}$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét (ha az létezik)!

(a) $a_n = \frac{3n+5}{7n-8}$;
(b) $a_n = \frac{50n^2+25n}{n^3+1}$;
(c) $a_n = \frac{4n^5+n-2}{8n^3+7n^2+1}$;
(d) $a_n = \frac{3^n+2^n}{4\cdot 3^n-2\cdot 2^n}$;
(e) $a_n = \frac{\frac{5}{n^4}+\frac{2}{n^2}}{\frac{8}{n^5}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}}$;
(f) $a_n = \frac{\sqrt[n]{125}-1}{\sqrt[n]{5}-1}$;
(g) $a_n = \sqrt[n]{5^n+2^n}$;
(h) $a_n = \sqrt[n]{5^n-2^n}$;
(i) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$;
(j) $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$;
(k) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$;
(l) $a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

3. Döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek, és ha igen, akkor számítsuk ki ezeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-x}$
(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
(c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-5x-3}$
(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$
(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
(f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$
(g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$
(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^2}$
(i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2+\sqrt{x}}{x^3-8}$
(j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot \operatorname{sgn} x$
(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sgn} x}{x^3}$
(l) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2}\cdot \operatorname{sgn} x$
(m) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2-2x-10$
(n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4-3x^3-6$
(o) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-3\sqrt[3]{x^2}$
(p) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x+4}{x^3+x+5}$
(q) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+9}{x+6}$
(r) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

4. A $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ azonosság felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x}$
(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$
(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
(e) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} 2x$
(f) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x\cdot \ln|x|$
(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$
(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

5. A kompozíciófüggvények deriválására vonatkozó azonosságot is felhasználva számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait!

(a1) $f(x) = \sin^5 x$ (a2) $f(x) = \sin 5x$ (a3) $f(x) = \sin x^5$

(b1) $f(x) = \sin^5 5x^5$ (b2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (b3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c1) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ (c2) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (c3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(d1) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (d2) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$ (d3) $f(x) = e^{10}\sin 5x$

(e1) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ (e2) $f(x) = \ln\sin x$ (e3) $f(x) = \ln\ln x$

(f1) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (f2) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény tulajdonságainak vizsgálata:

(a) Értelmezési tartomány és torlódási pontjainak meghatározása.
(b) A függvény zérushelyei és tengelymetszetei.
(c) Folytonosság (féloldali is), szakadási helyek.
(d) Határérték az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban ($\pm\infty$-ben is).
(e) Szélsőérték-vizsgálat (lokális és abszolút):
   i. szükséges: $f'(x_0) = 0$,
   ii. elégséges: f' az x_0-ban előjelet vált vagy $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$szigorú lokális minimum, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$szigorú lokális maximum.
(f) Monotonitási viszonyok
   i. $f' \geq 0 \Leftrightarrow$monoton nő, $f' \leq 0 \Leftrightarrow$monoton fogy,
   ii. $f' > 0 \Rightarrow$ szigorúan monoton nő, $f' < 0 \Rightarrow$ szigorúan monoton fogy.
(g) Inflexiós pontok:
   i. szükséges: $f''(x_0) = 0$,
   ii. elégséges: f'' az x_0-ban előjelet vált vagy $f'''(x_0) \neq 0$.
(h) Konvexitás-konkávitás:
   i. konvex$\Leftrightarrow$ f' monoton nő vagy $f'' \geq 0$,
   ii. konkáv$\Leftrightarrow$ f' monoton fogy vagy $f'' \leq 0$.
(i) A függvény grafikus ábrázolása.
(j) Értékkészlet meghatározása.

6. Végezzük el az alábbi függvények teljes körű vizsgálatát!

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3$; (g) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

(b) $f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$; (h) $f(x) = (x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

(c) $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$; (i) $f(x) = 2x - \operatorname{tg}x$;

(d) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$; (j) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$; (k) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

(f) $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$; (l) $f(x) = e^{-x^2}$;