Egyváltozós analízis 1 előadásjegyzet

Sikolya Eszter
2021/2022. őszi félév

2022. január 12.

Tartalomjegyzék

I. fejezet

Függvények határértéke és folytonossága

Egy függvény határértéke az a pontban A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény A-hoz közeli értékeket vesz fel. Itt az a pontbeli függvényérték nem érdekes, lehet, hogy a függvény nincs is értelmezve a-ban. Egy függvény folytonos az a pontban, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény $f(a)$-hoz közeli értékeket vesz fel. Vagyis az argumentum kis változása az értékek kis változását eredményezi.

I.1. Függvény határértéke

A korábbiaknak megfelelően (ld. [Bevan2, (III.3) definíció]) jelölje

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

az ún. *kibővített számegyenest.*
Idézzük fel, hogy bevezettük egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *környezetét* mint a

$$K_r(a) = (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot, ld. [Bevan2, II.8. Definíció]. Bár a $+\infty$ és $-\infty$ nem valós számok, szükségünk lesz a „környezetük” fogalmára, melyeket nemkorlátos intervallumokként értelmezünk. Legyen $r > 0$ pozitív szám, ekkor

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),$$
$$K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Világos, hogy a fenti jelöléssel, ha $r > 0$ kicsi, akkor $\frac{1}{r}$ nagy, így ha $x \in K_r(+\infty)$, akkor x „közel van” a $+\infty$-hez. Továbbá az is könnyen látható, hogy egy (a_n) sorozat $A \in \overline{\mathbb{R}}$ (véges vagy végtelen) határértékének fogalma a fenti környezetek segítségével egyszerűen definiálható az alábbi módon.

I.1. Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre $\forall n \geq N$ esetén $a_n \in K_\varepsilon(A)$.

Bevezetjük még egy a pont $r > 0$ sugarú ún. *kipontozott környezetét*, mely az a-n kívüli valós számokat tartalmazza az r sugarú környezetből, vagyis

$$\dot{K}_r(a) := (a - r, a) \cup (a, a + r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \tag{I.1}$$

$$\dot{K}_r(+\infty) := K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \tag{I.2}$$

$$\dot{K}_r(-\infty) := K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \tag{I.3}$$

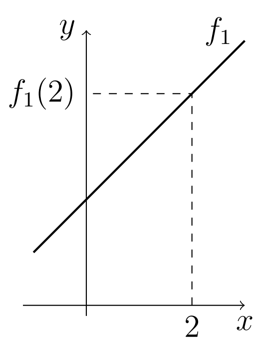
Látható, hogy a $+\infty$ és $-\infty$ kipontozott környezeti megegyeznek a „normál” környezeteikkel, az $a \in \mathbb{R}$ valós szám kipontozott környezete pedig az a-ban „kilyukasztott”, a körüli r sugarú nyílt intervallum lesz.

Vizsgáljunk meg most három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt!
Legyen

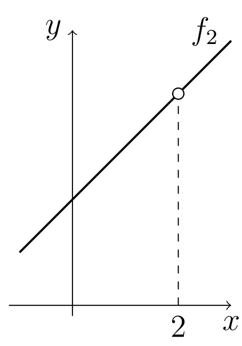
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := x + 2, \qquad$ (I.1. ábra)

$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) := \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \qquad$ (I.2. ábra)

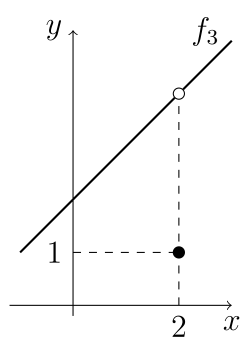
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \qquad$ (I.3. ábra)



I.1. ábra.



I.2. ábra.



I.3. ábra.

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az f_1 függvény esetén jól látható, hogy ha x közel van a 2-höz, akkor az $f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.

Az f_2 függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha x közel van a 2-höz és $x \neq 2$, akkor

$$f_2(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

értékek egy szám, ebben az esetben a $2+2=4$ körül keveset ingadoznak.
Az f_3 függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha x közel van a 2-höz, de $x \neq 2$, akkor az $f_3(x) = x+2$ értékek (az f_1 és f_2 függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak – függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$-nek van definiálva.

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát. Az f függvény a pontbeli határértékének fogalmát olyan pontokra értelmezzük, melyek „elég közel" vannak az értelmezési tartományhoz, de annak nem feltétlenül elemei – vagyis, f az a pontnak egy kipontozott környezetében van értelmezve. A függvény a-beli határértéke pedig az az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ pont lesz, amely körül az a-tól különböző, de a-hoz közeli helyeken vett függvényértékek „keveset ingadoznak".

I.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f értelmezve van az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont egy kipontozott környezetében.
Azt mondjuk, hogy az f függvény *határértéke a-ban* $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

vagyis a-hoz „elég közeli" (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak A-hoz.
Jelölésben:

$$\lim_a f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben $a \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, vagyis a az értelmezési tartománynak is eleme, a definíció nem függ a függvény a-ban felvett helyettesítési értékétől, $f(a)$-tól!

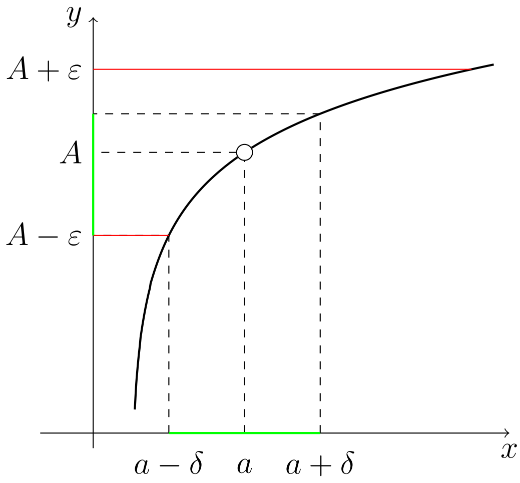
I.3. Feladat. Fogalmazzuk meg a fenti definíció összesen 9 speciális esetét aszerint, hogy $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$, illetve $A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ vagy $A = -\infty$!

Nézzük meg példaként az $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ esetet! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = A \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a, \text{ akkor } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

Másképp,

$$\lim_a f = A \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } 0 < |x-a| < \delta,\ x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$



I.4. ábra. Az a pontbeli határérték

Nézzük meg az $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ esetet is! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = +\infty \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } 0 < |x - a| < \delta, \ x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(Világos, hogy itt ε helyett $K > 0$-t és $f(x) > K$-t is írhattunk volna.)

A szakasz elején lévő példában

$$\lim_2 f_1 = \lim_2 f_2 = \lim_2 f_3 = 4,$$

hiszen könnyen meggondolható, hogy a definícióban adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ választható. Példa végtelen határértékre: Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Világos, hogy $0 \notin D(f)$, de mivel f értelmezve van a 0 egy (sőt, bármely) kipontozott környezetében, ezért van értelme a 0-beli határértékről beszélni. Az is könnyen látható, hogy

$$\lim_0 f = \infty.$$

Ugyanis, adott $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ választással, ha $0 < |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

vagyis $f(x) \in K_\varepsilon(+\infty)$ – és így a határérték definíciója – teljesül.

A következő fontos tétel a függvényhatárérték fogalmát „viszi át” sorozathatárérték fogalmára, ezért a neve Átviteli elv.

I.4. Tétel (Átviteli elv függvényhatárértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ egy kipontozott környezetében, és legyen $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. $\lim\limits_{a} f = A$;
2. *minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.*

Bizonyítás. * 1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat (ilyen létezik, mivel f értelmezve van az a egy kipontozott környezetében). Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel 1. szerint $\lim\limits_{a} f = A$, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A). \tag{I.4}$$

Másrészt, $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \neq a$, $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n \geq N$ esetén $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (I.4) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(A), \quad n \geq N.$$

Tehát adott ε-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$, ezért $f(x_n) \to A$ teljesül.
2. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy 2. teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f-nek A nem határértéke a-ban. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f),$$
$$\text{melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to A$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$ minden n-re), ami ellentmond 2-nek. □

I.5. Következmény. *Adott pontbeli függvényhatárérték egyértelmű. Tehát*

$$\lim_{a} f = A \text{ és } \lim_{a} f = B \Longrightarrow A = B.$$

.

Bizonyítás. A sorozathatárérték egyértelműségét (ld. [Bevan2, III.8. Állítás] és [Bevan2, III.35. Megjegyzés]) és az I.4. Tételt kell használnunk. A következőkben leírunk egy kicsit részletesebb bizonyítást.
Legyen

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a f = B,$$

és indirekt tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor a környezet definíciója alapján létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$. Rögzítsük le ezt az $\varepsilon > 0$ számot! Legyen továbbá $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to a$ adott sorozat. A feltétel szerint $\lim_a f = A$, így az I.4. Tétel alapján $f(x_n) \to A$. A sorozathatárérték definíciója miatt a fent rögzített $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül.
No de $\lim_a f = B$ is igaz, így ismét az I.4. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy $f(x_n) \to B$. Ismét a sorozathatárérték definíciója miatt a fent rögzített $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(B)$ teljesül.
Legyen $N \geq \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$. Ekkor az előbbiek alapján $f(x_n) \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$ kellene legyen, ami ellentmondás. □

A függvényhatárérték és műveletek kapcsolata könnyen meggondolható az Átviteli elv és a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultak alapján (ld. [Bevan2, 3.38. Állítás]).

I.6. Állítás (Függvényhatárérték és műveletek)**.** *Legyenek f és g valós függvények, és tegyük fel, hogy mindketten értelmezve vannak az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont egy kipontozott környezetében, valamint legyen $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a g = B.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a |f| = |A|,$$

továbbá

$$\exists \lim_a (f + g) = A + B, \text{ ha } A + B \text{ értelmes;}$$

$$\exists \lim_a (f \cdot g) = A \cdot B, \text{ ha } A \cdot B \text{ értelmes.}$$

Ha $g \neq 0$ az a egy kipontozott környezetében, akkor

$$\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}, \text{ ha } \frac{A}{B} \text{ értelmes.}$$

Az A és B közötti műveleteket a tavaly tanultak alapján értelmezzük (ld. [Bevan2, 3.38. Állítás]).

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak az I.4. Tételből és a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakból. Példaként nézzük meg az $f+g$ határértékének esetét! Az I.4. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \neq a, x_n \to a \text{ akkor } (f+g)(x_n) \to A+B.$$

Mivel $\lim_a f = A$ és $\lim_a g = B$, ezért az I.4. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen (x_n) sorozatra

$$f(x_n) \to A \text{ és } g(x_n) \to B.$$

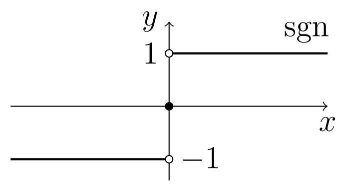
Alkalmazva sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakat kapjuk, hogy ha $A+B$ értelmes, akkor

$$\lim(f+g)(x_n) = \lim\left(f(x_n) + g(x_n)\right) = A+B.$$

□

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az $f \circ g$ kompozícióművelet nem viselkedik ilyen jól a függvényhatárértékre nézve.

I.7. Példa. Egyszerű példa olyan függvényre, amelynek nem létezik határértéke egy pontban, az előjelfüggvény. $f(x) = \text{sgn}(x)$



I.5. ábra. Az előjelfüggvény

Ennek az $a=0$ pontban nincs határértéke, hiszen ha $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$, viszont ha $x_n = -\frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$. Könnyen látható azonban, hogy ez a függvény sem „teljesen csúnya”, mert rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $x_n > 0$, $x_n \to 0$, azaz az (x_n) sorozat jobbról tart az $a=0$ ponthoz, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$. Hasonlóan, ha $x_n < 0$, $x_n \to 0$, azaz az (x_n) sorozat balról tart az $a=0$ ponthoz, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$.

I.8. Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *bal oldali környezetén* a

$$K_r^-(a) := (a-r, a]$$

intervallumot értjük. Az r sugarú *jobb oldali környezetén* a

$$K_r^+(a) := [a, a+r)$$

intervallumot értjük. A $+\infty$-nek csak bal oldali, a $-\infty$-nek csak jobb oldali környezeteit értelmezzük, ezek megegyeznek az eredeti környezetekkel, vagyis

$$K_r^-(+\infty) = K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),$$
$$K_r^+(-\infty) = K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

I.9. Definíció. Egy a pont $r > 0$ sugarú *kipontozott bal/jobb oldali környezetein* azon halmazokat értjük, melyek az a-n kívüli számokat tartalmazzák az r sugarú bal/jobb oldali környezetből, vagyis

$$\dot{K}_r^-(a) := (a - r, a), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R},$$
$$\dot{K}_r^+(a) := (a, a + r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R},$$
$$\dot{K}_r^-(+\infty) := K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),$$
$$\dot{K}_r^+(-\infty) := K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Most definiáljuk egy f függvény a pontbeli bal/jobb oldali határértékének fogalmát.

I.10. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értelmezve az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont egy bal (jobb) oldali kipontozott környezetében.
Azt mondjuk, hogy az f függvény *bal (jobb) oldali határértéke a-ban az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ pont*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f) \ (x \in \dot{K}_\delta^+(a) \cap \mathcal{D}(f)),$$
$$\text{akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Jelölésben:

$$\lim_{a-0} f = A \text{ vagy } \lim_{a-} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a-0} f(x) = A \text{ ill.}$$
$$\lim_{a+0} f = A \text{ vagy } \lim_{a+} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Világos, hogy $+\infty$-ben csak bal oldali, $-\infty$-ben pedig csak jobb oldali határértéket értelmezhetünk.
Az I.4. Tételhez hasonlóan a bal ill. jobb oldali határértékre is megfogalmazhatunk átviteli elveket.

I.11. Tétel (Átviteli elv bal/jobb oldali függvényhatárértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ egy kipontozott bal (jobb) oldali környezetében, és legyen $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. $\lim\limits_{a-0} f = A$ $(\lim\limits_{a+0} f = A)$*;*

2. minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$*,* $x_n \to a$*,* $x_n < a$ $(x_n > a)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, sorozat esetén* $f(x_n) \to A$*.*

Bizonyítás. Az I.4. Tétel bizonyításával analóg módon történik. □

I.12. Állítás. *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *értelmezve az* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *pont egy bal és egy jobb oldali kipontozott környezetében is. Ekkor*

$$\exists \lim_{a} f \iff \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \text{ és } \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

Ilyenkor $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = \lim_a f$*.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

I.13. Példa.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Bizonyítás. A $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ állítást igazoljuk, a másik nagyon hasonlóan történik. Az I.11. Tétel (átviteli elv) szerint a következőt kell belátnunk. Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n < 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to 0$ tetszőleges sorozat. Ekkor

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to -\infty$$

teljesül a sorozatok határértékénél tanultak alapján, ld. [Bevan2, III.40. Tétel 8. pont]. □

A fenti példa és az I.12. Állítás szerint

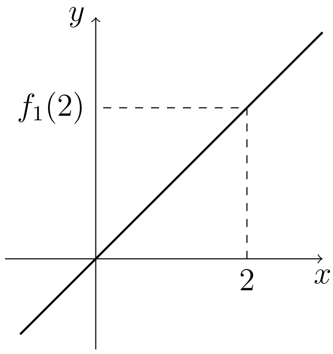
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$

I.2. Függvény folytonossága

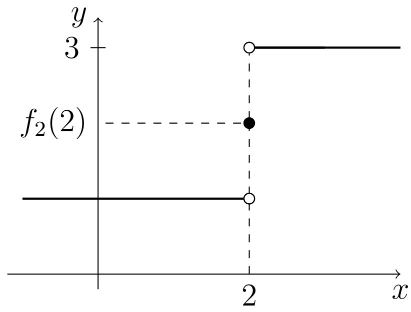
Legyen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := x$, $a := 2$ (I.6. ábra). Egy másik függvény pedig legyen az I.7. ábrán látható $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, \text{ ha } x < 2 \\ 2, \text{ ha } x = 2 \\ 3, \text{ ha } x > 2. \end{cases}$$

Látható, hogy az f_1 függvény olyan, hogy ha x közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az f_2 függvényről. Akármilyen x számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz $(x \neq 2)$, az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$-nél távolabb). Az f_1 függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.



I.6. ábra.

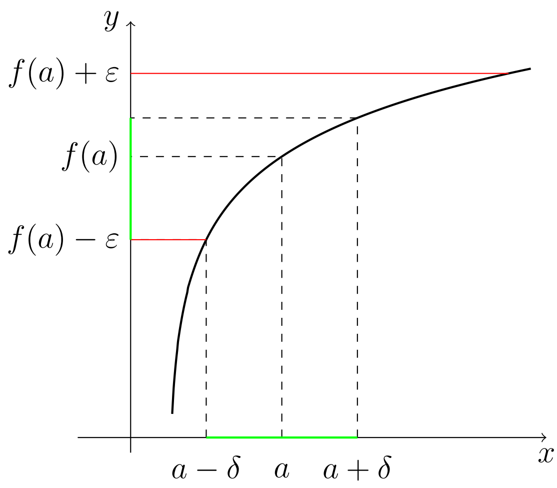


I.7. ábra.

I.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos a-ban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)),$$

vagyis a-hoz elég „közeli" (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz. Ha $H \subset \mathcal{D}(f)$ olyan részhalmaz, hogy f minden $a \in H$ pontban folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f *folytonos H-n.* Ha f folytonos a $H = \mathcal{D}(f)$ halmazon (vagyis, f folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában), akkor azt mondjuk, hogy f *folytonos (függvény).*



I.8. ábra. Az a pontbeli folytonosság

Figyeljük meg, miben különbözik ez a definíció a függvényhatárérték I.2 Definíciójától! Most megköveteltük, hogy $a \in \mathcal{D}(f)$ legyen – értelmezési tartományon kívüli pontban nem beszélhetünk a függvény folytonosságáról. Másrészt, a definícióban szereplő $x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ pont $x = a$ is lehet. Erre azonban triviálisan teljesül, hogy $f(x) = f(a) \in K_\varepsilon(f(a))$, mivel itt A helyett $f(a)$ szerepel.

I.15. Állítás. *Ha f értelmezve van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy (teljes) környezetében, akkor*

$$f \text{ folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. Rögtön adódik az I.2. és az I.14. Definíciókból. □

Egyszerűen meggondolható, hogy a *Dirichlet-függvény* egyetlen pontban sem folytonos.

I.16. Tétel (Átviteli elv függvény folytonosságára)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *f folytonos a-ban;*
2. *minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(a)$.*

Bizonyítás. * Analóg módon történik, mint az I.4. Tételé.
1. ⇒ 2.: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel 1. szerint f folytonos a-ban, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy minden } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)). \quad \text{(I.5)}$$

Másrészt $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n > N \text{ indexre } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (I.5) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a)), \quad n > N.$$

Tehát adott ε-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n > N$-re $f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a))$, ezért $f(x_n) \to f(a)$ teljesül.
2. ⇒ 1.: Tegyük fel, hogy 2. teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f nem folytonos a-ban. Ekkor

$$\begin{aligned}&\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f),\\ &\text{melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a)).\end{aligned}$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to f(a)$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a))$ minden n-re), ami ellentmond 2-nek. □

A függvények közötti műveletek a folytonosságra is „jól viselkednek”.

I.17. Állítás (Folytonosság és műveletek)**.** *Legyenek f és g valós függvények és $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Tegyük fel, hogy f és g folytonosak a-ban. Ekkor*

$$|f|, \quad f+g, \quad f \cdot g \ \text{ és } \ \frac{f}{g} \ (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

is folytonosak a-ban.

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak az I.16. Tételből és a sorozatok közötti műveletekről tanultakból. Példaként nézzük meg az $f \cdot g$ folytonosságának esetét! Az I.16. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \to a \text{ akkor } (f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(a).$$

Mivel f és g folytonosak a-ban, ezért az I.16. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \to f(a) \text{ és } g(x_n) \to g(a).$$

Alkalmazva a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó [Bevan2, III.20. Állítás]-t kapjuk, hogy

$$\lim(f \cdot g)(x_n) = \lim\left(f(x_n) \cdot g(x_n)\right) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

□

A fenti állításban a hányadosfüggvény esetén azt tettük fel, hogy a nevezőben $g(a) \neq 0$ legyen. Szélsőséges esetben így előfordulhat, hogy f/g csak egy pontban, a-ban van értelmezve. Ez az eset azonban nem állhat fenn, ha g az a egy környezetében is értelmezve van – erről szól a következő állítás, amit a folytonos függvények *(elő)jeltartásának* is hívunk.

I.18. Állítás. *Legyen a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve az $a \in \mathcal{D}(g)$ pont egy környezetében. Tegyük fel, hogy g folytonos a-ban, és $g(a) > 0$ ($g(a) < 0$). Ekkor a-nak létezik olyan $K_\delta(a)$ környezete, hogy minden $x \in K_\delta(a)$ esetén $g(x) > 0$ ($g(x) < 0$).*

Bizonyítás. A $g(a) > 0$ esetet bizonyítjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan szám, amelyre $0 < g(a) - \varepsilon$ (pl. $\varepsilon = g(a)/2$). Ekkor $0 < g(a) - \varepsilon < g(a) + \varepsilon$ is teljesül. A folytonosság definíciója szerint ε-hoz létezik létezik $\delta > 0$, hogy ha $x \in K_\delta(a)$, akkor $g(x) \in K_\varepsilon(g(a))$, tehát

$$0 < g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon.$$

Így $x \in K_\delta(a)$ esetén $0 < g(x)$ teljesül. □

A bal/jobb oldali határérték definíciójához hasonló módon értelmezhetjük egy függvény balról, ill. jobbról való folytonosságát.

I.19. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *f balról (jobbról) folytonos a-ban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f) \ (x \in K_\delta^+(a) \cap \mathcal{D}(f)), \\ \text{akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)).$$

Az I.15. Állításhoz hasonlóan belátható a következő.

I.20. Állítás. *Ha az f függvény értelmezve van az $a \in \mathcal{D}(f)$ pont egy bal (jobb) oldali teljes környezetében, akkor*

$$f \text{ balról (jobbról) folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_{a-0} f = f(a) \quad (\exists \lim_{a+0} f = f(a)).$$

I.21. Következmény. *Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében. Az f pontosan akkor folytonos a-ban, ha balról és jobbról is folytonos a-ban.*

Bizonyítás. Az I.15. Állítás alapján f pontosan akkor folytonos a-ban, ha $\exists \lim_a f$ és $\lim_a f = f(a)$. Másrészt, az I.12. Állítás szerint ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $\exists \lim_{a-0} f$, $\exists \lim_{a+0} f$, és $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = f(a)$. Ez pedig az I.20. Állítás alapján ekvivalens azzal, hogy f balról és jobbról is folytonos a-ban. $\square$

I.22. Feladat. Fogalmazzuk meg a függvény bal/jobb oldali folytonosságára vonatkozó átviteli elvet!

I.3. Határérték, folytonosság és kompozíció

Az előző szakasz I.17. Állítása a folytonosság és függvények közötti műveletek kapcsolatáról a függvényhatárértékre vonatkozó megfelelő tétel analogonja. Van azonban a függvények között lehetséges műveletek között még egy, a *kompozíció*, melyre folytonosság és határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Emlékeztetőül felidézzük a függvénykompozíció fogalmát, ld. [Bevan2, IV.3. Definíció].

I.23. Definíció. Legyen $f \colon Y \to Z, g \colon X \to Y$. Ekkor az f és g függvények *kompozíciója* az a $f \circ g \colon X \to Z$ függvény, melyre

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\},$$

és

$$\text{bármely } x \in \mathcal{D}(f \circ g) \text{ esetén } (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

A $f \circ g$ függvénykompozíció esetén szokás a f függvényt *külső*, az g függvényt pedig *belső függvénynek* nevezni.

Kezdjük a folytonosság és függvények közötti kompozíció kapcsolatával.

I.24. Tétel (Folytonosság és kompozíció)**.** *Legyenek f és g valós függvények, és tegyük fel, hogy g folytonos az $a \in \mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, f pedig az $g(a)(\in \mathcal{D}(f))$ pontban. Ekkor $f \circ g$ folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Az állítást legegyszerűbben az I.16. Átviteli elv segítségével bizonyíthatjuk. Legyen $x_n \to a$, $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$ tetszőleges sorozat. A g függvény a-beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján $g(x_n) \to g(a)$. Az f függvény $g(a)$ pontbeli folytonosságát kihasználva

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a),$$

amiből az állítás következik. □

Egy nagyon egyszerű példán megmutatható, hogy a fenti állítás függvényhatárértékre vonatkozó analógja nem igaz. Legyen

$$g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Legyen $a = 2$. Ekkor $\exists \lim_a g = \lim_2 g = 0 = b$, $\exists \lim_b f = \lim_0 f = 0 = c$, de

$$\lim_a (f \circ g) = \lim_2 (f \circ g) = 1 \neq c = 0!$$

A probléma azzal van, hogy a g függvény „nagyon nem injektív” az a pont környezetében. Ha megpróbálnánk a függvényhatárértékre vonatkozó állítást az átviteli elv segítségével bizonyítani, kiderül, ez miért baj. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor az I.4. Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Ebből azonban nem következik (feltétlenül), hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$, ugyanis nem biztos, hogy $g(x_n) \neq b$ (legalább egy indextől kezdve) teljesül! Épp ez a probléma az előbbi példában is. A következő tétel a helyes állítást fogalmazza meg.

I.25. Tétel (Határérték és kompozíció)**.** *Legyenek f és g valós függvények és legyen $f \circ g$ értelmezve az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont egy kipontozott környezetében. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$. Ekkor az alábbi* 1. *és* 2. *feltételek bármelyikéből következik, hogy*

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

1. *$b \in \mathcal{D}(f)$ és f folytonos b-ben, $f(b) = c$;*

2. *$\exists \lim\limits_{b} f =: c$, továbbá a-nak létezik olyan $\dot{K}(a)$ kipontozott környezete, hogy $g(x) \neq b$, ha $x \in \dot{K}(a)$ (pl. g injektív az a egy környezetében vagy $b = \pm\infty$).*

Bizonyítás. * A bizonyítás lényege, hogy mindkét esetben működik az átviteli elv. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor az I.4. Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Továbbá:
1. Mivel f folytonos b-ben, ezért $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(b) = c$.
2. Mivel $x_n \in \dot{K}(a)$ egy indextől kezdve, ezért $g(x_n) \neq b$ teljesül elég nagy n-re. Így ismét alkalmazva az I.4. Tételt, $\lim\limits_{b} f = c$ miatt kapjuk, hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$. □

I.4. Valós számok valós kitevőjű hatványai

Bevezető analízis 2 előadáson (ld. [Bevan2, II.4. Fejezet] bevezettük valós számok racionális kitevős hatványait. Most a sorozathatárérték fogalmának ismeretében definiálni tudjuk egy (pozitív) szám tetszőleges valós, így irracionális kitevős hatványát is úgy, hogy a hatványozástól „elvárt" tulajdonságok érvényben maradjanak.
A definícióhoz szükségünk lesz a következő állításokra.

I.26. Állítás. *Legyen $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Ha $a > 1$, akkor*

$$a^r < a^s,$$

ha pedig $0 < a < 1$, akkor

$$a^r > a^s.$$

Legyen $0 < a < b$ és $r \in \mathbb{Q}$. Ha $r > 0$, akkor

$$a^r < b^r,$$

ha pedig $r < 0$, akkor

$$a^r > b^r.$$

Bizonyítás. * Legyen először $a > 1$. A hatványozás azonosságaiból és a valós számok (r6.) rendezési tulajdonságából következik, hogy

$$a^r < a^s \Leftrightarrow 1 < a^{s-r},$$

ezért elég belátni, hogy ha $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, akkor $a^p > 1$. Legyen $p = \frac{n}{m}$, $m \neq 0$. Ekkor

$$a^p = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mivel $a > 1$, azért szintén a hatványozás azonosságaiból és a rendezés (r6.) tulajdonságából következik, hogy $a^n > 1$ is teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt[m]{a^n} \leq 1$. Ekkor az előbbiekhez hasonló meggondolással

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n \leq 1,$$

ami ellentmondás. Tehát $a^p = \sqrt[m]{a^n} > 1$.
Ugyanígy látható be az $0 < a < 1$ eset is.
Ha $0 < a < b$, akkor

$$a^r < b^r \iff 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^r,$$

ahol $\frac{b}{a} > 1$ és $r > 0$. Tehát az állítás a bizonyítás első része alapján adódik. Hasonlóan gondolható meg az $r < 0$ eset is. □

Az Arkhimédészi axióma (ld. [Bevan2, II.3. Fejezet]) következménye lesz az alábbi állítás.

I.27. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor található olyan $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$.*

Bizonyítás. A Bevezető analízis 2 kurzuson tanultuk (ld. [Bevan2, II.9. Állítás]), hogy minden (nemelefajuló) nyílt intervallumban, így az $(x-1, x)$ intervallumban is van racionális szám. Ezért

$$\exists r_1 \in (x-1, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Világos, hogy $(r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)$ egy nyílt intervallum. Ezért igaz, hogy

$$\exists r_2 \in (r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Hasonlóan,

$$\exists r_3 \in (r_2, x) \cap (x - \frac{1}{3}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Folytatva az eljárást, kapjuk racionális számoknak olyan $r_1, r_2, r_3, \ldots$ szigorúan monoton növő sorozatát, melyre

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x \Longrightarrow r_n \to x.$$

□

I.28. Definíció. Legyenek $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ekkor a fentiek alapján létezik $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$. Az (a^{r_n}) sorozat az I.26. Állítás szerint monoton. Továbbá, korlátos is, hiszen bármely $q > x$, $q \in \mathbb{Q}$ esetén a^q egy felső, ill. alsó korlátja, attól függően, hogy $a > 1$ vagy $0 < a < 1$. Tehát (a^{r_n}) konvergens (ld. [Bevan2, III.12. Tétel]). Definiálja

$$a^x := \lim a^{r_n}.$$

Be kell látnunk még, hogy a fenti definíció nem függ az (r_n) sorozat megválasztásától. Ehhez az alábbi állítást gondoljuk meg, mely az

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0)$$

nevezetes sorozathatárérték általánosítását mondja ki.

I.29. Állítás. *Legyen $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to 0$ racionális számokból álló nullsorozat és $a > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$a^{r_n} \to 1.$$

Bizonyítás. * Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Tudjuk, hogy $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ és ezért a reciproksorozatra $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$. Így ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$a^{\frac{1}{n}}, a^{-\frac{1}{n}} \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon).$$

Speciálisan,

$$a^{\frac{1}{N}}, a^{-\frac{1}{N}} \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon). \tag{I.6}$$

Mivel $r_n \to 0$, ezért $\frac{1}{N} > 0$-hoz létezik olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall k \geq K$ esetén

$$-\frac{1}{N} < r_k < \frac{1}{N}.$$

Az (I.6) tartalmazásból és az I.26. Állításból kapjuk, hogy $a > 1$ esetén

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon, \quad k \geq K.$$

Tehát $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindexet, hogy $\forall k \geq K$ esetén $a^{r_k} \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)$, ezért $a^{r_n} \to 1$.
A $0 < a < 1$ eset könnyen meggondolható abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. $\square$

I.30. Következmény. *Az a^x hatvány I.28. Definíciója nem függ az x-hez tartó (szigorúan monoton növő) racionális számokból álló sorozat megválasztásától, tehát tetszőleges $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to x$ szigorúan monoton növő sorozatok esetén $\lim a^{r_n} = \lim a^{q_n}$.*

Bizonyítás. Ha $r_n \to x$ és $q_n \to x$ a fenti tulajdonságú, akkor $s_n := r_n - q_n$, $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval $(s_n) \subset \mathbb{Q}$ és $s_n \to 0$. Az előző állítás alapján

$$\frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = a^{r_n - q_n} = a^{s_n} \to 1.$$

Mivel (a^{r_n}) és (a^{q_n}) is konvergens, és a hányadosuk 1-hez tart, ezért a határértékük megegyezik. $\square$

A sorozathatárérték és műveletek kapcsolatából adódik, hogy a fent definiált valós kitevős hatványozás megőrzi a hatványozás ismert azonosságait.

I.31. Állítás. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a hatványozás azonosságai érvényben maradnak valós kitevős hatványokra is, tehát bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Továbbá, érvényben maradnak az I.26. Állításban kimondott rendezési tulajdonságok is $r, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az 1. állítást bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Legyenek $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to y$ tetszőleges szigorúan monoton növő sorozatok. Nyilván $r_n + q_n \to x + y$ és $(r_n + q_n)$ szigorúan monoton növő. A definíció alapján, és kihasználva a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakat:

$$a^x \cdot a^y = (\lim a^{r_n}) \cdot (\lim a^{q_n}) = \lim (a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim a^{r_n + q_n} = a^{x+y},$$

ahol alkalmaztuk a racionális kitevős hatványozás azonosságát. □

Ezen állítás egyik következménye, hogy a továbbiakban, ha a^x-et akarjuk közelíteni, vehetünk tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to x$ sorozatot is.

I.32. Következmény. *Ha $a > 0$ és $x_n \to x$ tetszőleges valós sorozat, akkor*

$$a^{x_n} \to a^x.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságai miatt

$$a^{x_n} \to a^x \iff \frac{a^{x_n}}{a^x} = a^{x_n - x} \to 1.$$

Tudjuk, hogy $x_n - x \to 0$ és az I.29. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy $a^{x_n - x} \to 1$ teljesül (a bizonyításban sehol sem használtuk ki, hogy a kitevők racionálisak!). □

I.33. Következmény. *Legyen $a > 0$ tetszőleges. Ekkor az*

$$\exp_a(x) := a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

definícióval megadott a alapú exponenciális függvény *folytonos.*

Bizonyítás. Azonnal adódik az I.16. Átviteli elvből és az I.32. Következményből. $\square$

Végül kimondjuk azt az állítást, ami [Bevan2, III.27. Következmény] általánosítása valós kitevőre.

I.34. Állítás. *Legyen (x_n) valós számsorozat, $x_n, x > 0$ és $x_n \to x$. Ekkor bármely $r \in \mathbb{R}$ esetén*

$$x_n^r \to x^r.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. $\square$

I.35. Következmény. *Legyen $r > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor az*

$$\mathrm{id}^r(x) := x^r, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

definícióval megadott r kitevős hatványfüggvény *folytonos.*

Bizonyítás. Azonnal adódik az I.16. Átviteli elvből és az I.34. Állításból. $\square$

I.5. Nevezetes függvényhatárértékek

Az alábbi nevezetes függvényhatárértékek bizonyításában az I.4. Tételt (Átviteli elv) és időnként az I.25. Tételt is alkalmazzuk megfelelő szereposztással.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Bizonyítás. Az I.4. Tételt alkalmazzuk. Legyen $x_n \to \infty$ tetszőleges sorozat, és tegyük fel, hogy $x_n > 1$ (egy indextől kezdve ez biztos teljesül). Ekkor, ha $[x_n]$ jelöli az x_n egészrészét,

$$([x_n])^{\frac{1}{[x_n]+1}} \le (x_n)^{\frac{1}{x_n}} \le ([x_n] + 1)^{\frac{1}{[x_n]}}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $(n^{\frac{1}{n+1}})$ ill. $((n + 1)^{\frac{1}{n}})$ egy-egy részsorozata áll, melyek 1-hez tartanak (ez meggondolható abból, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$, ld. [Bevan2, III.4.2.]). Így $(x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to 1$, amiből az állítás következik. $\square$

2.

$$\lim_{x \to 0+} x^x = 1.$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $x_n \to 0+$ esetén $\frac{1}{x_n} \to +\infty$, ezért az 1. pont alapján

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{x_n^{x_n}} \to 1,$$

így $x_n^{x_n} \to 1$ is teljesül. Az I.4. Tétel alapján készen vagyunk. $\square$

3.

$$\lim_{x\to\infty} x^c = \begin{cases} +\infty, & c > 0, \\ 1, & c = 0, \\ 0, & c < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. A $c = 0$ eset azonnal adódik - ilyenkor a függvény konstans 1.

Ha $c > 0$, akkor vegyünk egy tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to +\infty$ sorozatot. Legyen $K > 0$ adva. Ekkor a $K^{\frac{1}{c}} > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $x_n \geq K^{\frac{1}{c}}$ teljesül. Ebből

$$x_n^c \geq \left(K^{\frac{1}{c}}\right)^c = K, \quad n \geq N.$$

Így $x_n^c \to +\infty$, és mivel $x_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat volt, az I.4. Tétel alapján $\lim_{x\to\infty} x^c = +\infty$ adódik.

A $c < 0$ eset következik az előző esetből úgy, hogy ilyenkor $x^c = \frac{1}{x^{-c}}$, és $-c > 0$. $\square$

4.

$$\lim_{x\to 0+0} x^c = \begin{cases} 0, & c > 0, \\ 1, & c = 0, \\ +\infty, & c < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. A $c = 0$ eset azonnal adódik - ilyenkor a függvény konstans 1.

Ha $c > 0$, akkor vegyünk egy tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to 0$ sorozatot. Ekkor a sorozathatárértékeknél tanultak alapján (ld. [Bevan2, III.40. Tétel, 8. pont]) $\frac{1}{x_n} \to +\infty$. A 3. pont alatt meggondoltak szerint ekkor

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)^c = \frac{1}{x_n^c} \to +\infty.$$

Így (ld. [Bevan2, III.40. Tétel, 7. pont]) $x_n^c \to 0$, amiből az I.4. Tétel alapján $\lim_{x\to 0+0} x^c = 0$ adódik.

A $c < 0$ eset következik az előző esetből úgy, hogy ilyenkor $x^c = \frac{1}{x^{-c}}$, és $-c > 0$. $\square$

5.

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az $a = 1$ eset azonnal adódik - ilyenkor a függvény konstans 1.

Ha $a > 1$, akkor vegyünk egy tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to +\infty$ sorozatot. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ (ld. [Bevan2, III.4.4]), ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a^n > K$. Mivel $[x_n] \to +\infty$ is teljesül, ezért elég nagy n-re $[x_n] \geq N$, így ha n elég nagy,

$$a^{x_n} \geq a^{[x_n]} \geq a^N > K.$$

Ebből adódik, hogy $a^{x_n} \to +\infty$, tehát az I.4. Tétel alapján $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$.

A $0 < a < 1$ esetet megkapjuk abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. □

6.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Következik az előzőből, $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ felhasználásával. □

7.

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1, \quad a > 0$$

Bizonyítás. Az $a > 1$ esetet bizonyítjuk, a $0 < a < 1$ eset hasonlóan adódik. Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Mivel elég nagy n-re $x_n > 0$, és $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$, ezért

$$a^{\frac{1}{[x_n]+1}} \leq a^{\frac{1}{x_n}} \leq a^{\frac{1}{[x_n]}}.$$

A bal oldalon az $(\sqrt[n+1]{a})$, a jobb oldalon az $(\sqrt[n]{a})$ egy-egy részsorozata áll, amelyek mind 1-hez tartanak, ld. [Bevan2, III.4.3.]. Így $a^{\frac{1}{x_n}} \to 1$, amiből az állítás adódik. □

8.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \quad (a > 1, q > 0).$$

Bizonyítás. Legyen $x_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Mivel elég nagy n-re $x_n > 0$, és $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$, ezért

$$\frac{[x_n]^q}{a^{[x_n]+1}} \leq \frac{x_n^q}{a^{x_n}} \leq \frac{([x_n]+1)^q}{a^{[x_n]}}.$$

A bal oldalon az

$$\frac{n^q}{a^{n+1}},$$

a jobb oldalon az

$$\frac{(n+1)^q}{a^n}$$

sorozat egy-egy részsorozata áll, amelyek mind 0-hoz tartanak, ld. [Bevan2, III.4.6.]. Így $\frac{x_n^q}{a^{x_n}} \to 0$, amiből az állítás adódik. $\square$

9.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a másik hasonlóan igazolható. Legyen $x_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $((1 + \frac{1}{n+1})^n)$ ill. $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ egy-egy részsorozata áll, melyek mindegyike e-hez tart, tehát

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to \mathrm{e}.$$

Így az I.4. Tétel szerint adódik az állítás. $\square$

10.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás. Az $\alpha > 0$ esetet bizonyítjuk, az $\alpha < 0$ eset hasonlóan meggondolható. Legyen

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ és } g(x) := \frac{x}{\alpha}.$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) = \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}} = \left(\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

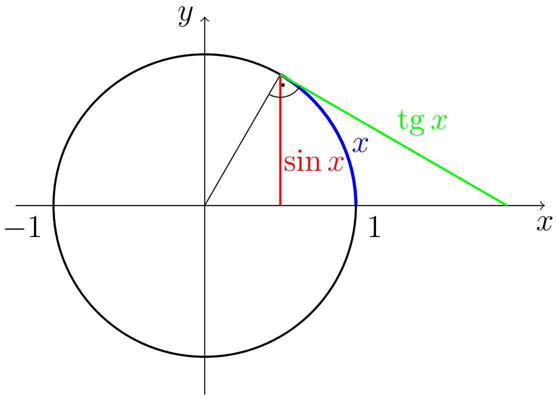
Az I.25. Tétel 2. pontját alkalmazva az $a = b = +\infty$, $c = \mathrm{e}$ szereposztással, az előző pont alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = \mathrm{e}.$$

Ebből, és az I.25. Tételt ismét alkalmazva kapjuk a kívánt eredményt. □

11.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



I.9. ábra. A $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ egyenlőtlenség

Bizonyítás. Az I.9. ábra alapján meggondolható, hogy

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

adódik, és felhasználva a cos függvény 0 pontbeli folytonosságát (ld. később a II.6. Állítást), kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

egyenlőség alapján

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is igaz, így az állítást bizonyítottuk. $\square$

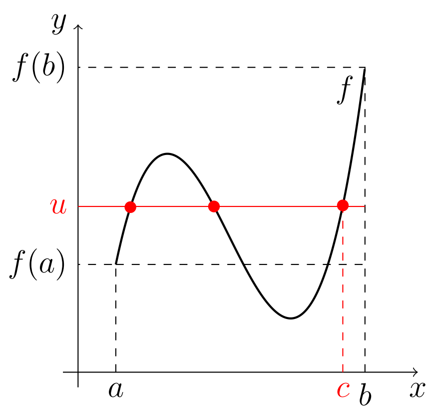
I.6. Intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai

Ebben a szakaszban intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságaival foglalkozunk, ezért az alábbiakban az $f : I \to \mathbb{R}$ jelölés alatt mindig $\mathcal{D}(f) = I$-t értünk. Az első fontos eredményt egyszerűbben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy intervallumon folytonos függvény grafikonjának lerajzolásakor „nem emeljük fel a ceruzát”.

I.36. Tétel (Bolzano–Darboux-tétel)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor ha $u \in \mathbb{R}$ olyan, hogy*

$$f(a) < u < f(b) \quad (\textit{vagy } f(b) < u < f(a)),$$

akkor létezik $c \in (a,b)$, melyre $f(c) = u$.



I.10. ábra. Bolzano–Darboux-tétel

Bizonyítás. Legyen például $f(a) < u < f(b)$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$H := \{x \in [a,b] : f(x) < u\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$, ugyanis $a \in H$. Másrészt H felülről korlátos, mivel $H \subset [a,b]$, tehát b egy felső korlátja. Így a felső határ létezéséről szóló tétel (ld. [Bevan2, II.24. Tétel]) miatt H-nak van legkisebb felső korlátja, $\sup H \in \mathbb{R}$. Legyen

$$c := \sup H.$$

$H \subset [a, b]$ miatt $c \in [a, b]$ teljesül. Belátjuk, hogy $f(c) = u$. Indirekt, ha $f(c) > u$ volna, akkor az f függvény c pontbeli folytonossága miatt létezne olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) > u$, ha $x \in (c-\delta, c) \subset [a, b]$. Ez ellentmond annak, hogy c a legkisebb felső korlátja H-nak, hiszen $c - \delta$ is felső korlát volna. Másrészt, ha $f(c) < u$ volna, akkor szintén az f függvény c pontbeli folytonosságát használva, létezne olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) < u$, ha $x \in (c, c + \delta) \subset [a, b]$. Ez pedig ellentmond annak, hogy c felső korlátja H-nak. □

Ennek a tételnek egy fontos következménye, hogy intervallum folytonos függvénnyel vett képe is intervallum.

I.37. Következmény. *Ha f egy tetszőleges I intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor f* Darboux-tulajdonságú*, azaz bármely $J \subset I$ intervallum esetén*

$$f(J) := \{f(x) : x \in J\}$$

intervallum.

Bizonyítás. Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos függvény, és legyen $J \subset I$ intervallum. Be kell látni, hogy $f(J)$ is intervallum, vagyis az intervallum definíciója szerint (ld. [Bevan2, II.6. Definíció])

$$\text{bármely } y_1 < u < y_2, \;\; y_1, y_2 \in f(J) \text{ esetén } u \in f(J).$$

Ekkor $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$ valamely $a, b \in J$ számokra, és feltehetjük, hogy $a < b$ (az $a > b$ eset hasonlóan meggondolható). Tudjuk, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (hiszen $[a, b] \subset J \subset I$), ezért alkalmazhatjuk a Bolzano–Darboux-tételt. Ennek alapján

$$\exists c \in (a, b) \subset J, \text{ melyre } f(c) = u,$$

vagyis $u \in f(J)$, és ezt akartuk belátni. □

I.38. Következmény (Bolzano-tétel)**.** *Ha f olyan, intervallumon értelmezett folytonos függvény, mely felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f-nek van gyöke (nullhelye) az intervallumban.*

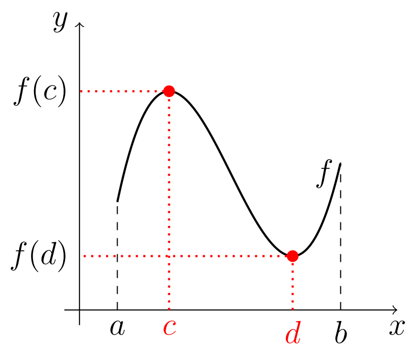
Bizonyítás. A feltétel szerint léteznek olyan $a, b \in I$ számok, melyekre $f(a) < 0 < f(b)$. A Bolzano–Darboux-tétel alapján $\exists c \in (a, b)$ (vagy $c \in (b, a)$), melyre $f(c) = 0$. □

Ha egy halmaz infimuma/szupremuma eleme a halmaznak, akkor azt mondjuk, hogy ez a halmaz *minimuma/maximuma.* Hasonlóan definiálhatjuk egy függvény minimumát/maximumát mint az értékkészletének megfelelő elemét.

I.39. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, hogy

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \geq f(x_0) \text{ (ill. } f(x) \leq f(x_0)),$$

akkor $f(x_0)$ az f *minimuma* (ill. *maximuma*).



I.11. ábra. Weierstrass-tétel

I.40. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f-nek van minimuma és maximuma.*

Bizonyítás. Az I.37. Következmény alapján $\mathcal{R}(f) = f([a, b])$ intervallum. Jelölje $m := \inf \mathcal{R}(f)$ és $M := \sup \mathcal{R}(f)$. Azt kell belátni, hogy $m, M \in \mathcal{R}(f)$. Az infimum tulajdonságai alapján választható egy olyan $(y_n) \subset \mathcal{R}(f)$ sorozat, amelyre $y_n \to m$. Ugyanis, ha $m \in \mathbb{R}$, akkor

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists y_n \in \mathcal{R}(f) : m \leq y_n < m + \frac{1}{n}.$$

Ha pedig $m = -\infty$ volna, akkor

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists y_n \in \mathcal{R}(f) : y_n < -n.$$

A kapott (y_n) sorozatra mindkét esetben $y_n \to m$ teljesül. Mivel $y_n \in \mathcal{R}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, ezért léteznek $x_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ számok, amelyekre $f(x_n) = y_n$. Így

$$y_n = f(x_n) \to m.$$

A kapott $(x_n) \subset [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel (ld. [Bevan2, III.51. Tétel]) szerint van konvergens részsorozata, (x_{n_i}). Legyen

$$d := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a, b].$$

(Az $[a, b]$ intervallum zártságából következik, hogy $d \in [a, b]$ szükségképpen teljesül.) Az I.16. Átviteli elv alapján az f függvény d-beli folytonosságából adódik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(d).$$

Mivel $(f(x_{\mathrm{n}_i}))$ részsorozata az m-hez tartó $(f(x_n))$ sorozatnak, ezért

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to m = f(d)$$

is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $f(d) = m \in \mathcal{R}(f)$, amiből persze az is következik, hogy $m = -\infty$ nem lehetséges.
Az M esete ezzel analóg módon gondolható meg. $\square$

I.41. Következmény. *Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete korlátos és zárt intervallum.*

Bizonyítás. Azonnal adódik az I.37. Következményből és az I.40. Weierstrass-tételből. $\square$

A következő tételben azt gondoljuk meg, hogy milyen tulajdonságú egy (intervallumon értelmezett) folytonos függvény inverze.

I.42. Tétel (Folytonos függvény inverze)**.** *Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos és injektív függvény. Ekkor f szigorúan monoton. Továbbá, az f^{-1} inverz függvény*

- *is intervallumon van értelmezve;*
- *szigorúan monoton ugyanúgy, mint f;*
- *folytonos.*

Bizonyítás. Először meggondoljuk, hogy ha f folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton. Tegyük fel indirekt, hogy

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3, \text{ hogy } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2),$$

(az összes többi „rossz” eset hasonlóan gondolható meg).
Mivel $[x_1, x_2] \subset I = \mathcal{D}(f)$ és $f(x_1) < u := f(x_3) < f(x_2)$, ezért az I.36. Bolzano–Darboux-tétel alapján

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(c) = u = f(x_3).$$

Ez azonban ellentmond f injektivitásának, ugyanis $c < x_3$.
Most lássuk be az inverzfüggvényre vonatkozó állításokat!

- Az I.37. Következmény alapján $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ intervallum.
- Legyenek $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ számok, és tegyük fel, hogy f szigorúan monoton növő. Ekkor a létező $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ számokra nyilván
$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$
teljesül. A szigorúan monoton fogyó eset hasonlóan meggondolható.
- Az f^{-1} függvény folytonosságát nem bizonyítjuk.

$\square$

I.43. *Megjegyzés.* Az előző tételben valójában nincs szükség f folytonosságára. Könnyen meggondolható, hogy egy szigorúan monoton függvény inverze mindig folytonos, csak nem feltétlenül intervallumon van értelmezve.

II. fejezet

Elemi függvények folytonossága és határértéke

Ebben a szakaszban az egyszerűség kedvéért a függvényeket mint $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ tüntetjük fel (tehát a nyíl előtt az értelmezési tartomány áll minden esetben).

II.1. Hatványfüggvények

1. Legyen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}(x) := x$ az ún. *identitásfüggvény.*

   Az id szigorúan monoton növő, páratlan függvény (II.1. ábra).

2. Legyen $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^2(x) := x^2$.

   Az $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növő, az $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^2 páros (II.2. ábra).

3. Legyen $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^3(x) := x^3$.

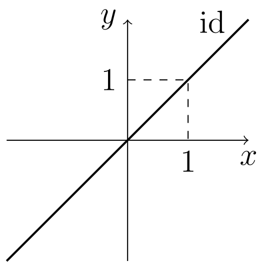
   Az id^3 szigorúan monoton növő, páratlan függvény (II.3. ábra).

4. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^n(x) := x^n$ függvény páros n esetén az id^2, páratlan n esetén az id^3 tulajdonságait örökli.

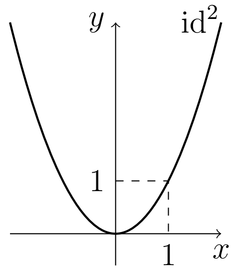
5. Legyen $1/\mathrm{id} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (1/\mathrm{id})(x) := 1/x$,
   és $1/\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (1/\mathrm{id}^2)(x) := 1/x^2$.

   Az $1/\mathrm{id}|_{\mathbb{R}^-}$ és az $1/\mathrm{id}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogyó (de $1/\mathrm{id}$ nem monoton!). Az $1/\mathrm{id}$ páratlan (II.4. ábra).

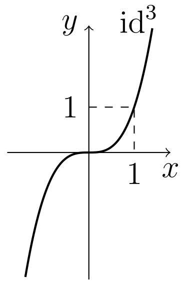
   Az $1/\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton nő, az $1/\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogy. Az $1/\mathrm{id}^2$ páros (II.5. ábra).



II.1. ábra. Az identitás



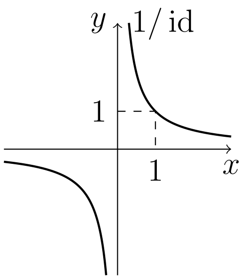
II.2. ábra. Az id^2 függvény



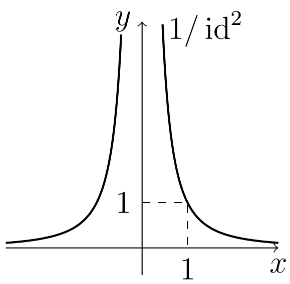
II.3. ábra. Az id^3 függvény

6. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $1/\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $1/\mathrm{id}^n(x) := 1/x^n$ függvény páros n esetén az $1/\mathrm{id}^2$, páratlan n esetén az $1/\mathrm{id}$ tulajdonságait örökli.
7. Legyen $\mathrm{id}^{1/2} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ szigorúan monoton növő függvény (II.6. ábra).

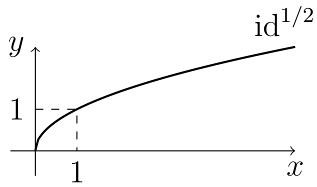
   Megemlítjük, hogy az $\mathrm{id}^{1/2}$ az $\mathrm{id}^2|_{[0,\infty)}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető.



II.4. ábra. Az $1/\mathrm{id}$ függvény



II.5. ábra. Az $1/\mathrm{id}^2$ függvény

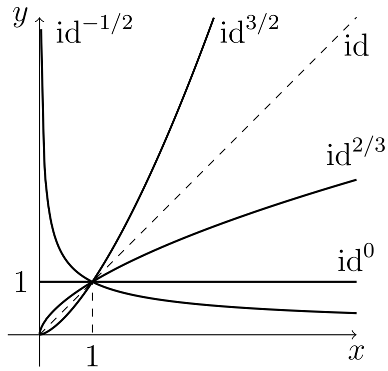


II.6. ábra. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ függvény

8. Legyen $r \in \mathbb{R}$. Az $\mathrm{id}^r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^r(x) := x^r$. Néhány r esetén szemléltetjük az id^r függvényeket (II.7. ábra).
9. Végül legyen $\mathrm{id}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^0(x) := 1$. Az id^0 monoton növő és monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (II.7. ábra).

II.1. Állítás. *A fent felsorolt* hatványfüggvények *folytonosak.*

Bizonyítás. Egész kitevőre adódik a az I.16. Átviteli elvből és a [Bevan2, III.25. Állítás]-ból. Valós kitevőre ld. az I.35. Következményt. □



II.7. ábra. Néhány hatványfüggvény

A hatványfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli pontokban meggondolni.

II.2. Állítás. *Ha n páros, akkor*

$$\begin{aligned}\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n &= \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty,\\ \lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} &= \lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0,\\ \lim_{0} \mathrm{id}^{-n} &= +\infty.\end{aligned}$$

Ha n páratlan, akkor

$$\begin{aligned}\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n = -\infty, &\quad \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty,\\ \lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} = &\lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0,\\ \lim_{0-} \mathrm{id}^{-n} = -\infty, &\quad \lim_{0+} \mathrm{id}^{-n} = +\infty.\end{aligned}$$

Továbbá, ha $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az $\mathbb{R}^+$-on értelmezett id^r *függvényre*

$$\begin{aligned}&\lim_{+\infty} \mathrm{id}^r = +\infty, \quad r > 0,\\ &\lim_{0+} \mathrm{id}^r = +\infty, \quad \lim_{+\infty} \mathrm{id}^r = 0, \quad r < 0.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Adódik az I.4. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából a megfelelő intervallumokon, ld. az I.31. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

II.2. Exponenciális és logaritmus függvények

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az a alapú *exponenciális függvény*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x. \tag{II.1}$$

   (a) $\exp_a$ szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,

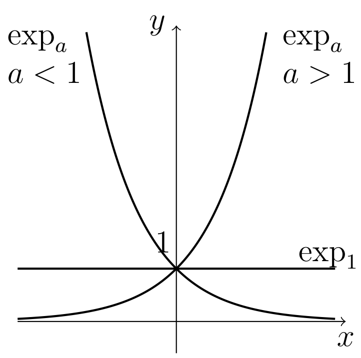
   (b) $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,

   (c) $\exp_a = \mathrm{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növő és monoton fogyó is) (II.8. ábra).

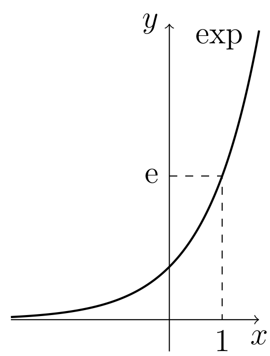
   Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $\mathcal{R}(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, vagyis az $\exp_a$ csak pozitív értéket vesz fel (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$

   (Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_{\mathrm{e}} =: \exp$ függvénynek (II.9. ábra), ahol e az ún. Euler-féle szám, amit a Bevezető analízis 2. kurzuson definiáltunk (ld. [Bevan2, III.14. Definíció]). Ezt szokás egyszerűen exponenciális függvénynek nevezni.



II.8. ábra. Különböző alapú exponenciális függvények



II.9. ábra. Az exponenciális függvény

2. Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel $\exp_a$ szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye:

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

   lesz az a alapú *logaritmusfüggvény* (II.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = y, \text{ amelyre } \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növő, ha $a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó.

A logaritmusfüggvények alapvető tulajdonságai a következők:

(a) bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

(b) bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $r \in \mathbb{R}$ esetén

$$\log_a x^r = r \log_a x,$$

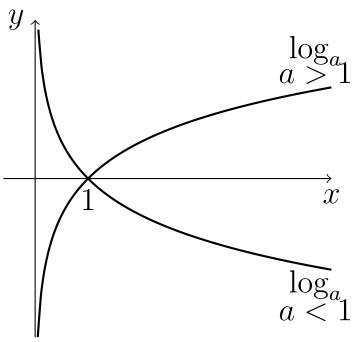
(c) bármely $a, b > 0, a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

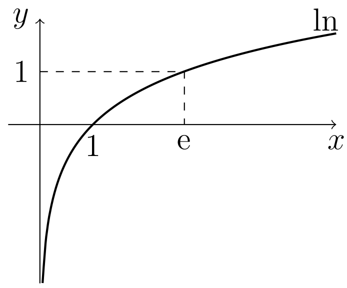
A (c) tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmusfüggvény számszorosaként az összes logaritmusfüggvény előáll. A matematikában kitüntetett szerepe van az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_{\mathrm{e}}$$

a „természetes alapú logaritmus” (II.11. ábra).



II.10. ábra. Különböző alapú logaritmusfüggvények



II.11. ábra. Természetes alapú logaritmusfüggvény

II.3. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén az* $\exp_a$ exponenciális függvény *folytonos.*

Bizonyítás. Ld. az I.33. Következményt. □

II.4. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén a* $\log_a = (\exp_a)^{-1}$ logaritmusfüggvény *folytonos.*

Bizonyítás. Következik az I.42. Tételből (intervallumon értelmezett folytonos függvény inverze is folytonos). □

Az exponenciális és logaritmusfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli pontokban meggondolni.

II.5. Állítás. *Bármely* $a > 1$ *esetén*

$$\lim_{+\infty} \exp_a = \lim_{+\infty} \log_a = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0, \quad \lim_{0+} \log_a = -\infty.$$

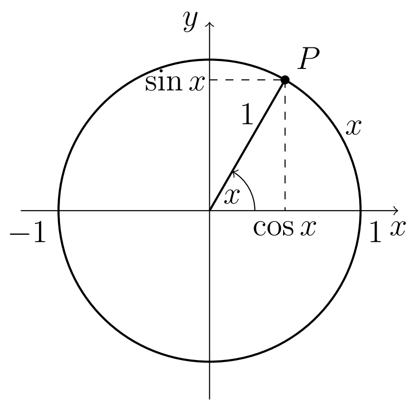
Bármely $0 < a < 1$ *esetén*

$$\lim_{-\infty} \exp_a = \lim_{0+} \log_a = +\infty,$$
$$\lim_{+\infty} \exp_a = 0, \quad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

Bizonyítás. Adódik az I.4. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából, ld. az I.31. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

II.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

1. A $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény precíz definícióját később tárgyaljuk. Itt most a középiskolából ismert definíciót ismételjük át. Vegyünk fel a síkon egy origó középpontú, 1 sugarú kört! Ahol a vízszintes tengely (pozitív fele) metszi a körvonalat (vagyis az

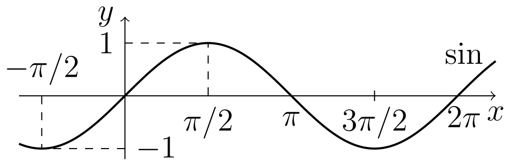


II.12. ábra. A sin és cos értelmezése

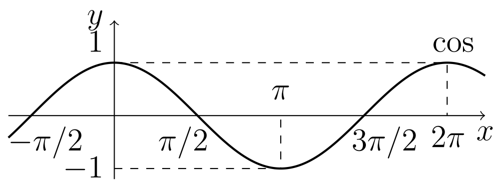
$(1, 0)$ pont), abból a pontból „mérjük fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő hosszúságú

ívet a kör kerületére", pozitív x esetén pozitív, negatív x esetén negatív irányítással. [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív P végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (II.12. ábra).
A sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (II.13. ábra). $\mathcal{R}(\sin) = [-1, 1]$.

2. Legyen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Könnyen látható, hogy ez a fenti módon definiált P pont első koordinátája lesz. A cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (II.14. ábra). $\mathcal{R}(\cos) = [-1, 1]$.



II.13. ábra. A sin függvény



II.14. ábra. A cos függvény

Alapvető összefüggések:

(a) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(b) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2,$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2.$$

3. Legyen

$$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos} \text{ és } \mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \ \mathcal{D}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

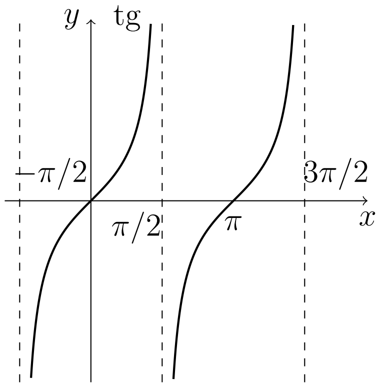
A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (II.15. és II.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelműek.

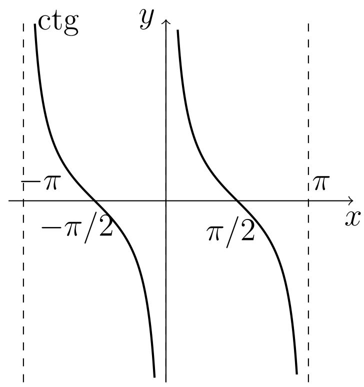
4. Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ leszűkítést! Ez a függvény szigorúan monoton növő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverzfüggvénye:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$

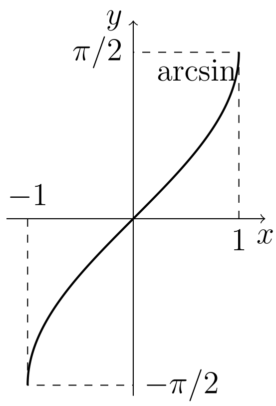
Az értelmezésből $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin \alpha = x$.
Az arcsin szigorúan monoton növő, páratlan függvény (II.17. ábra).



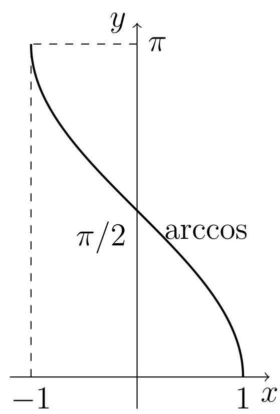
II.15. ábra. A tg függvény



II.16. ábra. A ctg függvény



II.17. ábra. Az arcsin függvény

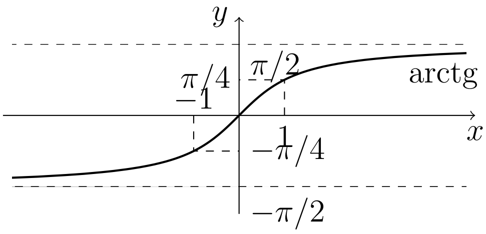


II.18. ábra. Az arccos függvény

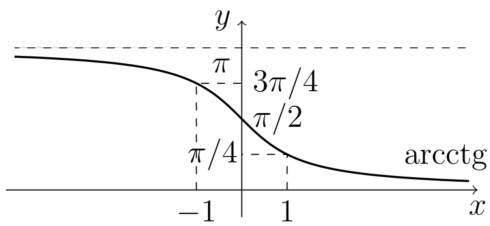
5. A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:
$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
Az értelmezésből következik, hogy $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos x = \alpha$, amelyre $\cos \alpha = x$. Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (II.18. ábra).

6. A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye:
$$\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}.$$
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{tg} \alpha = x$.
Az arctg szigorúan monoton növő, páratlan függvény (II.19. ábra).

7. A ctg függvény $(0,\pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:
$$\operatorname{arcctg} := \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{ctg} \alpha = x$.
Az arcctg szigorúan monoton fogyó függvény (II.20. ábra).



II.19. ábra. Az arctg függvény



II.20. ábra. Az arcctg függvény

II.6. Állítás. *A fentiekben felsorolt trigonometrikus függvények és inverzeik folytonosak.*

Bizonyítás. Az I.9. ábra alapján belátható $|x| < \frac{\pi}{2}$-re ($|x| > \frac{\pi}{2}$-re pedig triviális), hogy
$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Az I.16. Átviteli elvet alkalmazzuk. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Ekkor felhasználva, hogy $|\cos| \le 1$, kapjuk:
$$|\sin x_n - \sin x| = \left|2 \cdot \cos\frac{x_n + x}{2} \cdot \sin\frac{x_n - x}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x_n - x}{2}\right|.$$
A fenti egyenlőtlenség alapján
$$|\sin x_n - \sin x| \le 2\left|\frac{x_n - x}{2}\right| = |x_n - x| \to 0, \tag{II.2}$$
és ezt akartuk belátni.
Mivel
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
ezért az I.24. Tétel miatt cos is folytonos. A tg és ctg függvények így két folytonos függvény hányadosaként állnak elő, ezért folytonosak (ld. az I.17. Állítást). A trigonometrikus függvények inverzeinek folytonossága pedig az I.42. Tételből adódik. □

Könnyen meggondolható, hogy a sin és cos függvényeknek nincs határértékük $\pm\infty$-ben. Azonban érvényesek az alábbiak:

II.7. Állítás.

$$\begin{aligned}
\lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \operatorname{tg} &= +\infty, \quad \lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} = -\infty, \ k \in \mathbb{Z}, \\
\lim_{k\pi-0} \operatorname{ctg} &= -\infty, \quad \lim_{k\pi+0} \operatorname{ctg} = +\infty, \ k \in \mathbb{Z}, \\
\lim_{-\infty} \operatorname{arctg} &= -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{+\infty} \operatorname{arctg} = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{-\infty} \operatorname{arcctg} &= \pi, \quad \lim_{+\infty} \operatorname{arcctg} = 0.
\end{aligned}$$

II.4. Néhány különleges függvény

1. Legyen $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

az *abszolútérték-függvény* (II.21. ábra).

II.8. Állítás. *Az* abs *abszolútérték-függvény folytonos, továbbá*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{abs} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{abs} = +\infty.$$

Bizonyítás. Adódik az id és $-\,\mathrm{id}$ függvények megfelelő tulajdonságaiból. □

2. Legyen $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

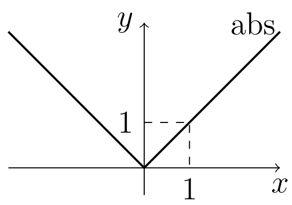
$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

az *előjelfüggvény (szignumfüggvény)* (II.22. ábra).

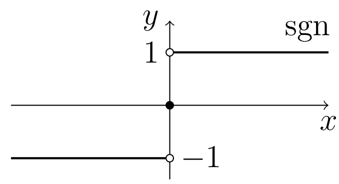
II.9. Állítás. *A* sgn *előjelfüggvény minden* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *pontban folytonos, továbbá*

$$\begin{aligned}
\lim_{-\infty} \mathrm{sgn} &= -1, \quad \lim_{+\infty} \mathrm{sgn} = 1 \\
\lim_{0-} \mathrm{sgn} &= -1, \quad \lim_{0+} \mathrm{sgn} = 1.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Adódik abból, hogy $\mathrm{sgn}|_{(-\infty,0)} \equiv -1$ és $\mathrm{sgn}|_{(0,+\infty)} \equiv 1$. □



II.21. ábra. Az abszolútérték-függvény



II.22. ábra. Az előjelfüggvény függvény

3. Legyen $\mathrm{ent} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{ent}(x) := [x]$ az *egészrészfüggvény*, ahol

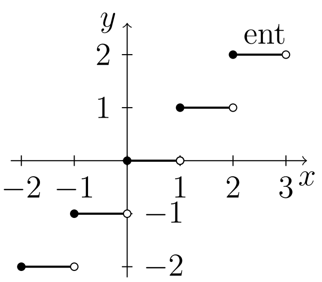
$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az x-nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.) (II.23. ábra) A definícióból könnyen adódik, hogy az alábbi teljesül.

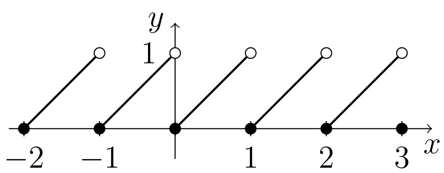
II.10. Állítás. *A* ent *egészrész függvény folytonos az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon, és jobbról folytonos minden $n \in \mathbb{Z}$ pontban. Továbbá,*

$$\lim_{n-} \mathrm{ent} = n - 1, \quad \lim_{n+} \mathrm{ent} = n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

4. Legyen a *törtrészfüggvény* $f(x) = \{x\} = x - [x]$, vagyis $f = \mathrm{id} - \mathrm{ent}$ (II.24. ábra).



II.23. ábra. Az egészrészfüggvény



II.24. ábra. A törtrészfüggvény

A definícióból könnyen adódik, hogy a törtrészfüggvény 1 (és így $n \in \mathbb{Z}$) szerint periodikus, valamint az alábbi teljesül.

II.11. Állítás. *A törtrészfüggvény folytonos az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon, és jobbról folytonos minden $n \in \mathbb{Z}$ pontban. Továbbá,*

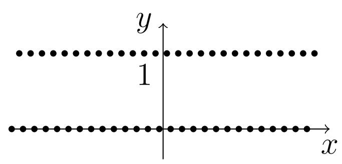
$$\lim_{x \to n-} \{x\} = 1, \quad \lim_{x \to n+} \{x\} = 0, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Az előbbi függvények talán még nem is voltak annyira különlegesek, hiszen mindenki találkozott velük középiskolában. A most következő két függvény azonban már joggal nevezhető „különlegesnek”, gyakran fordulnak elő különböző ellenpéldák kapcsán. Az első függvény Lejeune Dirichlet (1805–1859) német matematikus egy 1829-es cikkéből[1] származik. Szintén az ő nevéhez kapcsolható a modern függvényfogalom (vagyis függvény = egyértelmű hozzárendelés) első megfogalmazása.[2]

5. * Legyen $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

amelyet *Dirichlet-függvény*nek nevezünk, és a II.25. ábra szemlélteti. A Dirichlet-függvény (egyik) érdekessége, hogy minden valós szám *minden* környezetében felveszi a 0 és az 1 értéket is (ld. az Archimédeszi axióma következményét). Könnyen látható, hogy D minden $q \in \mathbb{Q}$ szerint periodikus.



II.25. ábra. A Dirichlet-függvény

II.12. Állítás. *A Dirichlet-függvény egyetlen $x \in \mathbb{R}$ pontban sem folytonos, és egyetlen pontban sem létezik sem jobb, sem bal oldali határértéke.*

Bizonyítás. Az Archimédészi axióma következményeként belátott [Bevan2, II.9. Állítás] alapján tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számhoz található hozzá balról ill. jobbról tartó, kizárólag racionális számokból és kizárólag irracionális számokból álló sorozat is. Ebből az állítás adódik. □

A másik függvényt gyakran Riemann-függvény néven emlegetik, azonban először Karl Thomae írta le 1875-ben, több évvel Bernhard Riemann (1826–1866) halála után. [3]

[1] G. L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. reine angew. Math.* **4** (1829), 157–169.

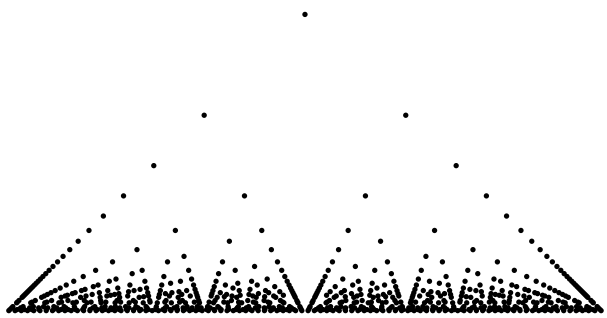
[2] G. L. Dirichlet, Die Darstellung ganz willkürchlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus reihen, *Repert. Math. und Phys.* I (1837), 152–174.

[3] K. J. Thomae, *Einleitung in die Theorie des bestimmten Integrale*, Halle, 1875, 14. oldal.

6. * Legyen $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \mathrm{lnko}(p, q) = 1. \end{cases}$$

A függvényt *Riemann-függvény*nek szokás nevezni (II.26. ábra). Ennek a függvénynek az az (egyik) érdekessége, hogy minden pont *minden* környezetében felvesz tetszőlegesen *kis* értéket, hiszen minden intervallumban van tetszőlegesen *nagy* nevezőjű racionális szám.



II.26. ábra. A Riemann-függvény a $(0, 1)$ intervallumon

Könnyen látható, hogy a Riemann-függvény 1 (és így $n \in \mathbb{Z}$) szerint periodikus.

II.13. Állítás. *A Riemann-függvény minden $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ helyen folytonos, az $x \in \mathbb{Q}$ helyeken nem folytonos.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

III. fejezet

Differenciálhatóság

III.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése

Vizsgáljunk meg két egyszerű függvényt: $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := x^2$, és $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := |x|$. Rögzítsük az $a := 0$ pontot! Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 is páros; alulról korlátos és felülről nem korlátos; a pozitív számok halmazán növekvő, a negatív számok halmazán fogyó; az $a = 0$ pontban minimuma van, és a minimum értéke 0; az $a = 0$ pontban folytonos. Szembetűnő a sok hasonlóság ellenére, hogy az $a = 0$ pontban az f_1 függvény sima, az f_2 függvénynek pedig törése van. Van-e olyan „műszer”, amely kimutatja, hogy egy függvény valamely pontban sima, egy másik pedig nem?

Legyen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $a \in \mathcal{D}(f)$ egy rögzített pont. Az f függvény a-hoz tartozó *különbségihányados-függvénye* legyen a

$$K_a^f \colon \mathcal{D}(f) \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \quad K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

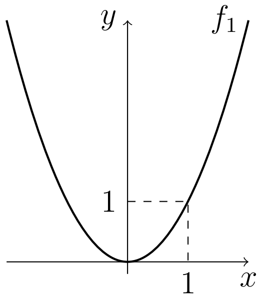
függvény. Vizsgáljuk meg ezzel a „műszerrel” az f_1 és f_2 függvényt az $a := 0$ pont esetén (III.1. és III.2. ábra)!
Az f_1 függvény esetén

$$K_0^{f_1}(x) = \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x.$$

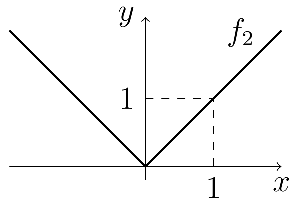
Az f_2 függvény esetén

$$K_0^{f_2}(x) = \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{III.1}$$

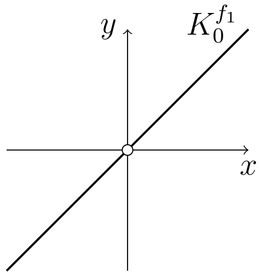
(ld. a III.3. és a III.4. ábrát!) Látjuk, hogy a sima f_1 függvény esetén van határértéke



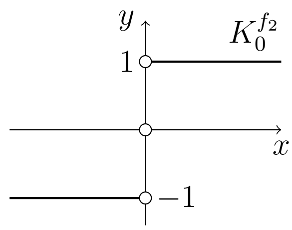
III.1. ábra. Az f_1 függvény



III.2. ábra. Az f_2 függvény



III.3. ábra. A $K_0^{f_1}$ függvény



III.4. ábra. A $K_0^{f_2}$ függvény

(folytonossá tehető) a $K_0^{f_1}$ különbségihányados-függvénynek a 0-ban, míg a töréssel rendelkező f_2 függvény $K_0^{f_2}$ különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0 pontban.

Ez a vizsgálat motiválja, hogy azokat a függvényeket, amelyek különbségihányados-függvényének van határértéke abban az a pontban, amelyhez tartozik (a példában $a = 0$), *differenciálható*nak fogjuk nevezni a-ban, és az a-beli *deriváltja* ezt a határértéket jelenti:

$$f'(a) \coloneqq \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

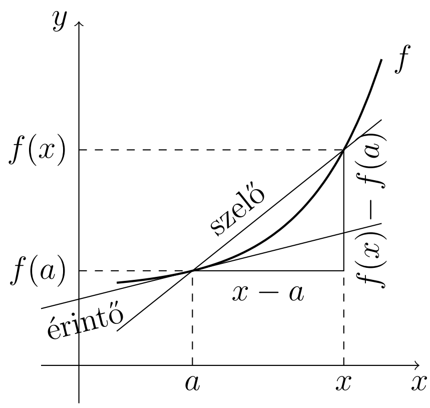
Honnan került elő az a „műszer”, amely alkalmas egy függvény simaságát kimutatni? Először egy geometriai megközelítést mutatunk be. A koordináta-rendszer $(a, f(a))$ és a tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes *meredeksége (iránytangense)*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(Ezt jelöltük $K_a^f(x)$-szel.)

Ha x tart az a-hoz, akkor (sima függvény esetén) a szelők tartanak egy határhelyzethez, amelyet *érintő*nek nevezünk, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez

(III.5. ábra). (Ezt a határértéket neveztük el deriváltnak.)



III.5. ábra. Szelő meredeksége

A másik egy fizikai interpretáció legyen. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Ha „minden határon túl” rövidítjük az időintervallumot, az átlagsebesség egy szám körül keveset ingadozik (feltéve, hogy sima volt az út-idő függvény), ezt a számot nevezzük *pillanatnyi sebesség*nek:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} =: v(t_0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

Látható, hogy a pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke és az út-idő függvény differenciálhányadosa: $s'(t_0) = v(t_0)$. Ez fizikailag tulajdonképpen azt jelenti, hogy a derivált az „utolsó mérhető egységre jutó megváltozás”.

III.2. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal

III.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a \in H$. Azt mondjuk, hogy *a belső pontja* a H halmaznak, ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, hogy $K(a) \subset H$.
A H halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{int} H$.

III.2. Példa. Legyen $H := [0, 1)$ intervallum. Ekkor $\operatorname{int} H = (0, 1)$ (nyílt) intervallum.

III.3. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható* az a pontban, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

vagyis ha az f függvény a-hoz tartozó K_a^f *különbségihányados-függvényének*, ahol

$$K_a^f\colon \mathcal{D}(f) \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \quad K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

létezik véges határértéke a-ban.[1]
Ha f differenciálható az a pontban, akkor

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Az $f'(a) \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli *differenciálhányados*ának vagy *derivált-já*nak[2] nevezzük.
Az $f'(a)$ helyett használatos még az $\dot{f}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=a}$, $Df(a)$ jelölés is.

III.4. *Megjegyzés.* A derivált definíciója ekvivalens módon így is írható:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

III.5. *Megjegyzés.* A derivált definíciójában szereplő határérték létezése és végessége egyaránt fontos. Vizsgáljuk meg az $f(x) := \sqrt[3]{x}$ függvény differenciálhatóságát az $a = 0$ pontban!

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Tehát, a különbségi hányados határértéke létezik, de $+\infty$, így ez a függvény nem differenciálható a 0-ban.

A fenti III.5. ábra alapján meggondoltak szerint az $f'(a)$ szám a függvény grafikonjának, $\operatorname{graph}(f)$-nek $(a, f(a))$ pontjához húzott érintőjének a meredeksége. Ennek megfelelően definiálhatjuk az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban differenciálható f függvény a pontbeli érintőjét.

III.6. Definíció. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az *f függvény a pontbeli érintője* az alábbi egyenlettel meghatározott egyenes:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a). \tag{III.2}$$

[1]Ez A. L. Cauchy francia matematikus definíciója 1821-ből.
[2]Jelentése: származtatott (J. L. Lagrange, 1797.)

Az érintő tehát az $(a, f(a))$ ponton átmenő $f'(a)$ meredekségű egyenes.

III.7. *Megjegyzés.* Jelöljük el most az f függvény és az a pontbeli érintőjének különbségét r_a-val! Ekkor minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r_a(x). \tag{III.3}$$

A fenti egyenletet átrendezve kapjuk az r_a maradéktag egy fontos tulajdonságát, mégpedig

$$\lim_{x \to a} \frac{r_a(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Az (III.3) egyenlet a differenciálhatóság egy harmadik ekvivalens megfogalmazása, amely K. T. W. Weierstrass német matematikustól származik 1861-ből.

III.8. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha $x \neq a$, akkor

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

Mivel f differenciálható a-ban, ezért a jobb oldalnak, és így a bal oldalnak is létezik határértéke a-ban, mégpedig

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

A bal oldalt átrendezve kapjuk, hogy

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

és így f folytonos a-ban. □

III.9. *Megjegyzés.* Az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény folytonos az $a = 0$ pontban, de az (III.1) összefüggésben láttuk, hogy a 0-hoz tartozó különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0-ban, ezért f nem differenciálható a 0 pontban. A példa azt mutatja, hogy a tétel nem fordítható meg.

III.10. Definíció. Az f függvény *deriváltfüggvényé*nek nevezzük, és f'-vel jelöljük azt a függvényt, amely minden x pontban, melyben a függvény differenciálható, megadja az x-beli deriváltat. Tehát

$$\mathcal{D}(f') := \{x : f \text{ differenciálható } x\text{-ben}\}$$
$$f'(x) := \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

III.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonosan differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban*, ha az f' deriváltfüggvény létezik az a pont egy környezetében és folytonos a-ban. Az f függvény *folytonosan differenciálható*, ha $\mathcal{D}(f') = \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f' folytonos.

III.12. Példa. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$ függvény nem csak az $a = 0$ pontban tűnik simának (ld. az előző szakaszt). Legyen $a \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. Nézzük meg, hogy az f függvény a-hoz tartozó különbségihányadosának van-e határértéke a-ban! Egyszerűen látható, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a,$$

tehát f differenciálható a-ben és $f'(a) = 2a$, vagyis a deriváltfüggvényre $(\mathrm{id}^2)' = 2 \cdot \mathrm{id}$.

III.3. Műveletek differenciálható függvényekkel

III.13. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f+g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Bizonyítás. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(g)$ is teljesül, ezért léteznek $K_1(a) \subset \mathcal{D}(f)$ és $K_2(a) \subset \mathcal{D}(g)$ környezetek. Véve a két környezet közül a szűkebbet, az része $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(f+g)$-nek. Tehát $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f+g)$ teljesül.
A definíció és az összeg határértékére vonatkozó összefüggés alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a) + g'(a).
\end{aligned}$$

□

III.14. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor λf is differenciálható a-ban, és*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Bizonyítás. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\lambda \cdot f)$, ezért $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(\lambda \cdot f)$.
Ismét a definíció és a konstansszoros határértékére vonatkozó összefüggés alapján

$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \lambda \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda \cdot f'(a).$$

□

III.15. Következmény. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f - g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a III.13 és a III.14 Tételeket f-re és g-re, valamint $\lambda = -1$-re. □

III.16. Tétel (Leibniz-szabály)**.** *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, ezért $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \cdot g)$ teljesül, ld. a III.13. Tétel bizonyítását.
Az előbbiekhez hasonlóan

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. a III.8 Tételt), így $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. □

III.17. Tétel. *Ha g differenciálható a-ban és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is differenciálható a-ban, és*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. a III.8 Tételt). Így a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(g)$ környezet, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) \neq 0$, tehát $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}\left(\frac{1}{g}\right)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a} \left(-\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}\right) \\ &= -g'(a) \cdot \frac{1}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

□

III.18. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, és a feltételek szerint $\frac{1}{g}$ differenciálható a-ban, ezért a szorzatfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt $\frac{f}{g}$ differenciálható a-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

III.19. Tétel. *Tegyük fel, hogy g differenciálható a-ban és f differenciálható $g(a)$-ban. Ekkor $f \circ g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Először gondoljuk meg, hogy a feltételekből következik:

$$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g) = \operatorname{int} \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Mivel $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, ezért $\exists \varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f)$. Másrészt g differenciálható a-ban, ezért folytonos is a-ban, így $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(g) \Longrightarrow g(x) \in K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f). \tag{III.4}$$

Tudjuk, hogy $\exists \rho > 0 : K_\rho(a) \subset \mathcal{D}(g)$. Jelölje $r := \min\{\delta, \rho\}$. Ekkor (III.4) alapján

$$x \in K_r(a) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(g),\ g(x) \in \mathcal{D}(f) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(f \circ g),$$

így $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g)$ teljesül.
A derivált képletének bizonyításához próbáljuk meg átalakítani az $f \circ g$ függvény a pontbeli különbségi hányadosát az alábbi módon:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{III.5}$$

A probléma az, hogy előfordulhat, hogy az a ponthoz tetszőlegesen közel van olyan x, melyre $g(x) = g(a)$ teljesül – így az átalakítás nem feltétlenül végezhető el az a pont egy környezetében, 0-val ugyanis nem oszthatunk. Ehelyett a következőképpen kell eljárnunk. Definiáljuk a F függvényt az alábbi módon:

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}, & \text{ha } y \neq g(a); \\ f'(g(a)), & \text{ha } y = g(a). \end{cases} \tag{III.6}$$

A feltétel szerint f differenciálható $g(a)$-ban, ezért F folytonos $g(a)$-ban. Ugyanis, a definíció alapján F-nek a $g(a)$-beli helyettesítési értéke, $f'(g(a))$ megegyezik a $g(a)$-ban vett határértékével. Ennek segítségével a fenti (III.5) átalakítás helyesen így végezhető el:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = F(g(x)) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \tag{III.7}$$

Ugyanis, ha valamely x esetén $g(x) \neq g(a)$ teljesül, akkor (III.7) adódik az (III.5) átalakításból. Ha pedig valamely x esetén $g(x) = g(a)$ teljesül, akkor az (III.7) egyenlőség bal oldalán 0 áll, a jobb oldalán pedig $f'(g(a)) \cdot 0 = 0$ alapján szintén 0 áll – tehát az egyenlőség ez esetben is igaz.

Végezzük el most az (III.7) egyenlőség mindkét oldalán az $x \to a$ határátmenetet! Mivel g folytonos a-ban és F folytonos $g(a)$-ban, ezért a kompozíciófüggvény folytonosságáról szóló I.24. Tétel alapján a jobb oldal első tényezője $F(g(a)) = f'(g(a))$-hoz tart. A második tényező határértéke pedig definíció szerint $g'(a)$. Így

$$\exists\ (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

□

A következő tétel az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szól. Fontos megjegyeznünk, hogy a tétel állításai közül a leglényegesebb maga a derivált létezése, mert a derivált képlete azonnal adódik a kompozíciófüggvény deriválási szabályából. Ugyanis, az

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

egyenlőség mindkét oldalát deriválva, a III.19 Tétel alapján

$$f' \circ f^{-1} \cdot (f^{-1})' = 1 \Longrightarrow (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

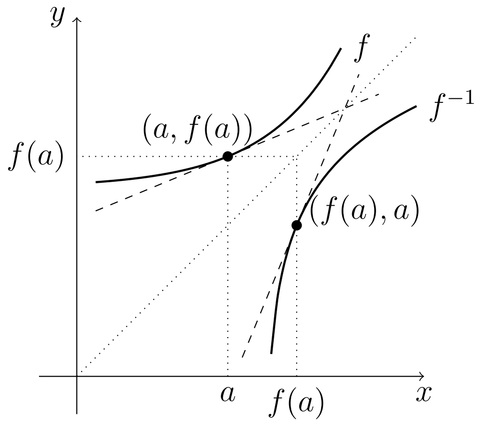
ami éppen (III.8).

III.20. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I$, f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$. Ekkor f^{-1} differenciálható a $b := f(a)$ pontban, és*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}, \tag{III.8}$$

másképp

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$



III.6. ábra. Inverzfüggvény deriváltja

Bizonyítás. *A szigorú monotonitás miatt a folytonos f függvény injektív, így az I.42. Tétel miatt létezik az $f^{-1}\colon J \to I$ inverzfüggvény, ahol $\mathcal{D}(f^{-1}) = J$ is nyílt intervallum, tehát $b \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f^{-1})$. Az f^{-1} függvény b pontbeli differenciálhatóságához meg kell mutatni, hogy létezik a

$$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$$

határérték és ez valós szám.

Legyen $(y_n) \subset J,\ y_n \to b,\ y_n \neq b$ tetszőleges sorozat. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$. Az $(x_n) \subset I$ sorozat konvergens, és $\lim x_n = a$, mert az inverzfüggvény folytonosságáról szóló tétel és az átviteli elv szerint

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b), \text{ azaz } x_n \to a.$$

Továbbá $x_n \neq a$ is teljesül f^{-1} injektivitása miatt. Ezért

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} \to \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f'(a) \neq 0$. Mivel bármely $(y_n) \subset J,\ y_n \to b$ esetén az $(\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b})$ sorozat konvergens, ezért a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$$

határérték. Így f^{-1} differenciálható b-ben, és az is látható, hogy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

$\square$

III.21. *Megjegyzés.* A tétel állítását jól szemlélteti a III.6. ábra: ha az érintőt tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor a meredekség a reciprokára változik.

III.4. Elemi függvények deriváltja

1. $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$, ahol $c \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{c}$ az $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ hozzárendeléssel megadott konstans függvényt jelöli.

   Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{c - c}{t - x} = \lim_{t \to x} 0 = 0.$$

$\square$

2. $(\mathrm{id}^n)' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

   Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{t \to x} \frac{\mathrm{id}^n(t) - \mathrm{id}^n(x)}{t - x} &= \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t - x)(t^{n-1} + t^{n-2}x^2 + \cdots + tx^{n-2} + x^{n-1})}{t - x} \\ &= \lim_{t \to x}(t^{n-1} + t^{n-2}x^2 + \cdots + tx^{n-2} + x^{n-1}) = n \cdot x^{n-1} = n \cdot \mathrm{id}^{n-1}(x).\end{aligned}$$

$\square$

3. $\sin' = \cos$

   Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} &= \lim_{t \to x} \frac{2 \sin \frac{t-x}{2} \cos \frac{t+x}{2}}{t - x} \\ &= \lim_{t \to x} \left(\frac{\sin \frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \cos \frac{t + x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

   Az átalakítás során a trigonometrikus függvények addíciós tételeinek egy következményét, valamint a cos függvény folytonosságát használtuk. Mivel $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, ezért $t \to x$ esetén az $u := \frac{t-x}{2} \to 0$, így

$$\lim_{t \to x} \frac{\sin \frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = 1.$$

$\square$

4. $\cos' = -\sin$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

5. $\mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$

   Bizonyítás. A hányadosfüggvény deriválási szabályából (III.18. Tétel):

$$\mathrm{tg}' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cdot \cos - \cos' \cdot \sin}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

$\square$

6. $\mathrm{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

7. $\log_a' = \frac{1}{\mathrm{id} \cdot \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, speciálisan: $\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$

   Gondoljuk meg először az alábbit.

III.22. Állítás.

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

Bizonyítás. Legyen először $t_n \to 0$, $t_n > 0$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $(\frac{1}{t_n})$ sorozat $+\infty$-hez tart. Az I.5. alfejezet 9. pont alapján

$$(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{t_n}}\right)^{\frac{1}{t_n}} \to \mathrm{e}, \quad n \to +\infty,$$

tehát a jobb oldali határérték e. Ugyanígy igazolható, hogy a bal oldali határérték is e. $\square$

Bizonyítás. Mivel $\log_a$ folytonos, ezért alkalmazva az I.25. Tétel 1. pontját és a fenti határértéket:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t}} = \log_a \mathrm{e} = \frac{1}{\ln a}. \tag{III.9}$$

Használjuk fel, hogy

$$t \to x \iff \frac{t}{x} - 1 \to 0.$$

Az I.25. Tétel 2. pontja és az (III.9) határérték alapján

$$\lim_{t\to x}\frac{\log_a t-\log_a x}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\frac{t}{x}}{\frac{t}{x}-1}$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\lim_{t\to x}\frac{\log_a(1+\frac{t}{x}-1)}{\frac{t}{x}-1}=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

□

8. $\exp_a'=\exp_a\cdot\ln a\quad(a>0)$, speciálisan: $\exp'=\exp$

   Bizonyítás. Az inverzfüggvény deriválási szabálya (III.20. Tétel) és a 7. pont alapján
$$\exp_a'(x)=\frac{1}{\log_a'(\exp_a(x))}=\exp_a(x)\cdot\ln a.$$
□

9. $(\mathrm{id}^\alpha)'=\alpha\cdot\mathrm{id}^{\alpha-1}\quad(\alpha\in\mathbb{R})$

   Bizonyítás. Mivel az id^α függvény csak a pozitív félegyenesen van értelmezve, ezért érvényes a következő átírás:
$$x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\cdot\ln x},$$
   ebből a kompozíciófüggvény deriválási szabálya (III.19. Tétel) alapján
$$(x^\alpha)'=\mathrm{e}^{\alpha\cdot\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$
□

10. $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$

   Bizonyítás. Az inverzfüggvény deriválási szabálya (III.20. Tétel) és a 3. pont alapján:
$$\arcsin' x=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
   mivel $\cos|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}>0$. □

11. $\arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. □

12. $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya (III.20. Tétel) és a 5. pont alapján:

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\cos^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2}$, ami könnyen adódik a $\sin^2 + \cos^2 = 1$ azonosságból, ha mindkét oldalt osztjuk $\cos^2$-el. $\square$

13. $\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

III.5. Lokális szélsőérték és a derivált

III.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban *lokális minimuma* van (vagy a *lokális minimumhelye* f*-nek*), ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, amelyre $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \geq f(a)$ teljesül.
Az f-nek a-ban *szigorú lokális minimuma* van, ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, amelyre $\forall x \in K(a),\ x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.
Az f függvénynek az a pontban *lokális maximuma* van (vagy a *lokális maximumhelye* f*-nek*), ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ teljesül.
Az f-nek a-ban *szigorú lokális maximuma* van, ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, amelyre $\forall x \in K(a),\ x \neq a$ esetén $f(x) < f(a)$.
A lokális minimum és a maximum közös elnevezése *lokális szélsőérték.*

III.24. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $f'(a) > 0$ (az $f'(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

amiből a határérték definíciója alapján következik, hogy a-nak létezik olyan kipontozott $\dot{K}(a)$ környezete, amelyre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \qquad \text{ha } x \in \dot{K}(a).$$

Ez azonban azt jelentené, hogy $x \in \dot{K}(a)$, $x > a$ esetén $f(x) > f(a)$ kellene legyen, $x \in \dot{K}(a)$, $x < a$ esetén pedig $f(x) < f(a)$ kellene legyen. Ezért f-nek nem lehetne lokális szélsőértéke a-ban. □

Vigyázat! A fenti tétel csak szükséges feltételt ad lokális szélsőérték létezésére, és nem fordítható meg!

III.25. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért $f'(0) = 0$, de f-nek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

III.6. Középértéktételek

A differenciálszámítás középértéktételei olyan függvényekről szólnak, amelyek egy $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon folytonosak, az intervallum belsejében pedig differenciálhatók.

III.26. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az* $A \subset \mathcal{D}(f)$ *halmazon*, ha $\forall a \in A$ esetén f differenciálható a-ban.

III.27. Tétel (Rolle-tétel)**.** *Legyen f olyan függvény, amely folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $c \in (a, b)$ pont, amelyre $f'(c) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b)$, azaz f konstansfüggvény, akkor bármely $c \in (a, b)$ megfelel.
Ha $\exists x_0 \in (a, b)$, hogy $f(x_0) \neq f(a)$, akkor mivel f folytonos az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon, ezért az I.40. Weierstrass-tétel szerint van (abszolút) minimuma és maximuma is $[a, b]$-n. A feltétel szerint $f(a) = f(b)$ és f nem konstans függvény, ezért a szélsőértékek közül legalább az egyiket az intervallum belsejében veszi fel. Legyen ez a pont $c \in (a, b)$. Ekkor c lokális szélsőértékhely, így a III.24. Tétel szerint $f'(c) = 0$. □

III.28. Tétel (Lagrange-középértéktétel)**.** *Legyen f olyan függvény, amely folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n. Ekkor létezik olyan $c \in (a, b)$ pont, amelyre*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \right)$$

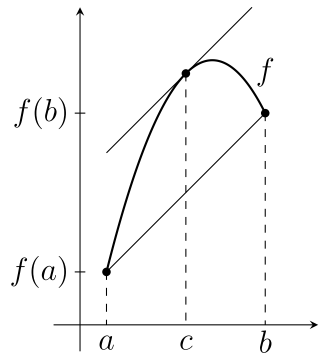
függvényt! Könnyű ellenőrizni, hogy $h(a) = h(b) = 0$. Továbbá h folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n. Így a III.27. Rolle-tétel szerint létezik olyan $c \in (a, b)$ pont, amelyre $h'(c) = 0$. Mivel $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ minden $x \in (a, b)$ esetén, ezért

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

amiből

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

következik. □



III.7. ábra. Lagrange-középértéktétel

III.29. *Megjegyzés.* A III.7. ábra alapján jól látható a tétel szemléletes jelentése. Az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hányados az $(a, f(a)$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr meredeksége. A tétel azt mondja, hogy van olyan $c \in (a, b)$ pont, ahol a függvény grafikonjának az érintője párhuzamos a húr egyenesével. A bizonyításban szereplő h függvény éppen az f és a húr egyenesének egyenlete különbsége. Ahol ennek értéke a legnagyobb, ott h deriváltja 0, és éppen ez a keresett c pont.

A Lagrange-középértéktétel következménye az is, hogy intervallumon differenciálható függvény pontosan akkor konstans, ha deriválja 0.

III.30. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f pedig olyan függvény, amely differenciálható I-n. Ekkor ekvivalenesek:*

1. *Létezik $c^* \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = c^*$ azaz f konstans az I intervallumon.*

2. *Minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. : Triviális. 2. $\Rightarrow$ 1. : Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A III.28. Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $c \in (x_1, x_2)$ pont, amelyre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0,$$

azaz $f(x_1) = f(x_2)$. □

III.31. *Megjegyzés.* A tétel intervallumon differenciálható függvényről szól. Például az $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{ha } 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvényre $\forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ esetén $f'(x) = 0$, de a függvény mégsem konstansfüggvény.

III.7. A monotonitás szükséges és elégséges feltételei

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy (nyílt) intervallumon értelmezett differenciálható függvények monotonitása hogyan függ össze a derivált tulajdonságaival.

III.32. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I-n, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Ekkor f szigorúan monoton növő (fogyó) az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A III.28. Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $c \in (x_1, x_2)$ pont, amelyre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Ha $f'(c) > 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$. Ha pedig $f'(c) < 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) < 0$, azaz $f(x_1) > f(x_2)$. Mivel x_1 és x_2 tetszőleges volt, ezzel az állítást beláttuk. □

A fenti tétel csak elégséges feltételt ad differenciálható függvény szigorú monotonitására.

III.33. Példa. Tekintsük ismét az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt! Világos, hogy f szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, mégis $f'(0) = 0$.

Függvény (nem feltétlenül szigorú) monotonitására az alábbi szükséges és elégséges feltétel adható.

III.34. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) f monoton növő (fogyó) I-n;

(ii) minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha f monoton növő I-n, akkor tetszőleges $t, x \in I$, $t \neq x$ esetén

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ezért bármely $x \in I$ pontra

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

A monoton fogyó eset hasonlóan látható.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Az előző III.32. Tétel bizonyításával analóg módon igazolható a III.28. Lagrange-középértéktétel segítségével. □

A III.34 Tétel és a korábban bizonyított III.30 Állítás alapján a függvény szigorú monotonitására is adható szükséges és elégséges feltétel.

III.35. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *f szigorúan monoton növő (fogyó) I-n;*

2. *minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) és nincs olyan részintervalluma I-nek, melyen $f' = 0$ lenne.*

Bizonyítás. A III.34. Tételből és a III.30. Állításból következik, a részleteket az olvasóra bízzuk. □

III.36. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I-n és $a \in I$. Ha létezik $\delta > 0$, hogy $f'|_{(a-\delta,a]} \geq 0$ és $f'|_{[a,a+\delta)} \leq 0$, akkor az a pont lokális maximumhelye f-nek. Ha pedig létezik $\delta > 0$ $f'|_{(a-\delta,a]} \leq 0$ és $f'|_{[a,a+\delta)} \geq 0$, akkor az a pont lokális minimumhely.*

Bizonyítás. A III.34. Tételből adódik. □

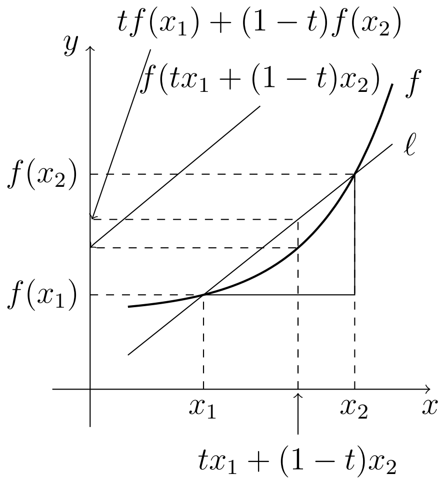
Az utóbbi állítás feltételeiből természetesen az is következik, hogy $f'(a) = 0$. Ha pedig a deriváltra (az a pont kivételével) szigorú egyenlőtlenségeket teszünk fel, akkor szigorú lokális szélsőértékhelyet kapunk a-ban.

III.8. Konvex és konkáv függvények

III.37. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *konvex függvény*, ha minden $x_1, x_2 \in I$ és minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2).$$

Vagyis f pontosan akkor konvex, ha grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a grafikon felett helyezkedik el (ld. a III.8 ábrát). Az f *konkáv függvény*, ha $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\geq$ áll.



III.8. ábra. Függvény konvexitása

III.38. *Megjegyzés.* Azt mondjuk, hogy f kielégíti a *Jensen-egyenlőtlenséget* I-n, ha

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Igazolható (nem könnyű!), hogy ha f kielégíti a Jensen-egyenlőtlenséget és folytonos I-n, akkor konvex I-n!

III.39. Definíció. Tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $x_1 \neq x_2$ esetén jelölje

$$\ell_{x_1,x_2}(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{III.10}$$

Az ℓ_{x_1,x_2} függvény grafikonja éppen az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes (az f egy *szelője*).

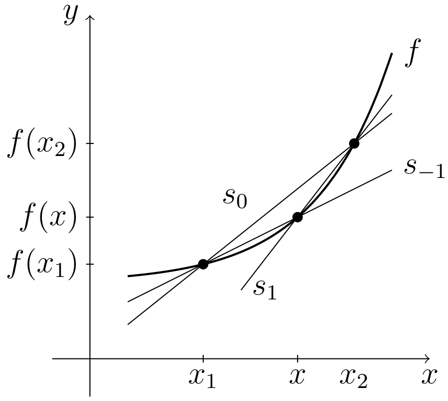
Az (III.10) jelöléssel világos, hogy f konvexitása éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$f(x) \leq \ell_{x_1,x_2}(x), \quad \forall x \in [x_1, x_2] \; (x \in [x_2, x_1]). \tag{III.11}$$

III.40. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *f konvex (konkáv) I-n;*
2. *f' monoton növő (fogyó) I-n.*

Bizonyítás. * 1. ⇒ 2. : Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tetszőleges. A megfelelő szelők



III.9. ábra. Konvex függvény szelői

meredekségeiről könnyen látható (ld. az (III.11) egyenlőtlenség átrendezését, ill. a III.9. ábrát), hogy

$$s_{-1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq s_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq s_1 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Ebből $x \to x_1$, ill. $x \to x_2$ határátmenet után kapjuk, hogy

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \tag{III.12}$$

amiből $f'(x_1) \leq f'(x_2)$,tehát f' monoton növő.
2. ⇒ 1. : Tegyük fel, hogy f' monoton növő, és rögzítsük az $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pontokat! Legyen $x \in (x_1, x_2)$ tetszőleges. A III.28. Lagrange-középértéktétel alapján létezik olyan $u \in (x_1, x)$ és $v \in (x, x_2)$, melyre

$$f'(u) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(v) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Felhasználva f' monotonitását, kapjuk, hogy $f'(u) \leq f'(v)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ezt az összefüggést átrendezve, éppen az (III.11) egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel x_1 és x_2 tetszőleges volt, ebből adódik f konvexitása. □

III.41. *Megjegyzés.* Az (III.12) egyenlőtlenségek átrendezésével könnyen adódik az is, hogy a fenti feltételek bármelyike ekvivalens azzal, hogy az f függvény érintője minden pontban a függvény grafikonján vagy alatta helyezkedik el.

III.42. *Megjegyzés.* Meggondolható (nem könnyű), hogy ha f konvex az I *nyílt* intervallumon, akkor folytonos is I-n.

III.43. Definíció. Legyen I nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az $a \in I$ pontban, ha f differenciálható az a egy környezetében és az ott létező f' deriváltfüggvény differenciálható a-ban – vagyis $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f')$ és f' differenciálható a-ban. Az f *kétszer differenciálható* az I intervallumon, ha f differenciálható I-n és f' is differenciálható I-n.

III.44. Tétel. *Legyen f kétszer differenciálható I-n. Ekkor ekvivalensek:*

1. *f konvex (konkáv) I-n;*
2. *$\forall x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).*

Bizonyítás. A III.34. és a III.40. Tételből következik. □

III.45. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvénynek *inflexiós pontja* (vagy f-nek *inflexiója* van a-ban), ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f|_{(a-\delta,a]}$ konvex és $f|_{[a,a+\delta)}$ konkáv, vagy fordítva. Vagyis röviden, ha f differenciálható a-ban és f az a-ban *konvexitást vált.*

III.46. *Megjegyzés.* Sok tankönyvben a fenti definíció helyett az áll, hogy az a pont inflexiós pontja f-nek, ha f differenciálható a-ban, és a függvény grafikonja az a pont előtt és után a pontbeli érintő ellentétes oldalán helyezkedik el. Könnyen meggondolható, hogy az általunk kimondott definíció ennek egy speciális esete.

III.47. Tétel. *Legyen f differenciálható I-n és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Ha az a pont az f függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(a) = 0$.*

Bizonyítás. Az inflexiós pont definíciója és a III.40. Tétel alapján létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f'|_{(a-\delta,a]}$ monoton növő és $f'|_{[a,a+\delta)}$ monoton fogyó, vagy fordítva. Így a III.36. Állítás szerint az f' függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van, a III.24. Tétel miatt pedig ebből következik, hogy $f''(a) = 0$. □

Fontos, hogy - a lokális szélsőérték szükséges feltételéhez hasonlóan - ez a tétel sem megfordítható. Például, tekintsük az $f(x) = x^4$ hozzárendeléssel megadott függvényt, és legyen $a = 0$! Ekkor $f''(0) = 0$, de a 0 nem inflexiós pontja f-nek, hiszen $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát f konvex az egész számegyenesen.

III.48. Tétel. *Legyen f kétszer differenciálható I-n, $a \in I$. Ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f''|_{(a-\delta,a]} \geq 0$ és $f''|_{[a,a+\delta)} \leq 0$, vagy fordítva, akkor f-nek az a pont inflexiós pontja.*

Bizonyítás. A definíció, valamit a III.44. Tétel következménye. □

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény egy I intervallumon elsőfokú polinom, azaz $\exists A, B \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = Ax + B$, akkor f konvex és konkáv is az I bármely részintervallumán, ezért az I intervallum minden pontjában inflexiója van az f függvénynek.
A második derivált előjele a szélsőértékhely létezésére ad elégséges feltételt.

III.49. Tétel. *Legyen f differenciálható I-n, f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$. Ha $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), akkor f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van a-ban.*

Bizonyítás. Legyen $f''(a) > 0$. Ekkor a derivált definíciója és az $f'(a) = 0$ feltétel alapján

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a} = f''(a) > 0.$$

A határérték értelmezése alapján ebből következik, hogy a-nak létezik olyan kipontozott $\dot{K}_\delta(a)$ környezete, amelyre

$$\frac{f'(x)}{x - a} > 0, \qquad \text{ha } x \in \dot{K}_\delta(a).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $x \in \dot{K}_\delta(a)$, $x > a$ esetén $f'(x) > 0$, $x \in \dot{K}_\delta(a)$, $x < a$ esetén pedig $f'(x) < 0$. Így a III.32. Tétel szerint $f|_{(a-\delta,a)}$ szigorúan monoton fogyó, és $f|_{(a,a+\delta)}$ szigorúan monoton növő. Ezért f-nek szigorú lokális minimuma van a-ban (ld. a III.36. Állítás utáni megjegyzést).
Az $f''(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható. □

A fenti tétel állítása azonban nem megfordítható, és így nem mindig használható annak eldöntésére, hogy az adott pont (szigorú) lokális szélsőértékhely-e. Például, az $f(x) = x^4$ hozzárendeléssel definiált függvénynek szigorú lokális minimuma van 0-ban, de $f'(0) = f''(0) = 0$ teljesül.

Hogyan használhatjuk az eddigi eredményeket differenciálható függvények menetének vizsgálatához? Érdemes a gyakorlatokon konkrét feladatok megoldásában végigkövetni az alábbi lépéseket!
Legyen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, amely intervallumon vagy intervallumok unióján van értelmezve.

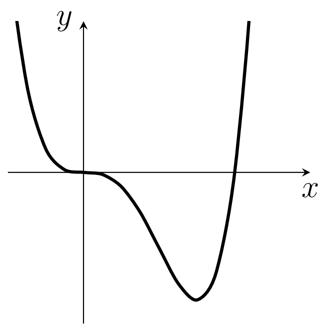
1. Meghatározzuk f értelmezési tartományát, $\mathcal{D}(f)$-et.
2. $\mathcal{D}(f)$ belső pontjaiban meghatározzuk az f' deriváltfüggvényt.
3. Megkeressük az f' zérushelyeit.
4. Kiszámítjuk az f'' második deriváltat.
5. Megkeressük az f'' zérushelyeit.
6. A függvény értelmezési tartományát az f' és az f'' zérushelyei nyílt intervallumokra szabdalják. Ezeken az intervallumokon megállapítjuk az f' és az f'' előjelét, amiből a monotonitási és alaki (konvexitás) viszonyokra következtetünk. Áttekinthetővé válik a vizsgálat egy táblázat elkészítésével.
7. Az előbbiek segítségével megállapítjuk, hogy f-nek hol van lokális szélsőértékhelye és inflexiós pontja.
8. Ha vannak, meghatározzuk a lokális maximum és minimum értékeit, valamint a függvényértéket az inflexiós pontokban.
9. Meghatározzuk $f(0)$-t és f zérushelyeit.
10. Kiszámoljuk a függvény határértékét (esetleg jobb oldali és bal oldali határértékét) az „érdekes" helyeken, $+\infty$-ben és $-\infty$-ben is (ha ott értelmezhető és létezik a határérték).
11. Vázoljuk a függvény menetét, és meghatározzuk, hogy melyik lokális szélsőérték abszolút.
12. Meghatározzuk f értékkészletét, $\mathcal{R}(f)$-et.

III.50. Példa. Végezzük el az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^3$$

függvény teljes vizsgálatát, majd készítsük el vázlatos grafikonját!

$\mathcal{D}(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$4x^3 - 6x^2$
$f'(x) = 0$, ha	$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$
$f''(x) =$	$12x^2 - 12x$
$f''(x) = 0$, ha	$x_1 = 0,\ x_3 = 1$
monoton nő:	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
szélsőérték:	$x_2 = \frac{3}{2},\ f(\frac{3}{2}) = -1.6875$ lokális és abszolút minimum
konvex:	$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
konkáv:	$(0, 1)$
inflexiós pontok:	$x_1 = 0,\ x_3 = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1$
zéruhelyek:	$f(x) = 0$, ha $x_1 = 0,\ x_4 = 2$
határértékek:	$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$
$\mathcal{R}(f) =$	$[-1.6875, \infty)$



III.10. ábra. Az $f(x) = x^4 - 2x^3$ függvény grafikonja

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[LTS07] Laczkovich M., T. Sós V., *Valós analízis I.,* TypoTeX, Budapest, 2012.

[MFS] Mezei I., Faragó I., Simon P., *Bevezetés az analízisbe,* elektronikus jegyzet. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Mezei_Bev_Anal.pdf

[Bevan2] Sikolya E., *Bevezető analízis 2 előadásjegyzet,* elektronikus jegyzet. https://sikolyaesz.web.elte.hu/oktatas/Bevezeto_analizis_2_jegyzet.pdf