Bevezető analízis 2 előadásjegyzet

Sikolya Eszter
2020/2021. tavaszi félév

2021. augusztus 4.

Tartalomjegyzék

I. fejezet

Bevezetés

A matematika minden ágának elsajátításához szükség van a logikus gondolkodás képességére. Alapfogalmakból és igaznak elfogadott összefüggésekből kiindulva egyre bonyolultabb állításokat vezetünk le pusztán a logika segítségével, és így építjük fel a matematikát. Szükség van tehát a logikai műveletek és bizonyítási módszerek pontos megfogalmazására, illetve a kiindulási alapfogalmak (többek között a halmazok, függvények és a valós számok) precíz bevezetésére. A fejezet célja ezen elengedhetetlen alapok megteremtése.

I.1. Logikai állítások, műveletek, tagadás

A következőkben néhány alapvető logikai fogalmat tárgyalunk. *Állítás*nak nevezünk egy olyan kijelentést, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Pl.: Ez az alma piros. A tábla zöld.

I.1. Definíció. *Logikai műveletek:* állításokból képeznek új állításokat. Legyen A és B egy-egy állítás.

1. *és*, jele: $\wedge$

   $A \wedge B$ pontosan akkor igaz, ha A és B is igaz.

2. *vagy*, jele: $\vee$ (fontos! megengedő vagy)

   $A \vee B$ pontosan akkor igaz, ha A vagy B igaz.

3. *nem*, jele: $\neg$

   $\neg A$ pontosan akkor igaz, ha A hamis (és fordítva).

4. *következtetés (implikáció)*, jele: $\Rightarrow$

   $A \Rightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $\neg A$ vagy B igaz.

5. *ekvivalencia*, jele: $\Leftrightarrow$

   $A \Leftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is igaz.

A logikai műveletekkel kapcsolatosan érdemes megemlíteni az ún. *de Morgan-azonosságokat*, melyek az *és*-sel, illetve *vagy*-gyal összekötött állítások tagadásáról szólnak:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B;$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B.$$

Az $A \Rightarrow B$ implikáció *tagadása* – a következtetés „hétköznapi" fogalmának megfelelően – az $A \wedge \neg B$ állítás. Az első de Morgan-azonosság alapján így

$$A \Rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee B,$$

ami megegyezik a definíciónkkal. Ebből az is látszik, hogy hamis állításból minden állítás következik. (Például a „Ha a 2 páratlan szám, akkor a fű piros." állítás igaz.)
Vannak olyan állítások, melyek változó(ka)t tartalmaznak, ezeket szokás *nyitott mondat*nak nevezni. Egy ilyen állítás igazságértéke a változó értékétől függ. Pl.: Az n szám négyzetszám. Az x valós számra $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Ha $A(x)$ nyitott mondat (x a változó), akkor ebből új állításokat nyerhetünk a $\exists$ (létezik) és $\forall$ (minden) ún. *kvantorok* segítségével:

$$(\forall x)A(x),$$

aminek a jelentése: „minden szóbajöhető x-re $A(x)$ igaz", a

$$(\exists x)A(x)$$

pedig „van olyan szóbajöhető x, amelyre $A(x)$ igaz." Például: $(\forall x)\ x^2 - 3x + 2 \geq 0$.
A fenti állítások *tagadása*:

$$\neg((\forall x)A(x)) = (\exists x)\neg A(x),$$

$$\neg((\exists x)A(x)) = (\forall x)\neg A(x).$$

A példában szereplő állítás tagadása: $(\exists x)\ x^2 - 3x + 2 < 0$.

I.2. Bizonyítási módszerek

Indirekt bizonyítás

Ennek a bizonyítási módszernek a menete, hogy feltesszük a bizonyítandó állítás ellenkezőjét, és ebből ellentmondásra jutunk. Tehát, ha a B állítást akarjuk bizonyítani, és az A egy igaz állítás (amellyel majd ellentmondásra jutunk), akkor a $\neg B \Rightarrow \neg A$ állítást látjuk be. Az implikáció definíciója alapján

$$\neg B \Rightarrow \neg A = \neg(\neg B) \vee \neg A = B \vee \neg A = A \Rightarrow B,$$

tehát valójában a B állítás következését igazoljuk az A (igaz) állításból. Példa:

I.2. Állítás. *$\sqrt{2}$ irracionális.*

Bizonyítás. 1. „Szokásos:" Indirekt tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan p, q pozitív egész számok, $q \neq 0$, továbbá p és q legnagyobb közös osztója 1, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ amiből } 2q^2 = p^2.$$

Ebből látszik, hogy p^2, így p is páros szám kell legyen, vagyis $p = 2r$, ahol r egész. Így

$$2q^2 = 4r^2, \text{ vagyis } q^2 = 2r^2,$$

tehát q is páros. Ez ellentmond annak, hogy p és q legnagyobb közös osztója 1, tehát a kiinduló feltevés hamis, így $\sqrt{2}$ irracionális.
2. „Másik:" Indirekt tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan p, q pozitív egész számok, $q \neq 0$, amelyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{I.1}$$

Tegyük fel, hogy q a lehető legkisebb ilyen pozitív egész. Mivel

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

a négyzetgyök definíciója miatt, ezért

$$0 < p - q < q. \tag{I.2}$$

Továbbá, az indirekt feltétel alapján

$$\frac{2q - p}{p - q} = \frac{2 - \frac{p}{q}}{\frac{p}{q} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

Vagyis,

$$\sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy az (I.1) előállításban q a lehető legkisebb (pozitív) nevező, mivel (I.2) szerint $0 < p - q < q$. Tehát a kiinduló feltevés hamis, így $\sqrt{2}$ irracionális. $\square$

I.3. Feladat. Indirekt módon igazoljuk, hogy ha egy m egész számra $\sqrt{m}$ nem egész, akkor $\sqrt{m}$ irracionális.

Teljes indukció

Teljes indukcióval olyan állításokat bizonyítunk, melyek *minden* n (vagy *minden elég nagy* n) természetes számra vonatkoznak. *Természetes számok*nak nevezzük a középiskolából ismert $0, 1, 2, \dots$ (egész) számokat, a belőlük képezett halmazt pedig $\mathbb{N}$-nel jelöljük. (Pontos definíciójuk a II.3. alszakaszban található.) A teljes indukció menete a következő.

1. Belátjuk az állítást $n = 0$-ra (vagy arra a legkisebb n-re, amiről az állítás szól).

2. Belátjuk a következőt: *ha* az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, *akkor* igaz $n + 1$-re is.

A természetes számok tulajdonságaiból következik, hogy a fenti két lépés bizonyításával az állítást *minden* természetes számra beláttuk. Ugyanis az 1. lépés alapján az állítás igaz $n = 0$-ra. A 2. lépésből tudjuk, hogy *ekkor* az állítás igaz $n = 0 + 1 = 1$-re is. Ismét alkalmazva a 2. lépést, tudjuk, hogy az állítás igaz $n = 1 + 1 = 2$-re. És így tovább. Ez alapján, ha lenne olyan n természetes szám, melyre nem teljesül az állítás, akkor $n-1$-re sem teljesülhetne (a 2. lépés. miatt), ugyanezért $n - 2$-re sem teljesülne, és így tovább. Végül, azt kapnánk, hogy $n = 0$-ra sem igaz az állítás, ami ellentmond annak, amit az 1. lépésben beláttunk.
A 2. lépésben szereplő feltevést szokás *indukciós feltételnek* is nevezni.

Fontos látnunk, hogy az indukció 2. lépésében *nem* azt tesszük fel, hogy az állítás *bármely* n-re igaz – hiszen akkor magának az állításnak az igaz voltát tételeznénk fel, amit pedig bizonyítani akarunk. *Csak* annyit teszünk fel, hogy az állítás *egy* (*valamelyik*) n természetes számra igaz. Ilyen n létezik, hiszen az 1. lépésben éppen ezt láttuk be.

I.4. Állítás. *Minden $n \geq 1$ természetes számra*

$$2^n > n.$$

Bizonyítás. Végrehajtjuk a teljes indukció lépéseit.

1. $n = 1$ esetén az egyenlőtlenség $2^1 > 1$ alakú. Mivel $2^1 = 2$, ezért $2 > 1$ teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, vagyis *erre* az n-re $2^n > n$. Lássuk be, hogy ekkor $n + 1$-re is igaz! A belátandó állítás tehát:

$$2^{n+1} > n + 1.$$

Mivel $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, és a feltevés szerint $2^n > n$, ezért

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n.$$

Másrészt bármilyen $n \geq 1$ egészre $2 \cdot n \geq n + 1$, tehát

$$2^{n+1} > n + 1,$$

és ezt kellett belátnunk.

$\square$

I.5. *Megjegyzés.* A fenti állítás $n = 0$-ra is teljesül (hiszen $2^0 = 1 > 0$), de az indukciós lépés csak $n \geq 1$ esetén működik.

I.6. Feladat. Teljes indukcióval igazoljuk az alábbiakat!

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

I.3. Fontos egyenlőségek, egyenlőtlenségek

A továbbiakban a középiskolából jól ismert valós számok halmazát jelölje $\mathbb{R}$. (A valós számokat a II. fejezetben pontosabban is bevezetjük.)

I.7. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség)**.** *Minden $n \geq 1$ természetes szám és $a \geq -1$, $a \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $a = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 1$ esetén a belátandó állítás

   $$1 + a \geq 1 + a,$$

   ami tetszőleges a-ra igaz.

2. Tegyük fel most, hogy az állítás *valamelyik* $n \geq 1$ természetes számra igaz! Lássuk be, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n + 1$-re is teljesül, vagyis

   $$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Ebből, kihasználva, hogy $1 + a \geq 0$ (mivel $a \geq -1$), kapjuk, hogy

$$(1+a) \cdot (1+a)^n \geq (1+a) \cdot (1+n \cdot a) = 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2. \qquad \text{(I.3)}$$

Tudjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} = (1+a) \cdot (1+a)^n, \qquad \text{(I.4)}$$

így összevetve az (I.3) és az (I.4) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a, \qquad \text{(I.5)}$$

amit látni akartunk.

Hátravan még az egyenlőség teljesülésének esete. Világos, hogy $n = 1$, ill. $a = 0$ esetén egyenlőség teljesül. Ha azt tesszük fel, hogy egyenlőség van, és $n > 1$, akkor a belátott egyenlőtlenséget felhasználva

$$1+n\cdot a = (1+a)^n = (1+a)\cdot(1+a)^{n-1} \geq (1+a)\cdot(1+(n-1)\cdot a) = 1+n\cdot a+(n-1)\cdot a^2.$$

Innen $(n-1) \cdot a^2 \leq 0$, tehát ($n > 1$ miatt) $a = 0$. $\square$

A Bernoulli-egyenlőtlenségnek van egy általánosított alakja is, ami az előbbihez hasonló módon, teljes indukcióval igazolható.

I.8. Tétel (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség)**.** *Minden $n \geq 1$ természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq -1$ azonos előjelű valós számok esetén*

$$(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdots (1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Az alábbiakban emlékeztetőül kimondjuk a kombinatorikából ismeretes Binomiális tételt. A bizonyítása szintén teljes indukcióval történik, de most nem részletezzük.

I.9. Tétel (Binomiális tétel)**.** *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n, \qquad \text{(I.6)}$$

másképp írva:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Itt $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$, $0! = 1$ jelöléssel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ 0 \leq k \leq n.$$

I.10. *Megjegyzés.* A Binomiális tételből $a \geq 0$ esetén következik a Bernoulli-egyenlőtlenség. Ugyanis, az $(1+a)^n$ kifejezést az (I.6) egyenlőség szerint kifejtve ($b = 1$) minden tag nagyobb vagy egyenlő, mint 0, így a jobb oldalt csökkentjük, ha csak az első két tagot hagyjuk meg, vagyis

$$(1+a)^n \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a = 1 + na,$$

ami épp a kívánt Bernoulli-egyenlőtlenség.

I.11. Tétel (Számtani–mértani–harmonikus közép közti egyenlőtlenség)**.**
Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *tetszőleges számok* ($n \geq 1$)*. Ekkor*

$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{(számtani közép)},$$

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \qquad \text{(mértani/geometriai közép)},$$

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \text{(harmonikus közép)}$$

jelöléssel

$$H_n \leq G_n \leq A_n. \tag{I.7}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$*.*

I.12. *Megjegyzés.* A *közép* elnevezés onnan ered, hogy mindhárom mennyiség a megfelelő a_i számok legkisebb és legnagyobb értéke között van, vagyis

$$\min_{i=1,\ldots,n} a_i \leq H_n \leq G_n \leq A_n \leq \max_{i=1,\ldots,n} a_i.$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$ esetben triviális. Tegyük fel most, hogy valamely n-re és tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számokra

$$A_n \geq G_n.$$

Legyenek adva $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} > 0$ számok, és tegyük fel, hogy úgy vannak sorba rendezve, hogy a_{n+1} az (egyik) legnagyobb közülük (világos, hogy az állítás nem függ a számok sorrendjétől). Be kell látnunk, hogy $A_{n+1} \geq G_{n+1}$, vagyis mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emelve

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \tag{I.8}$$

ami a belátandó állítással ekvivalens. Az alábbi átalakítást végezzük el:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n\cdot A_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(\frac{(n+1)\cdot A_n+a_{n+1}-A_n}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(A_n+\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned}\tag{I.9}$$

Mivel a_{n+1} az (egyik) legnagyobb szám, ezért könnyen látható, hogy $a_{n+1}-A_n \geq 0$. Az I.7. Bernoulli-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(A_n+\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}\right)^{n+1} &= A_n^{n+1}\left(1+\frac{a_{n+1}-A_n}{A_n\cdot(n+1)}\right)^{n+1}\\ &\geq A_n^{n+1}\left(1+(n+1)\cdot\frac{a_{n+1}-A_n}{A_n\cdot(n+1)}\right)\\ &= A_n^{n+1}+A_n^n\cdot(a_{n+1}-A_n)=A_n^n\cdot a_{n+1}.\end{aligned}\tag{I.10}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$A_n^n\cdot a_{n+1}\geq G_n^n\cdot a_{n+1}=a_1\cdot\dots\cdot a_n\cdot a_{n+1},$$

tehát (I.9) és (I.10) alapján

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}\geq a_1\cdot\dots\cdot a_n\cdot a_{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó (I.8) egyenlőtlenség.
A mértani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség könnyen adódik az előbb bizonyított mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből. Alkalmazzuk ez utóbbit az $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ számok reciprokaira, ebből

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot\dots\cdot a_n}}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n},$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Ha $a_1 = \cdots = a_n$, akkor az (I.7) egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek. Belátjuk, hogy

$$G_n = A_n \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n,$$

a harmonikus közép esete hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel indirekt módon, hogy $A_n = G_n$, de például $a_1 \neq a_2$. Cseréljük ki a_1-t és a_2-t is $\frac{a_1+a_2}{2}$-re, az $a_3, \ldots, a_n$ számokat hagyjuk változatlanul! Ekkor könnyen látható, hogy az

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$$

számok számtani közepének értéke változatlanul A_n. Másrészt

$$a_1 \cdot a_2 < \frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \Longleftrightarrow 0 < (a_1 - a_2)^2$$

teljesül, mivel $a_1 \neq a_2$. Így

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} = A_n = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \cdots a_n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$ számok mértani közepe nagyobb, mint a számtani közepe, ami ellentmondás. □

A fenti egyenlőtlenségláncolathoz kapcsolható még egy: a négyzetes középről szóló. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok $(n \geq 1)$ *négyzetes közepe:*

$$Q_n := \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

I.13. Tétel. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számok $(n \geq 1)$ közepei között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

Bizonyítás. Világos, hogy a fentiek alapján elég az utolsó egyenlőtlenséget bizonyítani. Négyzetre emelve mindkét oldalt, igazolandó, hogy

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

Mindkét oldalt n^2-tel megszorozva és átrendezve kapjuk, hogy

$$0 \leq (n-1)\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) + 2\sum_{i<j} a_i a_j = \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2,$$

ami nyilván teljesül. □

I.4. Halmazok

A *halmaz* és az $\in$ (tartalmazás) fogalmát alapfogalomnak tekintjük.
Egy halmazt akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat", a „szép lány", az „elég nagy szám" vagy a „kicsi pozitív szám" nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezért ezekről nem kérdezzük, hogy benne vannak-e valamilyen halmazban vagy hogy alkotnak-e halmazt.)[1]
Legyen A halmaz, x egy jól definiált dolog. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelöli. Ha x nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.
A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például

$$A := \{a, b, c, d\}.$$

Itt nem számít, hogy egy elemet hányszor sorolunk fel (tehát, például az $\{a, a, b, b, b, c, d\}$ ugyanazt az A halmazt definiálja, mint az $\{a, b, c, d\}$). Más módon egy értelmes tulajdonsággal adhatjuk meg a halmazt, például

$$B := \{x \colon x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}.$$

A B halmaz megadásánál használni fogjuk az alábbi (kevésbé precíz) felírást is:

$$B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}.$$

I.14. Definíció. Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy A *része* vagy *részhalmaza* a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.

I.15. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A halmaz *egyenlő* a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.

Fontos, hogy az analízisben a fenti $\subset$ halmazok közötti ún. reláció jelenthet egyenlőséget is. Könnyen meggondolható az alábbi

I.16. Állítás. *Legyen A és B halmaz. Ekkor $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.*

A következőkben definiálunk néhány műveletet, melyekkel halmazokból újabb halmazokhoz juthatunk.

I.17. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A és B *egyesítése (uniója)* az a halmaz, amelyre

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

[1] Vigyázat! A halmazelméletben vannak buktatók is, melyekre itt nem térünk ki. Például, az „összes halmazok halmaza" vagy a „legkisebb, 100 szónál kevesebbel nem definiálható valós szám" nem létezik.

Az A és B *metszete (közös része)* az a halmaz, amelyre

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Az A és B *különbsége* az a halmaz, amelyre

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen x dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

I.18. Definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen jól definiálható dolog sem eleme, *üres halmaz*nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.

I.19. Definíció. Legyen H halmaz és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az A halmaz (H-ra vonatkozó) *komplementerén* az

$$A^c := H \setminus A$$

halmazt értjük. (A komplementerhalmaz jelölésére sosem fogjuk az $\bar{A}$-t használni, mert ez a későbbiekben mást fog jelenteni!).

Itt fontos szerepe van a H ún. alaphalmaznak is. Legyen például $A := [0,1]$ zárt intervallum. Ha $H = \mathbb{R}$, akkor $A^c = H \setminus A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ nyílt intervallumok uniója. Ha azonban $H = [0,2]$, akkor $A^c = H \setminus A = (1, 2]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum.
A halmazműveletek tulajdonságaival kapcsolatosan az alábbi két állítást fogalmazzuk meg.

I.20. Állítás. *Tetszőleges A, B, C halmazok esetén*

1. $A \cup B = B \cup A$ *és* $A \cap B = B \cap A$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *és* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *és* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

I.21. Állítás (De Morgan-azonosságok)**.** *Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{és} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

II. fejezet

Valós számok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket „rendezünk”. Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők.

II.1. Műveletek és rendezés

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy adva van egy összeadásnak nevezett $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: *Testaxiómák*

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)
a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadás egységeleme: nullelem)
a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $b \in \mathbb{R}$ *ellentett* elem, hogy $a + b = 0$.
m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)
m2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociativitás)
m3. van olyan $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzás egységeleme)
m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $b \in \mathbb{R}$ *reciprok* elem, hogy $a \cdot b = 1$.
d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.
Az axiómákból könnyen igazolható, hogy a 0 és 1 egységelemek egyértelműek.

II.1. Állítás (Ellentett és reciprok egyértelműsége)**.** *Minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz egyértelműen létezik b ellentett elem, amelyre $a + b = 0$.*
Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen létezik $b \in \mathbb{R}$ reciprok elem, amelyre $a \cdot b = 1$.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$ adva. Tegyük fel, hogy b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekre $a + b_1 = 0$ és $a + b_2 = 0$. Ekkor

$$b_1 \overset{\text{a1,a3}}{=} 0 + b_1 \overset{\text{felt.}}{=} (b_2 + a) + b_1 \overset{\text{a2}}{=} b_2 + (a + b_1) \overset{\text{felt.}}{=} b_2 + 0 \overset{\text{a3}}{=} b_2.$$

Az $=$ jelek felett azt jelöltük, hogy melyik axiómának a következményei.
A reciprok egyértelműsége hasonlóan látható. □

Jelölés: Az $a \in \mathbb{R}$ egyértelműen létező ellentettjét $-a$-val, az $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ egyértelműen létező reciprokát $\frac{1}{a}$-val jelöljük.

II.2. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$a - b \coloneqq a + (-b).$$

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor

$$\frac{a}{b} \coloneqq a \cdot \frac{1}{b}.$$

II.3. Állítás. *Minden $a \in \mathbb{R}$ valós szám esetén*

$$a \cdot 0 = 0 \quad \textit{és} \quad (-1) \cdot a = -a.$$

Bizonyítás. Az 1. egyenlőséghez:

$$a \cdot 0 \overset{\text{a3}}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{\text{d}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Mindkét oldalból $a \cdot 0$-t levonva kapjuk, hogy $a \cdot 0 - a \cdot 0 \overset{\text{a4}}{=} 0$, és

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \overset{\text{a2}}{=} a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0) \overset{\text{a4}}{=} a \cdot 0 + 0 \overset{\text{a3}}{=} a \cdot 0,$$

ezért

$$0 = a \cdot 0. \tag{II.1}$$

Most azt kell belátnunk, hogy $(-1) \cdot a$ az a szám ellentettje, vagyis $a + ((-1) \cdot a) = 0$.

$$a + ((-1) \cdot a) \overset{\text{m3}}{=} 1 \cdot a + ((-1) \cdot a) \overset{\text{d}}{=} (1 + (-1)) \cdot a \overset{\text{a4}}{=} 0 \cdot a = 0$$

az (II.1) miatt. □

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) ún. rendezési reláció, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

Rendezési axiómák
r1. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$ (reflexív),
r2. ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetrikus),
r3. ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitív),
r4. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$ (teljes),
r5. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a + c \leq b + c$.
r6. minden olyan esetben, amikor $0 \leq b$ és $0 \leq c$, akkor $0 \leq b \cdot c$.
Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b$, $a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk. Megjegyezzük, hogy r4.⇒r1.

Az testaxiómák és a rendezési axiómák alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos „szabály”.

II.4. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x *abszolút értéke*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.
2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon$. Ekkor $(x \leq \varepsilon \text{ és } -x \leq \varepsilon) \iff |x| \leq \varepsilon$.
3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a + b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség)
4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ezek az állítások könnyen igazolhatóak. A 4. bizonyítását megmutatjuk. Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a - b|. \tag{II.2}$$

Mivel a és b szerepe felcserélhető, ezért

$$-(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b| \tag{II.3}$$

is teljesül. Az (II.2) és az (II.3) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

II.5. Állítás.
$$0 < 1.$$

Bizonyítás. Az m3. axióma miatt $0 \neq 1$ teljesül. Az r4. axióma miatt $0 < 1$ vagy $1 < 0$ valamelyike teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $1 < 0$. Ekkor az r5. axióma alapján, mindkét oldalhoz -1-et adva,

$$1 + (-1) \stackrel{\text{a4}}{=} 0 < -1 \stackrel{\text{a3}}{=} 0 + (-1)$$

Alkalmazva az r6. axiómát $b = -1$ és $c = -1$ szereposztással kapjuk, hogy $0 \leq (-1) \cdot (-1) = 1$, a II.3. Állítás alapján. Ez ellentmond a kiindulási $1 < 0$ feltételnek, ami így hamis. Tehát $0 < 1$ igaz. □

A valós számok felépítéséhez a testaxiómákon és a rendezési axiómákon kívül további szabályokra (axiómákra) lesz szükségünk. Mielőtt azonban ezekre rátérnénk, bevezetjük az intervallum és a környezet fogalmát.

II.2. Intervallumok és környezetek

II.6. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I *intervallum*, ha bármely $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x < x_2$ esetén $x \in I$.

II.7. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.*

- $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$*;* $(0, +\infty) \eqqcolon \mathbb{R}^+$
- $(-\infty, a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$*;* $(-\infty, 0) \eqqcolon \mathbb{R}^-$
- $(-\infty, +\infty) \coloneqq \mathbb{R}$

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

Megemlítjük, hogy az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ ún. *elfajuló* intervallumok.

II.8. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, r > 0$. Az *a pont r sugarú környezetén* a

$$K_r(a) := (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy a $K(a) \subset \mathbb{R}$ halmaz az *a pont egy környezete*, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $K(a) = K_r(a)$.

II.3. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az $\mathbb{R}$ egy nevezetes részhalmazát. Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre

- $0 \in \mathbb{N}$
- bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in \mathbb{N}$
- bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \neq 0$ (a 0 az „első” elem)
- abból, hogy (a) $S \subset \mathbb{N}$, (b) $0 \in S$, (c) bármely $n \in S$ esetén $n + 1 \in S$ következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)

Az $\mathbb{R}$-nek az ilyen $\mathbb{N}$ részhalmazát a *természetes számok halmazá*nak nevezzük.

Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}$ az *egész számok halmaza*

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} : \text{ van olyan } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0, \text{ hogy } x = \frac{p}{q}\}$ a *racionális számok halmaza*

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az *irracionális számok halmaza.*

Az $\mathbb{N}$ segítségével a testaxiómák és a rendezési axiómák mellé az alábbi harmadik követelményt illesztjük az $\mathbb{R}$-hez.

Arkhimédészi axióma: Bármely $x \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$.

Könnyen látható, hogy ezen axiómával ekvivalens az alábbi:

Arkhimédészi axióma – változat: Bármely $y > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < y$.

Az Arkhimédészi axióma egy fontos következménye, hogy minden (nemelfajuló) intervallumban van racionális szám. Ez valami olyasmit jelent, hogy a racionális számok *„sűrűn”* helyezkednek el a számegyenesen.

II.9. Állítás. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tetszőleges valós számok. Ekkor az (a, b) nyílt intervallumban van racionális és irracionális szám, vagyis*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ és } (a, b) \cap \mathbb{Q}^* \neq \emptyset.$$

Sőt, minden intervallumban van tetszőlegesen nagy nevezőjű *racionális szám.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $0 < a < b$, a többi eset hasonlóan meggondolható. A racionális eset bizonyításának alapgondolata szemléletesen a következő. Az Arkhimédészi axióma biztosítja, hogy az a és b számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$\frac{1}{q} < b - a.$$

Ezért „$\frac{1}{q}$-asával lépdelve a számegyenesen” eljutunk az (a, b) nyílt intervallumba. Nézzük részletesen!
Az Arkhimédészi axióma szerint az

$$\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$$

számhoz található olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{1}{b-a} < q. \tag{II.4}$$

Másrészt, szintén az Arkhimédészi axióma miatt a $q \cdot a \in \mathbb{R}$ valós számhoz választhatunk olyan *legkisebb* $p \in \mathbb{N}$ természetes számot, melyre $q \cdot a < p$, vagyis amelyre

$$q \cdot a < p \leq q \cdot a + 1 \tag{II.5}$$

teljesül. Az (II.4) átalakításával kapjuk, hogy

$$q \cdot a + 1 < q \cdot b,$$

így az (II.5) egyenlőtlenségből

$$q \cdot a < p < q \cdot b \iff a < \frac{p}{q} < b$$

teljesül. Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\frac{p}{q} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

Ebből a bizonyításból az is következik, hogy az (a, b) intervallumban tetszőlegesen nagy nevezőjű racionális szám is található. Ugyanis,az (II.4) egyenlőtlenségben q tetszőlegesen nagynak választható.

Az irracionális eset nagyon hasonlóan igazolható. Az Arkhimédészi axióma biztosítja, hogy az a és b számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$\frac{\sqrt{2}}{q} < b - a.$$

Ezért, szemléletesen, „$\frac{\sqrt{2}}{q}$-asával lépdelve a számegyenesen” eljutunk az (a, b) nyílt intervallumba. A bizonyítás részletezését az olvasóra bízzuk. $\square$

Az Arkhimédészi axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az $\mathbb{R}$. Ugyanis belátható, hogy $\mathbb{Q}$, a racionális számok halmaza kielégíti az összes fenti axiómát – tehát ezek az axiómák nem biztosítják az irracionális számok létezését (a számegyenesen maradtak „lyukak”). A Cantor-axiómát feltéve azonban már következni fog az irracionális számok létezése is.

Cantor-axióma: Legyenek $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ún. egymásba skatulyázott, nem üres zárt intervallumok, vagyis

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots,$$

azaz

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Ekkor ezen intervallumoknak van közös pontja, vagyis

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a_0, b_0] \cap [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \cap \ldots \neq \emptyset.$$

Ezentúl az $\mathbb{R}$ azt a struktúrát jelöli, ami kielégíti a fentiekben definiált testaxiómákat, rendezési axiómákat, az Arkhimédészi és a Cantor-axiómát.

II.4. Négyzetgyök, n-edik gyök és a valós számok hatványai

Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor ismert, hogy

$$a^1 := a,\ a^2 := a \cdot a,\ a^3 := a^2 \cdot a,\ \ldots,\ a^n := a^{n-1} \cdot a,\ \ldots$$

Ha $a \neq 0$, akkor $a^0 := 1$.

Kérdés: adott $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ esetén van-e olyan $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ amelyre $b^2 = a$?

Válasz: A valós számok axiómáiból következik, hogy van, sőt b egyértelmű!

Ennek igazolásához először egy segédállítást bizonyítunk.

II.10. Lemma. *Legyen $b, c \in \mathbb{R}$, $0 \leq b$, $0 \leq c$. Ekkor $b \leq c$ pontosan akkor teljesül, ha $b^2 \leq c^2$.*

Bizonyítás. Legyen először $0 \leq b \leq c$. Az r6. axiómából következik, hogy a $b \leq c$ egyenlőtlenség mindkét oldalát a $b \geq 0$ számmal megszorozva

$$b^2 \leq b \cdot c.$$

Másrészt, a $b \leq c$ egyenlőtlenség mindkét oldalát a $c \geq 0$ számmal megszorozva

$$b \cdot c \leq c^2.$$

A fenti két egyenlőtlenségből, az r3. tranzitivitás alapján következik, hogy

$$b^2 \leq c^2.$$

Fordítva, legyen $b^2 \leq c^2$. Be kell látnunk, hogy $b \leq c$. Az r4. axióma miatt $b \leq c$ vagy $c \leq b$ valamelyike teljesül. Ha $b = c$, akkor kész vagyunk. Tegyük fel indirekt, hogy $c \leq b$, $c \neq b$, vagyis $c < b$. Ekkor az előbb bizonyítottak alapján $c^2 < b^2$, ami ellentmond a kiindulási feltételnek. Tehát, $b \leq c$. □

II.11. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $b \in \mathbb{R}$, $0 \leq b$, amelyre*

$$b^2 = a.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz definiálunk $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ egymásba skatulyázott, nem üres zárt intervallumokat, amelyeknek a Cantor-axióma miatt létező metszete egy megfelelő b szám lesz.
0. Először igazoljuk, hogy ha van olyen $0 \leq b$ szám, amelyre $b^2 = a$, akkor $b \leq a + 1$. Ugyanis,

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \geq a^2 + a + 1 \geq a = b^2. \tag{II.6}$$

A II.10. Lemma szerint $0 \leq a, b$ miatt ebből következik, hogy $b \leq a + 1$.
1. Legyen $a_0 := 0$, $b_0 := a + 1$. Ekkor $a_0 \leq b_0$ és (II.6) alapján

$$a_0^2 \leq a \leq b_0^2. \tag{II.7}$$

2. Most tekintsük az $\frac{a_0+b_0}{2}$ számot! Két eset van. Ha $a \leq \left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2$, akkor

$$a_1 := a_0, \qquad b_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ha $\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2 < a$, akkor

$$a_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}, \qquad b_1 := b_0.$$

Így igaz lesz, hogy $a_1 \leq b_1$ és
$$a_1^2 \leq a \leq b_1^2. \tag{II.8}$$
3. Az eljárást folytatva, az n-dik lépésben tekintjük $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ számot.
Ha $a \leq \left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)^2$, akkor
$$a_n := a_{n-1}, \qquad b_n := \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}.$$
Ha $\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)^2 < a$, akkor
$$a_n := \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \qquad b_n := b_{n-1}.$$
Így igaz lesz, hogy $a_n \leq b_n$ és
$$a_n^2 \leq a \leq b_n^2. \tag{II.9}$$
4. Világos, hogy a konstrukció alapján $[a_n, b_n] \neq \emptyset$,
$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$
A Cantor-axióma szerint ezen intervallumoknak van közös pontja, legyen b egy ilyen szám, vagyis
$$b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]. \tag{II.10}$$
5. Most belátjuk, hogy b egyértelmű, vagyis hogy ha b és b^* is (II.10) tulajdonságú, akkor $b = b^*$. Az intervallumok konstrukciója miatt az intervallumok hosszára
$$b_n - a_n \leq \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} \leq \frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \leq \frac{b_0-a_0}{2^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Az I.4. Állításban beláttuk, hogy $2^n > n$ minden $n \geq 1$ természetes számra, tehát
$$b_n - a_n < \frac{b_0-a_0}{n}, \text{ ha } n \geq 1.$$
Ha b és b^*, $b \neq b^*$ is az intervallumok metszetében lenne, akkor nyilván
$$|b - b^*| \leq b_n - a_n < \frac{b_0-a_0}{n}, \text{ ha } n \geq 1,$$
vagyis
$$n < \frac{b_0-a_0}{|b-b^*|}$$

kellene teljesüljön minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Ez azonban ellentmond az Archimédészi axiómának, tehát $b = b^*$.
6. Most belátjuk, hogy $b^2 = a$. Az (II.10) miatt $0 \le a_n \le b \le b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. A II.10. Lemma szerint ebből következik, hogy

$$a_n^2 \le b^2 \le b_n^2 \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Továbbá (II.7), (II.8),..., (II.9),... miatt

$$a_n^2 \le a \le b_n^2 \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Ezekből az 5. ponthoz hasonló meggondolással kapjuk, hogy $b^2 = a$ (nem részletezzük). $\square$

Ha $a \in \mathbb{R}, 0 \le a$, akkor $\sqrt{a}$ jelentse azt a 0-nál nagyobb vagy egyenlő számot, amelynek négyzete a, azaz $0 \le \sqrt{a}, (\sqrt{a})^2 = a$. Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

II.12. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Ekkor $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa a.

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

II.13. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \le a$, $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a 0-nál nagyobb vagy egyenlő számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa a.

A gyökök létezése és egyértelműsége hasonlóan következik, mint a II.11. Tételben, de itt nem részletezzük.
Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő (vagyis, ha n páratlan, akkor $a \in \mathbb{R}$, ha pedig n páros, akkor $a \ge 0$), akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

II.14. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

II.15. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

II.16. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.

Látható, hogy ezzel a definícióláncolattal egy $a \in \mathbb{R}^+$ pozitív szám bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

2. $a, b \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,

3. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

A későbbiekben definiálni fogjuk egy szám irracionális kitevős hatványát is.

II.5. Végtelen tizedestörtek

Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám középiskolából ismert végtelen tizedestört alakja

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots, \quad x_0 \in \mathbb{Z},\ x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, n \geq 1. \tag{II.11}$$

Ez alatt valami olyasmit értünk, hogy x előáll az alábbi végtelen összegként:

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \cdots .$$

Jelenleg azonban nincs még elég eszközünk, hogy a végtelen összeget pontos definiálhassuk. Ezért meg kell mondanunk, hogy hogyan értjük az (II.11) előállítást. Tegyük fel a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy $x \geq 0$ (az $x < 0$ eset hasonlóan meggondolható).

II.17. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ szám *végtelen tizedestört alakja*

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots, \quad x_0 \in \mathbb{N},\ x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, n \geq 1, \tag{II.12}$$

ha $x_0 \leq x \leq x_0 + 1$,

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1 + 1}{10^1}, \quad x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2 + 1}{10^2},$$

és így tovább. Vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n + 1}{10^n}.$$

Kérdések:

1. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, hogyan kapjuk meg az/egy előállítását?

2. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, egyértelmű-e az előállítása?

3. Ha adva van egy végtelen tizedestört, akkor létezik-e egyértelműen olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, aminek ez az előállítása?

A 1. kérdésre a válasz az, hogy sokféle előállítás lehetséges, mi az alábbiakban mutatunk ezek közül egy szokásos konstrukciót.

Legyen $x_0 \in \mathbb{N}$ egy olyan természetes szám, amelyre

$$x_0 \leq x < x_0 + 1 \tag{II.13}$$

teljesül. Ilyen az Archimédészi axióma miatt egyértelműen létezik: legyen n_0 a lehető legkisebb természetes szám, ami nagyobb x-nél, tehát $x < n_0$, és válasszuk $x_0 := n_0 - 1$. Könnyen látható, hogy ez teljesíti az (II.13) egyenlőtlenségeket.

Legyen x_1 az szám a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmazból, amelyre

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} \leq x < x_0 + \frac{x_1 + 1}{10^1} \tag{II.14}$$

teljesül. Ilyen azért létezik, mert az (II.13) egyenlőtlenségek minden oldalát 10-el szorozva és átrendezve kapjuk, hogy

$$0 \leq 10x - 10x_0 < 10.$$

Az Archimédészi axióma miatt (egyértelműen) létezik olyan $n_1 \in \{1, \dots, 10\}$ legkisebb természetes szám, amelyre $10x - 10x_0 < n_1$. Legyen $x_1 := n_1 - 1$. Ekkor $x_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, továbbá

$$x_1 \leq 10x - 10x_0 < x_1 + 1.$$

Ezen egyenlőtlenségek minden oldalát 10-el osztva és átrendezve kapjuk, hogy (II.14) teljesül x_1-re.

Tovább folytatva, az n-edik lépésben legyen x_n az az egyértelműen létező szám a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmazból, amelyre

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \leq x < x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \dots + \frac{x_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{II.15}$$

Az ilyen tulajdonságú x_n létezése a fentiekkel analóg módon igazolható.
A II.17. Definíció alapján tehát

$$x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

valóban x (egy) végtelen tizedestört alakja.

A 2. kérdésre adott válasz nemleges, hiszen például

$$0,999\ldots = 1,000\ldots$$

Könnyen meggondolható, hogy az általunk fent leírt előállítás az 1 számra az $1,000\ldots$ alakot eredményezi. Ha azonban az (II.15) képletben az egyenlőség- és egyenlőtlenségjelet felcseréljük, vagyis azt követeljük meg, hogy

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \dots + \frac{x_n}{10^n} < x \leq x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \dots + \frac{x_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

legyen, akkor az 1-et $0,999\ldots$ alakban kapnánk meg.

A 3. kérdésre a válasz a *Cantor-axiómán* múlik. Legyen $x_0, x_1x_2x_3\ldots$ egy adott végtelen tizedestört, $x_0 \geq 0$, és definiálja

$$a_n := x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}, \quad b_n := x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n + 1}{10^n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy az $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva és nem üresek, ezért a Cantor-axióma szerint

$$\exists\, x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Mivel $a_n \leq x \leq b_n$ minden n-re, ezért a II.17. Definíció alapján az x szám (egy) végtelen tizedestört előállítása valóban $x_0, x_1x_2x_3\ldots$.

Azt kell megmutatnunk, hogy ha az $x^* \in \mathbb{R}$ számnak ugyanez a végtelen tizedestört-előállítása, akkor $x = x^*$. A II.17. Definícióból következik, hogy a fenti jelöléssel minden n-re $x^* \in [a_n, b_n]$ kell teljesüljön. Így

$$|x - x^*| \leq b_n - a_n < \frac{1}{10^n} \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Világos, hogy $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{2^n}$, és az I.4. Állítás alapján $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, ha $n \geq 1$. Tehát

$$|x - x^*| < \frac{1}{n} \text{ minden } n \geq 1 \text{ esetén.}$$

Hasonló meggondolással, mint a II.11. Tétel 5. pontjában, adódik, hogy $x = x^*$.

II.6. Felső és alsó határ

II.18. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy A *felülről korlátos* számhalmaz, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq k$. Az ilyen k az A halmaz egyik *felső korlátja.*

II.19. Példa. Minden véges halmaz felülről korlátos. Az $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ felülről nem korlátos (ezt biztosítja az Archimédészi axióma).
Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ intervallumok felülről korlátosak.

Világos, hogy ha k_1 az A felülről korlátos halmaz egy felső korlátja és k_2 olyan valós szám, amelyre $k_1 \leq k_2$, akkor k_2 is felső korlátja A-nak (a rendezés tranzitivitása miatt). Tehát a $[k_1, \infty)$ intervallum minden eleme felső korlátja A-nak – így legnagyobb felső korlátja nem létezik. Kérdés, hogy vajon *legkisebb* felső korlátja létezik-e.

II.20. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{k \in \mathbb{R} : k \text{ felső korlátja az A halmaznak}\}$$

halmazt. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

1. $\alpha \in B$ (α is felső korlátja az A halmaznak);
2. bármely $k \in B$ felső korlátra $\alpha \leq k$,

akkor az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz *felső határá*nak vagy *szuprémumá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \text{ („az } A \text{ halmaz szuprémuma”)}$$

II.21. *Megjegyzés.* A $\sup A$ definícióbeli két tulajdonsága ekvivalens az alábbi két tulajdonsággal:

1. bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$;
2. bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

Bizonyítás. Az 1. tulajdonság definíció szerint azt jelenti, hogy $\sup A$ felső korlátja A-nak. Könnyen látható, hogy a 2. tulajdonság azt jelenti, hogy bármely $0 < \varepsilon$ esetén $(\sup A) - \varepsilon$ NEM felső korlátja A-nak. Tehát, $\sup A$-nál kisebb szám nem lehet felső korlátja A-nak, vagyis minden k felső korlátra $\sup A \leq k$. □

Feladatok megoldása során, ha egy $\alpha \in \mathbb{R}$ számról azt akarjuk igazolni, hogy egy adott A halmaz szuprémuma, gyakran ezt a két tulajdonságot mutatjuk meg.

II.22. Definíció. Ha $\sup A \in A$, akkor azt mondjuk, hogy $\sup A$ az A halmaz *maximuma.*

II.23. *Megjegyzés.* Vigyázat! Nem minden esetben igaz, hogy a szuprémum egyben maximum is – azaz, előfordulhat, hogy $\sup A \notin A$. Ez áll fenn például bármely $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra az (a, b) nyílt intervallum esetében: ekkor

$$\sup(a, b) = b, \qquad b \notin (a, b).$$

A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy a felülről korlátos halmazoknak létezik-e szuprémuma.

II.24. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Ekkor A-nak létezik felső határa, vagyis szuprémuma.*

Bizonyítás. A bizonyítási eljárás lényege nagyon hasonló, mint a II.11. Tétel esetében. Adott A, a feltételeket kielégítő halmaz esetén intervallumfelezési eljárással megkonstruáljuk nem üres, zárt, egymásba skatulyázott intervallumoknak olyan sorozatát, amelyeknek a Cantor-axióma szerinti metszetében lévő egyetlen pont éppen $\sup A$ lesz.

0. Mivel $A \neq \emptyset$, ezért létezik $a \in A$ szám. Világos, hogy $a - 1$ nem lehet felső korlátja A-nak, hiszen $a - 1 < a$. Legyen $a_0 := a - 1$.
Mivel A felülről korlátos, ezért létezik felső korlátja – legyen b egy felső korlát, és $b_0 := b$. Ekkor $a_0 \leq b_0$, továbbá a_0 nem felső korlátja, b_0 felső korlátja A-nak.

1. Tekintsük az $\frac{a_0+b_0}{2}$ számot! Két eset van. Ha $\frac{a_0+b_0}{2}$ felső korlátja A-nak, akkor

$$a_1 := a_0, \qquad b_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ha $\frac{a_0+b_0}{2}$ *nem* felső korlátja A-nak, akkor

$$a_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}, \qquad b_1 := b_0.$$

Így igaz lesz, hogy $a_1 \leq b_1$, továbbá a_1 nem felső korlátja, b_1 felső korlátja A-nak.

2. Az eljárást folytatva, az n-dik lépésben tekintjük az $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ számot.
Ha $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ felső korlátja A-nak, akkor

$$a_n := a_{n-1}, \qquad b_n := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Ha $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ *nem* felső korlátja A-nak, akkor

$$a_n := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n := b_{n-1}.$$

Így igaz lesz, hogy $a_n \leq b_n$, továbbá a_n nem felső korlátja, b_n felső korlátja A-nak.

3. Világos, hogy a konstrukció alapján $[a_n, b_n] \neq \emptyset$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

A Cantor-axióma szerint ezen intervallumoknak van közös pontja, legyen α egy ilyen szám, vagyis

$$\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]. \tag{II.16}$$

A II.11. Tétel bizonyításának 5. pontjával analóg módon belátható, hogy a metszetben egyetlen pont van, tehát α egyértelmű.

4.* Azt kell még meggondolni, hogy $\alpha = \sup A$. A szuprémum mindkét tulajdonságát indirekt lehet igazolni.

- Ha α nem lenne felső korlátja A-nak, akkor létezne $a' \in A$, amelyre $a' > \alpha$ teljesülne. Mivel a konstrukció alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén b_n felső korlátja A-nak, ezért $a' \leq b_n$ minden n-re. Továbbá, $a_n \leq \alpha < a'$, $n \in \mathbb{N}$, így
$$a' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$
ami ellentmond annak, hogy $a' > \alpha$, vagyis $a' \neq \alpha$.
- Ha létezne α-nál kisebb felső korlátja A-nak, b', amire tehát $b' < \alpha$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b'$ teljesülne (mivel a_n nem felső korlátja A-nak). Másrészt, $b' < \alpha \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, így
$$b' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$
ami ellentmond annak, hogy $b' < \alpha$, vagyis $b' \neq \alpha$.

$\square$

II.25. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ felülről *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint
$$\sup A := +\infty.$$
Másrészt
$$\sup \emptyset := -\infty.$$

II.26. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $B \subset A$, akkor $\sup B \leq \sup A$!

A fentiekhez hasonló módon bevezetjük a számhalmazok alulról korlátosságának és alsó határának fogalmát is.

II.27. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy A *alulról korlátos*, ha van olyan $\ell \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$ esetén $\ell \leq a$. Az ℓ az A halmaz egyik *alsó korlátja.*

II.28. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ alulról korlátos számhalmaz. Az A alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz *alsó határa* vagy *infimuma.* Ennek létezése a II.24. Tételből, vagyis a felső határ létezéséből következik. Az A halmaz alsó határát
$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$
jelölje.

A A halmaz infimumát hasonlóan jellemezhetjük, mint tettük a szupremum esetén. Vagyis,

1. bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$

2. bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

Ha $\inf A \in A$, akkor $\inf A$ az A halmaz *minimuma*.

II.29. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ alulról *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\inf A := -\infty.$$

Másrészt

$$\inf \emptyset := +\infty.$$

II.30. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $B \subset A$, akkor $\inf B \geq \inf A$!

II.31. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazról azt mondjuk, hogy *korlátos*, ha felülről és alulról is korlátos.

A fentiek alapján ha $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ korlátos halmaz, akkor van alsó és felső határa is.

III. fejezet

Sorozatok

A sorozatok igen egyszerű függvények, és hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak.

III.1. A sorozat fogalma, sorozat véges határértéke

III.1. Definíció. A *sorozat* a pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvény.

Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N}^+ \to H$, akkor H-beli sorozatról beszélünk. Ha például H a valós számok halmaza, akkor *számsorozat*ról; ha H bizonyos jelek halmaza, akkor jelsorozatról; ha H az intervallumok halmaza, akkor intervallum-sorozatról beszélünk.
Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $a(n)$ helyett az a_n jelölést használjuk, és a_n-et a sorozat *n-edik tagjának* nevezzük. Magát az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb

$$(a_n)$$

jelöléssel helyettesítjük, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jelöléssel hangsúlyozzuk, hogy számsorozatról van szó. Például az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az

$$\left(\frac{1}{n}\right)$$

sorozatról beszélünk.
Néha a tömör (a_n) helyett az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használhatjuk. Például az (n^2) helyett $1,\ 4,\ 9, \ldots, n^2, \ldots$ sorozatról beszélünk.

Sorozatok megadása

1. Képlettel: pl.

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

2. Rekurzív képlettel: pl.

   (a) Fibonacci-sorozat: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, ha $n \geq 2$.

   (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, ha $n \geq 1$.

3. (Szöveges) definícióval: pl. $a_n :=$ n-edik prímszám

Most a sorozatok egy nagyon lényeges tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n, \ldots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergensnek fogjuk nevezni. Például, a konstans sorozat és az $(\frac{1}{n})$ sorozat konvergens. Pontosabban:

III.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat *konvergens*, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (ε-tól függő) küszöbindex, melyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

másképp

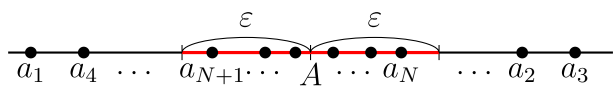
$$a_n \in K_\varepsilon(A), \tag{III.1}$$

ahol $K_\varepsilon(A)$ az A szám ε sugarú környezete, amit a II.8. Definícióban definiáltunk. Ha van ilyen A szám, akkor ez a sorozat *határértéke*, és jelölje

$$\lim a_n = A \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ vagy } a_n \to A.$$

Ha az (a_n) sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens.*

A fenti definícióban nagyon fontos, hogy az (III.1) (vagy az ezzel ekvivalens állítások) *bármely* pozitív ε-ra teljesülnek, de *különböző* ε-okra *más-más* küszöbindextől kezdve.



III.1. ábra. Az $a_n \to A$ szemléletes jelentése

III.3. *Megjegyzés.* A konvergencia III.2. Definíciójával ekvivalens a következő definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat *konvergens*, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az A szám ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja található – vagyis, véges sok $n \in \mathbb{N}$ indexet kivéve $a_n \in K_\varepsilon(A)$ teljesül.

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy adott $\varepsilon > 0$ szám és (ε-tól függő) $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex esetén az az állítás, hogy

$$a_n \in K_\varepsilon(A), \text{ ha } n \geq N,$$

ekvivalens azzal, hogy

$$a_n \notin K_\varepsilon(A) \text{ legfeljebb az } n = 1, 2, \ldots, N-1 \text{ indexekre teljesülhet.}$$

Ebből következik a két definíció ekvivalenciája. □

III.4. *Megjegyzés.* Könnyen látható a definíció alapján, hogy

$$a_n \to A \iff (a_n - A) \to 0 \iff |a_n - A| \to 0.$$

III.5. Állítás.

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\frac{1}{\varepsilon}$ számhoz az *Arkhimédészi axióma* alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \iff \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ha pedig $n \geq N$, akkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

azaz

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Tehát egy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan N küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén a sorozat tagjai legfeljebb ε-al térnek el 0-tól, ezért a sorozat 0-hoz tart. □

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozatához jutunk. Alkalmazva az I.4. Állítást, a fentivel analóg módon belátható, hogy

$$\frac{1}{2^n} \to 0,$$

azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.

III.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *nullsorozat*, ha $\lim a_n$ létezik és 0-val egyenlő.

III.7. Definíció. Legyen (a_n) olyan sorozat, melyre $a_n = a$ minden n-re. Ekkor (a_n)-et *konstans sorozat*nak nevezzük. Ha $a_n = a$ csak egy indextől kezdve teljesül, akkor (a_n) *kvázikonstans* sorozat.

A definíció alapján triviális, hogy ha (a_n) kvázikonstans (vagy konstans) a sorozat, akkor $a_n \to a$.

III.8. Állítás. *A sorozathatárérték egyértelmű. Tehát nem lehet, hogy $a_n \to A$ és $a_n \to B$ teljesülnek, de $A \neq B$.*

Bizonyítás. Ha $A \neq B$, akkor $\varepsilon := |A - B|/2$ jelöléssel könnyen látható, hogy $K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$, vagyis

$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \cap (B - \varepsilon, B + \varepsilon) = \emptyset.$$

A sorozathatárérték definíciója alapján azonban elég nagy n-re $a_n \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B)$ teljesül, ami nem lehetséges. □

III.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *korlátos*, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$, azaz a sorozat tagjaiból alkotott $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ halmaz korlátos. Továbbá, azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *felülről (alulról) korlátos*, ha a sorozat tagjaiból alkotott $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ halmaz felülről (alulról) korlátos.

Vigyázat! Amikor a sorozat tagjaiból alkotott $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ halmazról beszélünk, akkor természetesen ugyanúgy, ahogy annak idején megállapodtunk, ez alatt ugyanazt a halmazt értjük, mint amikor a halmaz minden elemét csak egyszer soroljuk fel - továbbá, a felsorolás sorrendje sem számít. Így ha például (a_n) konstans sorozat, tehát $a_n = a$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, akkor $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a\}$ egy elemű halmaz. Éppen ezért nem használjuk a sorozatok jelölésére az $\{a_n\}$ szimbólumot, mert megtévesztő lehet. A sorozatot mint függvényt (az egyszerűség kedvéért) (a_n)-nel jelöljük, a tagjaiból alkott halmazt pedig

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \text{ vagy } \{a_n \colon n \in \mathbb{N}^+\}$$

jelöli.

III.10. Állítás. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor (a_n) korlátos.*

Bizonyítás. A definíció szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz is van olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |A-1|, |A+1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$. □

Igaz-e vajon a fenti állítás megfordítása, vagyis hogy minden korlátos sorozat konvergens is? Tekintsük az $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ képlettel megadott sorozatot! A sorozat tagjai

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

alakúak. Mivel $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}^+$, ezért (a_n) korlátos. Másrészt könnyen meggondolható, hogy mivel a sorozat tagjai között tetszőleges index után előfordul -1 és 1 is, (a_n) nem lehet konvergens. Ezt legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy ha az A szám határértéke volna a sorozatnak, akkor $\varepsilon = 1/2$-hez is kellene léteznie olyan N küszöbindexnek, melyre

$$a_n \in (A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2}), \quad n \geq N.$$

Ez azonban nem lehetséges, mert tetszőleges N után szerepel a sorozat tagjai között -1 és 1 is, melyek egyszerre nem lehetnek benne egy 1 hosszúságú nyílt intervallumban.
Igaz azonban az alábbi tétel, amihez szükségünk lesz a monoton növő/fogyó sorozat fogalmára.

III.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *(szigorúan) monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1}).$$

Azt mondjuk, hogy (a_n) *(szigorúan) monoton fogyó* vagy *monoton csökkenő*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}).$$

III.12. Tétel. *Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor (a_n) konvergens, mégpedig*

1. *monoton növő (a_n) esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \sup_n a_n \in \mathbb{R}$;*

2. *monoton fogyó (a_n) esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \inf\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \inf_n a_n \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növő és korlátos. A felső határ létezéséről szóló II.24. Tétel miatt a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak létezik (véges) felső határa, ez legyen

$$\alpha := \sup_n a_n.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$. Ehhez legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. A halmaz felső határának tulajdonságai alapján

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \alpha$, és

2. $\exists N \in \mathbb{N}^+ : \; a_N > \alpha - \varepsilon$.

Belátjuk, hogy a 2. pont alapján létező N jó küszöbindex ε-hoz. Legyen $n \geq N$ tetszőleges, és becsüljük meg a sorozat n-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy a sorozat monoton növő. Így $n \geq N$ esetén $a_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ teljesül. Mivel ε tetszőleges volt, ebből következik, hogy $a_n \to \alpha$.
Monoton fogyó sorozat esetén hasonlóan igazolható, hogy a sorozat a tagjaiból alkotott halmaz infimumához tart. □

III.13. Példa. Fontos nevezetes sorozat az

$$(e_n) := \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right). \tag{III.2}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat monoton növő és korlátos!
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{n \text{ darab}} \leq \left(\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat korlátos is: bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Ugyanis szintén a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik a következő:

$$\frac{1}{4}\cdot e_n = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}}_{n \text{ darab}} \leq \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

III.14. Definíció. Az $(e_n) := ((1+\frac{1}{n})^n)$ sorozatról láttuk a III.13. Példában, hogy monoton növő és korlátos, ezért a III.12. Tétel alapján konvergens. A határértékét e-vel jelöljük, ez az ún. *Euler-féle szám*, tehát

$$\mathrm{e} := \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A III.13. Példában meggondoltak alapján

$$2 \leq \mathrm{e} \leq 4.$$

Később azt is látni fogjuk, hogy e irracionális.

III.2. Műveletek konvergens sorozatokkal

Mivel a sorozatok speciális függvények, a rajtuk értelmezett műveleteket a függvények közötti műveletekkel azonos módon definiáljuk.

III.15. Definíció. Ha (a_n) sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ is teljesül, akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy mi a konvergens sorozatok közötti műveletek és a sorozatok határértékei közötti kapcsolat. Először 0-hoz tartó sorozatokra mondunk ki állításokat, majd ezek segítségével bizonyítjuk az általános esetre vonatkozó állításokat.

III.16. Állítás. *Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, akkor $a_n + b_n \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik N_1, hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $b_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik N_2, hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $|a_n + b_n| < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Tehát $a_n + b_n \to 0$. $\square$

III.17. Állítás. *Ha $a_n \to 0$ és (c_n) korlátos, akkor $a_n c_n \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. A feltétel szerint létezik olyan $K > 0$ szám, amelyre $|c_n| \leq K$, $n \in \mathbb{N}^+$ teljesül. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\frac{\varepsilon}{K} > 0$-hoz létezik N, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Legyen $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$|a_n c_n| = |a_n| \cdot |c_n| \leq |a_n| \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $a_n c_n \to 0$. $\square$

III.18. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*

Bizonyítás. Nyilván
$$(\lambda a_n - \lambda A) = \lambda \cdot (a_n - A).$$
Mivel $a_n - A \to 0$, a λ-val való szorzás pedig tulajdonképpen a konstans (λ) korlátos sorozattal való szorzás, ezért a III.17. Állítás alapján
$$(\lambda) \cdot (a_n - A) \to 0 \Longleftrightarrow \lambda a_n \to \lambda A.$$
□

III.19. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy
$$(a_n + b_n - (A + B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B).$$
Mivel $a_n - A \to 0$ és $b_n - B \to 0$, ezért a III.16. Állítás alapján az összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + b_n \to A + B$. □

III.20. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással
$$(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB) = (a_n - A) \cdot (b_n) + A \cdot (b_n - B).$$
Mivel $a_n - A \to 0$, és (b_n) konvergens, ezért korlátos, így a III.17. Állítás szerint a szorzatuk 0-hoz tart. Hasonlóan, $b_n - B \to 0$, és a konstans (A) korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. A III.16. Állítás szerint két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \to AB$. □

III.21. Állítás. *Ha $b_n \to B$, $B \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{B}$.*

Bizonyítás. A $B \neq 0$ feltételből adódik, hogy $b_n \neq 0$ elég nagy n-re (hiszen elég nagy n-re b_n a B szám $|B|/2$ sugarú környezetében van, ami nem tartalmazza a 0-t). Legyen $B > 0$ (a $B < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor
$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$
Tudjuk, hogy $b_n - B \to 0$. Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel $b_n \to B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz létezik N, hogy minden $n \geq N$ esetén
$$\frac{B}{2} = B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2},$$

amiből
$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$
Ez azt jelenti, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel a III.17. Állítás alapján 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, ezért $\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) \to 0$, tehát $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$. □

III.22. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, $B \neq 0$, akkor* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{A}{B}$.

Bizonyítás. Mivel
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right),$$
az előző két tétel szerint
$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B},$$
tehát $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$. □

III.23. Állítás. *Ha $a_n \to A$, akkor $|a_n| \to |A|$.*

Bizonyítás. Az abszolút érték tulajdonságai alapján az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:
$$0 \leq ||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$
Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}^+$, amelyre $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, ezért a fentiek szerint ekkor
$$||a_n| - |A|| < \varepsilon$$
is teljesül. Ezzel az állítást beláttuk. □

III.24. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy az előbbi állítás megfordítása általában nem igaz. Kivéve, ha $a_n \to 0$, mert ekkor
$$a_n \to 0 \Longleftrightarrow |a_n| \to 0.$$
Ennek segítségével igazolható pl. az $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat 0-hoz tartása is, hiszen
$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$
a III.5. Állítás alapján.

III.25. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $p \in \mathbb{N}^+$, akkor $a_n^p \to A^p$.*

Bizonyítás. Rögtön adódik a III.20. Állítás p-szeri alkalmazásából $(b_n) = (a_n)$-re. □

III.26. Állítás. *Ha $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n} \to \sqrt[q]{A}$.*

Bizonyítás. Ha $A = 0$, akkor legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A konvergencia definíciója alapján a ε^q pozitív számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy ha $n \geq N$, akkor $a_n < \varepsilon^q$, amiből $\sqrt[q]{a_n} < \varepsilon$. Tehát $\sqrt[q]{a_n} \to 0$ teljesül.
Ha $A \neq 0$, akkor a hatványozás azonosságaiból könnyen meggondolható az alábbi:

$$\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{A}\right| = |a_n - A| \cdot \frac{1}{(\sqrt[q]{a_n})^{q-1} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-2} \cdot \sqrt[q]{A} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-3} \cdot (\sqrt[q]{A})^2 + \cdots + (\sqrt[q]{A})^{q-1}}.$$

Itt a második tényező q darab pozitív korlátos sorozat összegének a reciproka, tehát korlátos. Ezt megszorozva egy 0-hoz tartó sorozattal 0-hoz tartó sorozatot kapunk, ami a bizonyítandó állítás. □

III.27. Következmény. *Ha $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $p, q \in \mathbb{N}^+$, akkor*

$$a_n^{\frac{p}{q}} \to A^{\frac{p}{q}}.$$

Bizonyítás. Azonnal adódik az előző két állításból és a $\frac{p}{q}$-adik hatvány definíciójából. □

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

III.28. Példa.

$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

hiszen $\frac{1}{n} \to 0$, ezért a számlálóban $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. A nevezőben $2 + \frac{1}{n} \to 2 + 0 \neq 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

A fejezet hátralévő részében a véges határérték és a rendezés kapcsolatáról lesz szó.

III.29. Tétel (Rendőr-elv)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez léteznek olyan (x_n) és (y_n) sorozatok, hogy*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \leq a_n \leq y_n$, és*

2. *$\lim x_n = \lim y_n =: A$.*

Ekkor (a_n) konvergens, és $\lim a_n = A$.

Bizonyítás. Legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. Mivel $x_n \to A$, ezért ε-hoz létezik N_1, hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Mivel $y_n \to A$, ezért ε-hoz létezik N_2, hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$A - \varepsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < A + \varepsilon,$$

amiből $|a_n - A| < \varepsilon$. Tehát ε-hoz N jó küszöbindex, így következik az állítás. $\square$

III.30. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a III.29. Tétel 1. feltételében elegendő lett volna megkövetelni, hogy $x_n \leq a_n \leq y_n$ elég nagy n-re teljesül.

A Rendőr-elv szerint tehát két konvergens sorozat „között" elhelyezkedő sorozat is konvergens, és ugyanoda tart, mint a közrefogó sorozatok. Ha csak két sorozatunk van, melyek tagjai között ugyanaz a reláció áll fenn, akkor a következő állítás igazolható.

III.31. Állítás. *Legyen* (x_n) *és* (a_n) *olyan konvergens sorozat, melyekre*

$$x_n \leq a_n \text{ minden (elég nagy) } n\text{-re.}$$

Ekkor $\lim x_n \leq \lim a_n$.

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. $\square$

III.32. *Megjegyzés.* Vigyázat! Abból, hogy $x_n < a_n$ minden (elég nagy) n-re, szintén csak annyi következik, hogy $\lim x_n \leq \lim a_n$. Például, ha $x_n = 0$ és $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, akkor ugyan $x_n < a_n$ minden n-re, de $\lim x_n = \lim a_n = 0$.

III.3. Sorozatok végtelen határértéke

Emlékeztetőül idézzük fel, hogy egy (a_n) sorozatot *divergens*nek neveztünk, ha nem konvergens. Másképp: ha $\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex után $\exists n \geq N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Divergens sorozat például az (n^2) és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az (n^2) sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni.

III.33. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $+\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n > K$, vagyis $a_n \in (K, +\infty)$.
Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor azt jelölje

$$\lim a_n = +\infty \text{ vagy } a_n \to +\infty.$$

Ez a definíció arról szól, hogy a sorozat elég nagy küszöbindextől kezdve „közel van" a $+\infty$-hez. Ezért könnyen látható, hogy elég lett volna a feltételt pozitív K számokra megkövetelni. Hasonlóan definiáljuk a $-\infty$-hez tartás fogalmát.

III.34. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $-\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n < K$, vagyis $a_n \in (-\infty, K)$.
Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor azt jelölje

$$\lim a_n = -\infty \text{ vagy } a_n \to -\infty.$$

Könnyen meggondolható, hogy a definíciót elég lett volna negatív K számokra megkövetelni.
Példaként: $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.

III.35. *Megjegyzés.* A fenti definíciókból következik, hogy a sorozathatárérték itt is egyértelmű, hasonlóan a véges határérték esetéhez.

Megmutatjuk, hogy egy $+\infty$-hez tartó sorozat alulról, egy $-\infty$-hez tartó pedig felülről korlátos.

III.36. Állítás. *Ha $a_n \to +\infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, ha pedig $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor $K = 1$-hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > 1$. Legyen

$$L := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 1\}.$$

Világos, hogy $a_n \geq L$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Az $a_n \to -\infty$ eset hasonlóan látható. □

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

III.37. Állítás. *Minden monoton sorozatnak van határértéke.*

Bizonyítás. Ha a monoton sorozat korlátos, akkor a III.12. Tétel alapján tudjuk, hogy konvergens. Ha (a_n) nem korlátos, akkor monoton növő esetben ez csak úgy lehet, hogy felülről nem korlátos. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel (a_n)-nek K nem felső korlátja, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_N > K$. No de $n \geq N$ esetén – a monoton növést kihasználva – kapjuk, hogy

$$a_n \geq a_N > K.$$

Mivel K tetszőleges volt, ebből következik, hogy $a_n \to +\infty$.
A monoton fogyó eset hasonlóan bizonyítható, ekkor a sorozat $-\infty$-hez tart. □

A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, szorzata, hányadosa) nagy körültekintést igényelnek. Az alábbiakban bizonyítani fogjuk a következő, táblázatba rendezett eredményeket sorozatok összegének, szorzatának ill. hányadosának határértékeiről.

Jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{III.3}$$

az ún. *kibővített számegyenest*, tehát a valós számokhoz hozzávéve a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat. Fontos, hogy ez utóbbiak valóban szimbólumok, és nem valós számok!

III.38. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, ahol $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, ahol $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	0	0	0	?	?
$B < 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, ahol $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	0	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	?	?	?	?	?
$B < 0$	A/B	0	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	0	0	0	?	?
$B = -\infty$	0	0	0	?	?

Ahol a táblázatokban ? szerepel, ott többfajta eshetőség van – ezeket a gyakorlatokon részletezzük. Álljon itt néhány kiragadott példa!

III.39. Példa. Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to +\infty$ (vagy $b_n \to -\infty$), akkor az $a_n \cdot b_n$ sorozat határértéke bármi lehet, és az is előfordulhat, hogy a szorzatsorozatnak nem létezik határértéke. Például, előre rögzített $A \in \mathbb{R}$ számhoz tartó sorozatot kapunk az

$$a_n = \frac{A}{n}, \quad b_n = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

választással, hiszen ekkor $a_n \cdot b_n = A$ a konstans A sorozat.
Ha

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $a_n \cdot b_n = n \to +\infty$, ha pedig

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $a_n \cdot b_n = -n \to -\infty$.
A szorzatsorozatnak nem létezik hatáértéke például az alábbi esetben:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

mivel $a_n \cdot b_n = (-1)^n$.

A következő tételben kimondjuk, majd igazoljuk a fenti táblázatokban szereplő eredményeket.

III.40. Tétel (Végtelen határérték és műveletek)**.** *Az alábbiak teljesülnek az (a_n) és (b_n) sorozatokra.*

1. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n) alulról korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to +\infty$.*
2. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*
3. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*
4. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n) felülről korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to -\infty$.*
5. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*
6. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*

7. *Ha* $|a_n| \to +\infty$, *akkor* $\frac{1}{a_n} \to 0$.

8. *Ha* $a_n \to 0$ *és* $a_n > 0$ *egy indextől kezdve, akkor* $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

   Ha $a_n \to 0$ *és* $a_n < 0$ *egy indextől kezdve, akkor* $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

Bizonyítás. 1. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $K - L$-hez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > K - L$. Tehát $n \geq N$ esetén

$$a_n + b_n > K - L + L = K,$$

amiből következik az állítás.
2. Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ szám és $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért K/L-hez létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $a_n > K/L$. Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n \geq N$ indexekre

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{L} \cdot L = K,$$

ahol kihasználtuk, hogy $K/L > 0$ és $L > 0$. Így következik az állítás.
A $3 - 6$. állítások a fentiekkel analóg módon láthatók be.
7. Legyen $|a_n| \to +\infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $1/\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n| > 1/\varepsilon$. Ebből

$$\frac{1}{|a_n|} = \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Ezért $1/a_n \to 0$.
8. Az előzőhöz hasonlóan látható. □

A $\overline{\mathbb{R}}$ halmazbeli műveleteket az alapján szokták definiálni, ami a fenti táblázatokban a megfelelő határértékkel rendelkező sorozatok közötti műveletekre érvényes.
A végtelen határérték és a rendezés kapcsolatáról szól az alábbi állítás.

III.41. Állítás.

1. *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* (b_n) *olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve* $b_n \geq a_n$, *akkor* $b_n \to +\infty$.

2. *Ha* $a_n \to -\infty$ *és* (b_n) *olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve* $b_n \leq a_n$, *akkor* $b_n \to -\infty$.

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

III.4. Nevezetes sorozathatárértékek

1.

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás. Ld. a III.5. Állítást. □

2.

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből (ld. az I.11. Tételt) $n \geq 2$-re

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \big(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2}\big)^{1/n} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 1 + 0 = 1.$$

Innen a III.29. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

3.

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Bizonyítás. Az Arkhimédészi axiómából következik, hogy $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < a < N$. Ezért $n \geq N$ esetén

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a < N \leq n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Innen a 2. pont és a III.29. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

4.

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \nexists, & q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $0 < q < 1$, akkor könnyen látható, hogy (q^n) (szigorúan) monoton fogyó, tehát a III.12. Tétel szerint az infimumához tart. Ha $a > 0$ infimuma volna, akkor $q^n \geq a$, vagyis $q \geq \sqrt[n]{a}$ volna, amiből határértéket véve és alkalmazva a 3. pontot, $q \geq 1$ – ez ellentmondás. Tehát $a = 0$, és így $q^n \to 0$.

Ha $-1 < q \leq 0$, akkor az előbbiek szerint a sorozat abszolút értéke, így maga a sorozat is 0-hoz tart. Ha $q > 1$, akkor $(\frac{1}{q})^n = \frac{1}{q^n} \to 0$, és ebből $q^n \to +\infty$, mivel a sorozat pozitív tagú, ld. a III.40. Tétel 8. pontját. A $q = -1$ esetet korábban tárgyaltuk. Ha $q < -1$, akkor a (q^n) sorozatnak van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata, amiből a III.47. Állítás alapján következik, hogy (q^n)-nek nincs határértéke. □

III.42. Állítás.

(a) Ha a pozitív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, $A \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(b) Ha az (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, ahol $|A| < 1$, akkor $\lim a_n^n = 0$.

(c) Ha az (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, ahol $A > 1$ vagy $A = +\infty$, akkor $\lim a_n^n = +\infty$.

Bizonyítás. (a) Mivel $a_n \to A$, ahol $A > 0$, ezért $\varepsilon = \frac{A}{2}$-höz is létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < a_n < A + \frac{A}{2} = \frac{3A}{2}.$$

Ebből

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}}, \qquad \text{ha } n \geq N.$$

Így a Nevezetes sorozathatárértékek 3. pontja és a III.29. Tétel (Rendőr-elv) alapján következik az állítás.

(b) Tekintsük az $A \in [0, 1)$ esetet (az $A \in (-1, 0)$ eset hasonlóan meggondolható). Mivel $0 \leq A < 1$, ezért létezik olyan $q \in (0, 1)$ szám, amelyre $A < q < 1$ teljesül. Legyen $\varepsilon = \min\{q - A, A + q\} > 0$. A konvergencia definíciója miatt ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, tehát

$$-1 < -q \leq A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \leq q < 1.$$

Ebből $|a_n| < q$, így $|a_n|^n = |a_n^n| < q^n$, vagyis

$$-q^n < a_n^n < q^n, \qquad \text{ha } n \geq N.$$

A Nevezetes sorozathatárértékek 4. pontját és a III.29. Tételt (Rendőr-elvet) alkalmazva kapjuk az állítást.

(c) Mivel $A > 1$ vagy $A = +\infty$, ezért létezik olyan $p > 1$ szám, amelyre $1 < p < A$ teljesül. Az A-hoz tartás definíciója szerint létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$p < a_n.$$

Ebből

$$p^n < a_n^n, \qquad \text{ha } n \geq N.$$

Így a III.41. Állítás és a Nevezetes határértékek 4. pontja alapján következik az állítás.

□

III.43. *Megjegyzés.* Mi a helyzet, ha a fenti állítás (a) pontjában (a_n) határértéke 0 vagy végtelen? És mi a helyzet, ha a (b) pontban $A = 1$? Példák:

(i) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ekkor $a_n \to 0$, és $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$. Ekkor $a_n \to 0$, és $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

(iii) $a_n = n$. Ekkor $a_n \to +\infty$, és $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$.

(iv) $a_n = n^n$. Ekkor $a_n \to +\infty$, és $\sqrt[n]{a_n} = n \to +\infty$.

(v) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Ekkor $a_n \to 1$, és $a_n^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$.

(vi) $a_n = \sqrt[n]{n}$. Ekkor $a_n \to 1$, és $a_n^n = n \to +\infty$.

(vii) $a_n = \sqrt[n]{2}$. Ekkor $a_n \to 1$, és $a_n^n = 2 \to 2$.

5.

$$\lim \left(n^k \cdot q^n\right) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z},\ |q| < 1).$$

Bizonyítás. Elég belátni a $0 < q < 1$ esetre. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q \to 1 \cdot q = q < 1,$$

ezért elég nagy n-re $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, így

$$a_{n+1} < a_n.$$

Tehát a sorozat egy indextől kezdve (szigorúan) monoton fogyó, így az infimumához tart. Ha $a > 0$ alsó korlátja lenne, akkor

$$a \leq n^k \cdot q^n \iff \sqrt[n]{a} \leq (\sqrt[n]{n})^k \cdot q$$

volna, amiből határértéket véve, és alkalmazva a 2. és 3. pontot

$$1 \leq q$$

következne – ez ellentmondás. □

6.
$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z},\ a > 1).$$

Bizonyítás. Azonnal adódik az előzőből $q = \frac{1}{a}$ jelöléssel. □

7.
$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1).$$

Bizonyítás. Ha $n > [a] =: N$ ($[a]$ az a egészrésze), akkor $\frac{a}{n} < 1$. Így $n > N$ esetén

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots N} \cdot \frac{a \cdot \cdots \cdot a}{(N+1) \cdots n} \\ &= \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^N}{N!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{n} \to 0. \end{aligned}$$

Innen a III.29. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

8.
$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Bizonyítás.
$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n},$$
és Rendőr-elv. □

III.44. Definíció. Legyen (a_n) és (b_n) pozitív tagú sorozat. Azt mondjuk, hogy a (b_n) sorozat *nagyságrendje nagyobb*, mint az (a_n)-é, jelölésben

$$a_n \prec b_n, \text{ ha } \frac{a_n}{b_n} \to 0,$$

vagy, ami ezzel ekvivalens, $\frac{b_n}{a_n} \to +\infty$. Az (a_n) és (b_n) sorozatok *aszimptotikusan egyenlők*, jelölésben
$$a_n \approx b_n, \text{ ha } \frac{a_n}{b_n} \to 1.$$

III.45. *Megjegyzés.* A fentiek alapján $a > 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n.$$

III.5. Részsorozatok

III.46. Definíció. Egy $\mathtt{n} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növekedő sorozatot *indexsorozat*nak nevezünk.

Könnyen meggondolható, hogy ha $(\mathtt{n}_i)$ indexsorozat, akkor $\forall i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\mathtt{n}_i \geq i. \tag{III.4}$$

Az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozat egy *részsorozatá*nak egymást követő tagjait úgy nyerjük az eredeti sorozatból, hogy egy indexsorozat mentén válogatjuk ki őket. Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ és $(\mathtt{n}_i) := 2, 4, 6, \ldots, 2i, \ldots$ esetén

$$(a_{\mathtt{n}_i}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots, \frac{1}{2i}, \ldots$$

lesz a részsorozat.

III.47. Állítás. *Ha* $\lim a_n = A$ *(*$A \in \overline{\mathbb{R}}$*), akkor bármely* $(a_{\mathtt{n}_i})$ *részsorozatra* $\lim a_{\mathtt{n}_i} = A$

Bizonyítás. Azonnal adódik a sorozat határértékének definíciójából: adott $\varepsilon > 0$-hoz vagy K-hoz ugyanaz az N küszöbindex jó lesz a részsorozathoz, is, mivel $\mathtt{n}_N \geq N$. □

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy igaz-e, hogy tetszőleges sorozatnak találhatunk határértékkel rendelkező részsorozatát.

III.48. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Az (a_n) sorozat egy a_m tagját *csúcs*nak nevezzük, ha $\forall n \geq m$ esetén $a_n \leq a_m$. Két eset lehetséges:

1. Az (a_n) sorozat tagjai között végtelen sok csúcs van.
2. Az (a_n) sorozat tagjai között véges sok (esetleg 0) csúcs van.

Nézzük az 1. esetet! Legyen a_{n_1} egy csúcs a sorozatban. Mivel végtelen sok csúcs van, ezért létezik olyan $n_2 > n_1$ index, hogy a_{n_2} csúcs. Ismét felhasználva, hogy végtelen sok csúcs van a sorozatban, létezik olyan $n_3 > n_2$ index, amire a_{n_3} csúcs. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak csúcsokból álló

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

részsorozatát, amely a csúcs definíciója alapján monoton fogyó részsorozata (a_n)-nek.
A 2. esetben létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \geq N$ esetén a_n *nem* csúcs. Legyen $n_1 := N$. Mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért létezik $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$, a csúcs definíciója miatt. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ezért találunk olyan $n_3 > n_2$ indexet, melyre

$a_{n_3} > a_{n_2}$. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak egy olyan (csupa nem-csúcsból álló)

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

részsorozatát, mely a sorozat tagjainak megválasztása alapján szigorúan monoton növő. $\square$

III.49. Következmény. *Minden sorozatnak van (véges vagy végtelen) határértékkel rendelkező részsorozata. Ugyanis, a fentiek szerint létező monoton részsorozatnak a III.37. Állítás miatt van határértéke.*

III.50. Feladat. Mutassunk olyan konvergens sorozatot, amelynek van szigorúan monoton növő és csökkenő részsorozata is!

A kurzus egyik legfontosabb tétele az előbbi eredmény alkalmazása korlátos sorozat esetére.

III.51. Tétel (Bolzano–Weierstrass)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen (a_n) korlátos sorozat. A III.48. Tétel alapján (a_n)-nek van monoton részsorozata: jelölje ezt $(a_{\mathtt{n}_i})$. Nyilván ez a részsorozat is korlátos lesz. A III.12. Tétel szerint egy monoton és korlátos sorozat konvergens, tehát $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens is. $\square$

III.6. Cauchy-féle konvergenciakritérium

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tagjai tetszőlegesen közel kerülnek. Ezt küszöböli ki a Cauchy-féle konvergenciakritérium.

III.52. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ hogy } \ \forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tehát egy sorozat Cauchy-sorozat, ha *bármely* pozitív ε-hoz van olyan küszöbindex, hogy ettől az indextől kezdve a sorozat tagjai ε-nál közelebb vannak egymáshoz. A következő tételből kiderül, hogy az, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tetszőlegesen megközelít egy számot, vagyis konvergens.

III.53. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium)**.** *Legyen (a_n) számsorozat. Ekkor*

$$(a_n) \textit{ konvergens} \iff (a_n) \textit{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz

$$\exists N,\ \text{hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyenek $n, m \geq N$ tetszőleges indexek. Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint (a_n) Cauchy-sorozat.

($\Leftarrow$) Legyen (a_n) Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m \geq N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m = N_1$ indexet! Így minden $n \geq N_1$ esetén

$$a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n \geq N_1$ esetén a sorozat tagjai $a_{N_1} - 1$ és $a_{N_1} + 1$ közé esnek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ véges sok tag már nem ronthatja el az egész (a_n) sorozat korlátosságát. Mivel tehát (a_n) korlátos, ezért a III.51. Bolzano–Weierstrass-tétel miatt van $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim a_{\mathtt{n}_i}.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$. A bizonyítás meglehetősen technikai, ezért a lényegét szavakkal is összefoglaljuk. A konvergens részsorozat elegendően nagy indexű tagjai α közelében vannak. Mivel az eredeti sorozat Cauchy, ezért egy (elég nagy) index után a tagjai közel vannak egymáshoz. Tehát a konvergens részsorozathoz nem tartozó tagok elég nagy indexre közel vannak a részsorozat tagjaihoz – és így α-hoz is. Lássuk most részletesen! Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_{\mathtt{n}_i} \to \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_2$, hogy

$$\forall i \geq N_2 \text{ esetén } |a_{\mathtt{n}_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{III.5}$$

Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N$ index, amit választhatunk úgy is, hogy $N \geq N_2$ legyen, melyre

$$\forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{III.6}$$

Legyen most $n \geq N (\geq N_2)$ tetszőleges! Ekkor az (III.5) alapján és az (III.6) feltételben $m = \mathtt{n}_N$-et véve (ezt megtehetjük, mivel (III.4) alapján $n_N \geq N$ is teljesül) kapjuk, hogy

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{\mathtt{n}_N} + a_{\mathtt{n}_N} - \alpha| \leq |a_n - a_{\mathtt{n}_N}| + |a_{\mathtt{n}_N} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehát rögzített $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan N indexet, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, ezért $a_n \to \alpha$ teljesül. $\square$

IV. fejezet

Valós függvények - bevezetés

IV.1. Függvényekhez kapcsolódó alapfogalmak

A *függvény* fogalmát alapfogalomnak tekintjük – halmazok közötti egyértelmű hozzárendelést értünk alatta. Az x-hez hozzárendelt elemet $f(x)$-szel jelöljük. Ha X és Y tetszőleges halmazok, akkor

$$f\colon X \to Y$$

egy olyan függvény, melyre

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f) \subset X \text{ esetén } f(x) \in Y. \tag{IV.1}$$

$\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ jelöli az f függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X : x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az X egy nem üres részhalmaza. Az f függvény $\mathcal{R}(f)$-el jelölt *értékkészlete* Y-nak részhalmaza és

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ valamely } x \in \mathcal{D}(f)\text{-re}\}.$$

Fontos fogalom a függvény grafikonja. Ehhez először definiáljuk halmazok Descartes-szorzatát. Tekintsük alapfogalomnak az (a, b) *rendezett pár*t, amelynek lényeges tulajdonsága, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

IV.1. Definíció. Legyen X, Y halmaz. Az X és Y *Descartes-szorzata*

$$X \times Y \coloneqq \{(x, y)\colon x \in X \text{ és } y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmaz.

Például $X := \{2,3,5\}, Y := \{1,3\}$ véges halmazok esetén

$$X \times Y = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(5,1),(5,3)\}.$$

IV.2. Definíció. Egy $f\colon X \to Y$ függvény *grafikonja* a $X \times Y$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol x az f értelmezési tartományából való.

Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza.
Az alábbiakban a függvénykompozíció (vagy másképp összetett függvény) fogalmát vezetjük be.

IV.3. Definíció. Legyen $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$. Ekkor a g és f függvények *kompozíciója* az a $g \circ f\colon X \to Z$ függvény, melyre

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in \mathcal{D}(g)\},$$

és

$$\text{bármely } x \in \mathcal{D}(g \circ f) \text{ esetén } (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

A $g \circ f$ függvénykompozíció esetén szokás a g függvényt *külső*, az f függvényt pedig *belső függvénynek* nevezni.

IV.4. Példa. A g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := 2x + 1;$$

az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2.$$

Ekkor

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = 2x^2 + 1,$$

továbbá,

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2.$$

Vigyázat! Általában $f \circ g \neq g \circ f$!

Egy függvény inverze csak speciális, ún. kölcsönösen egyértelmű függvények esetén értelmezhető.

IV.5. Definíció. Legyen $f\colon X \to Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *injektív* vagy *kölcsönösen egyértelmű*, ha különböző $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ elemeknek különböző Y-beli elemeket feleltet meg, azaz

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 \neq x_2 \text{ esetén } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Másképp:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Az $f\colon X \to Y$ *bijektív függvény* vagy *bijekció*, ha f injektív, $\mathcal{D}(f) = X$ és $\mathcal{R}(f) = Y$.

IV.6. Definíció. Legyen $f\colon X \to Y$ injektív függvény. Ekkor az f *inverze* vagy *inverzfüggvénye* az

$$f^{-1}\colon Y \to X,\ \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$$

függvény, mely egy $y \in \mathcal{R}(f)$ ponthoz azt az egyértelműen létező $x \in \mathcal{D}(f)$ pontot rendeli, amelyre $f(x) = y$, vagyis

$$\text{bármely } f(x) = y \in \mathcal{R}(f) \text{ esetén } f^{-1}(y) = x.$$

IV.7. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha $f\colon X \to Y$ injektív, akkor az $f^{-1}\colon Y \to X$ függvényre $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$, továbbá f^{-1} is injektív. Ha f bijektív, akkor f^{-1} is bijektív.

Könnyen meggondolható, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektív, akkor graph(f^{-1}) (ami ez esetben $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza) úgy nyerhető, hogy graph(f)-et tükrözzük a 45°-os ($y = x$) egyenesre.

A továbbiakban a véges, megszámlálható és a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmát definiáljuk.

IV.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *véges*, ha létezik $n \in \mathbb{Z}^+$ és $\phi\colon A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha létezik $\phi\colon A \to \mathbb{N}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálható*, ha létezik $\phi\colon A \to \mathbb{N}, \mathcal{D}(\phi) = A$ injektív függvény.

A definíciókból következik, hogy egy megszámlálható halmaz vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
Példák megszámlálhatóan végtelen halmazokra:

0. Legyen $A := \mathbb{N}$. Ekkor

$$\phi(n) := n,\ n \in \mathbb{N},$$

vagyis az identitásfüggvény $\mathbb{N}$-en bijekciót létesít A és $\mathbb{N}$ között.

1. Legyen A a páros természetes számok halmaza, vagyis

$$A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Könnyen(!) látható, hogy a

$$\phi(n) := 2n, \ n \in \mathbb{N}$$

függvény bijekciót létesít $\mathbb{N}$ és A között.

2. Meglepő, de a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Írjuk fel az $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ nevezőjű törteket soronként.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

$$\phi(0) := \frac{0}{1}, \quad \phi(1) := \frac{1}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{2}, \quad \phi(3) := -\frac{1}{2}, \dots$$

A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, ügyelve arra, hogy minden olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így ϕ bijekció lesz $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ között, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálhatóan végtelen.

IV.2. Valós függvények alaptulajdonságai

IV.9. Definíció. Egy $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *valós függvény*nek nevezünk. Emlékeztetünk, hogy az (IV.1) alapján ez azt jelenti, hogy $\emptyset \neq \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$ és $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$.

IV.10. Definíció. Legyen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \mathcal{D}(\lambda f) = \mathcal{D}(f).$$

IV.11. Definíció. Legyen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Ekkor $f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \cdot g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g).$$

IV.12. Definíció. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H := \mathcal{D}(g) \setminus \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor $\frac{1}{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{g}(x) := \frac{1}{g(x)}, \quad \mathcal{D}(1/g) = H.$$

IV.13. Definíció. Legyen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot \frac{1}{g}$$

IV.14. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *felülről korlátos* függvény, ha az $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f *alulról korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f *korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz.

IV.15. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az f *szigorúan monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2).$$

Azt mondjuk, hogy f *monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Az f *szigorúan monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) > f(x_2).$$

IV.16. Feladat. Igazoljuk a következőket!

1. Ha f szigorúan monoton növő vagy fogyó, akkor injektív, azaz van inverze.
2. Ha f szigorúan monoton növő, akkor az inverze is szigorúan monoton növő.
3. Ha f invertálható és $0 \notin \mathcal{R}(f)$, akkor $1/f$ is invertálható.

IV.17. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *páros* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = f(x)$.

IV.18. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *páratlan* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

IV.19. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *periodikus* függvény, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $x + p,\ x - p \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

A p szám a függvény egyik *periódus*a. (Vigyázat! Nem biztos, hogy van legkisebb periódus!)

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[LTS07] Laczkovich M., T. Sós V., *Analízis I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

[MFS] Mezei I., Faragó I., Simon P., *Bevezetés az analízisbe.* elektronikus jegyzet. `http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Mezei_Bev_Anal.pdf`