Egyváltozós analízis 2 előadásjegyzet

Sikolya Eszter
2021/2022. tavaszi félév

2022. június 27.

Tartalomjegyzék

I. Taylor-polinom, L'Hospital-szabály **1**
I.1. A differenciálszámítás néhány alkalmazása 1
I.2. Taylor-polinom, Taylor-formula 3
I.2.1. Motiváció 3
I.2.2. Taylor-polinom és Taylor-formula 4
I.3. L'Hospital-szabály 8

II. Integrálszámítás **12**
II.1. Primitív függvény 12
II.1.1. Racionális törtfüggvények integrálása 19
II.2. Riemann-integrál 21
II.2.1. A Riemann-integrál definíciója 21
II.2.2. A Riemann-integrál tulajdonságai 32
II.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata 38
II.3.1. A Newton–Leibniz-tétel 38
II.3.2. Integrálfüggvények 40
II.4. A Riemann-integrál néhány alkalmazása 43

III. Sorok **46**
III.1. Végtelen sorok 46
III.2. Konvergenciakritériumok 51
III.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata 59
III.4. Taylor-sorok 62
III.5. A sorok néhány alkalmazásáról 66
III.5.1. Végtelen tizedestörtek 66
III.5.2. Az e szám irracionális 67

Tárgymutató **69**

Irodalomjegyzék **71**

I. fejezet

Taylor-polinom, L'Hospital-szabály

I.1. A differenciálszámítás néhány alkalmazása

I.1. Tétel. *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyek folytonosak $[a,b]$-n és differenciálhatók (a,b)-n. Tegyük fel, hogy $f(a) \le g(a)$ és $f'(x) \le g'(x)$ minden $x \in (a,b)$ esetén.*
Ekkor $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén teljesül.

Bizonyítás. Legyen $h(x) := g(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$. Ekkor a h függvényre $h(a) \ge 0$ és $h'(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$ teljesül. A [Egyvalt1, III.34. Tétel] szerint tehát h monoton növő (a,b)-n, ezért $h(a) \ge 0$ miatt $h(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$ is teljesül. A h függvény folytonosságából következik, hogy $h(b) \ge 0$ is igaz. Így $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$. □

I.2. *Megjegyzés.* Vigyázat! A fenti tétel állítása nem megfordítható! Tehát abból, hogy $f(x) \le g(x)$ nem következik, hogy $f'(x) \le g'(x)$.
Például, legyen

$$f(x) = 0,\ g(x) = x^2, \quad [a,b] = [-1,0].$$

Ekkor $f(x) \le g(x)$, $x \in [-1,0]$. Viszont $f'(x) = 0 > g'(x) = 2x$, $x \in (-1,0)$.

A tétel alkalmazásaként lássunk két fontos példát, amelyekre a félév végén ismét vissza fogunk térni.

I.3. Tétel. *Minden $x \ge 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek az alábbiak.*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \tag{I.1}$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} \le \operatorname{arctg} x \le x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{4n+1}. \tag{I.2}$$

Bizonyítás. Csak az I.1 első egyenlőtlenségét bizonyítjuk, a többi hasonlóan igazolható. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve, és definiálja

$$f(x) := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n}, \quad g(x) := \ln(1+x).$$

Azt kell belátnunk, hogy minden $x \geq 0$ esetén $f(x) \leq g(x)$. Világos, hogy

$$f(0) = 0 \leq g(0) = 0.$$

Továbbá,

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \cdots - x^{2n-1}, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Belátjuk, hogy $f'(x) \leq g'(x)$ teljesül minden $x > 0$-ra. Azt kell megmutatni, hogy

$$1 - x + x^2 - \cdots - x^{2n-1} \leq \frac{1}{1+x}, \quad x > 0.$$

Átszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(1+x)$-szel kapjuk, hogy

$$1 - x + x^2 - \cdots - x^{2n-1} + \left(x - x^2 + x^3 - \cdots + x^{2n-1} - x^{2n}\right) \leq 1.$$

Ezt átalakítva:

$$1 - x^{2n} \leq 1,$$

ami teljesül, ha $x \geq 0$. Mivel a fentiekben csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, ezért $f'(x) \leq g'(x)$ teljesül minden $x > 0$ esetén. Így alkalmazva az I.1. Tételt egy tetszőleges $[0, x]$ $(x > 0)$ intervallumon, kapjuk, hogy $f(x) \leq g(x)$, és ezt akartuk belátni. □

I.4. *Megjegyzés.* Az I.1 egyenlőtlenségekben $x = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \leq \ln 2 \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1},$$

amit a félév végén úgy fogunk írni, hogy

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{I.3}$$

Hasonlóan kapjuk az I.2 becslésekből (felhasználva, hogy $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$), hogy

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{I.4}$$

I.2. Taylor-polinom, Taylor-formula

I.2.1. Motiváció

Láttuk egy függvény első és második deriváltjának szerepét. Ezek általánosításaként vezessük be a magasabb rendű deriváltakat.

I.5. Definíció. Ha f' differenciálható a-ban, akkor $f''(a) := (f')'(a)$.
Ha f'' differenciálható a-ban, akkor $f'''(a) := (f'')'(a)$.
$\vdots$
Ha $f^{(k)}$ differenciálható a-ban, akkor $f^{(k+1)}(a) := (f^{(k)})'(a),\ k = 1, 2, \ldots$.
Ily módon definiálhatók a megfelelő $f^{(k)}$ deriváltfüggvények is, $k = 1, 2, \ldots$
Megjegyezzük, hogy vesszőkkel csak az első három deriváltat szokás jelölni, tehát $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Néha az $f^{(0)} := f$ megállapodás is hasznos.
Azt mondjuk, hogy f *akárhányszor differenciálható a-ban* (vagy *végtelen sokszor differenciálható* a-ban), ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $f^{(k)}(a)$.

Az „elég sima" függvényeket jól közelíthetjük polinomokkal. Azt már láttuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor a [Egyvalt1, (III.2)] egyenletű

$$e_a(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

érintőre

$$e_a(a) = f(a),$$

továbbá $e_a'(x) = f'(a)$, így $e_a'(a) = f'(a)$, azaz az e_a-nak és az f-nek az a-beli deriváltja is megegyezik.
Láttuk azt is [Egyvalt1, (III.3)] összefüggésben (Weierstrass differenciálhatóság-fogalma), hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - e_a(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a) \cdot (x - a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0, \tag{I.5}$$

ami azt fejezi ki, hogy az e_a érintőfüggvény olyan közelítése az f függvénynek, hogy ha az $f(x) - e_a(x)$ különbséget $(x - a)$-val elosztjuk, még ez a hányados is 0-hoz közeli, ha x közel van az a-hoz.

Az e_a érintőfüggvény csak egy legfeljebb elsőfokú polinom (egyenes egyenlete). Milyen legyen az a magasabb fokú polinom, amely a még pontosabb közelítést lehetővé teszi?

Legyen $P(x) := 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3$. Ekkor $P(0) = 3$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= -2 + 8x - 15x^2, & P'(0) &= -2, \\ P''(x) &= 8 - 30x, & P''(0) &= 8, \\ P'''(x) &= -30, & P'''(0) &= -30. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3,$$

azaz egy polinomot igen jól közelítettünk (ebben az esetben pontosan előállítottunk) egy olyan polinommal, amelynek együtthatói a függvény magasabbrendű deriváltjai egy pontban (most ez a pont a 0 volt), elosztva a derivált rendjének faktoriálisaival. Az előállítás tetszőleges polinomra elvégezhető.

I.6. Állítás (Maclaurin-formula)**.** *Legyen p tetszőleges n-edfokú polinom. Ekkor*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Bizonyítás. Legyen $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Ekkor p-nek a k-adik deriváltjára

$$p^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} a_j j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k},$$

tehát

$$p^{(k)}(0) = a_k \cdot k!,$$

amiből az állítás adódik. □

I.7. Következmény. *Legyen p egy n-edfokú polinom, $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz analóg módon végezhető, az olvasóra bízzuk. □

I.2.2. Taylor-polinom és Taylor-formula

I.8. Definíció. Legyen f az a pontban n-szer differenciálható függvény. Definiálja $T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}^f(x) = T_{n,a}(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{(I.6)}$$

az *f függvény a pont körüli (vagy a pontbeli) n-edik Taylor-polinomját*. Az I.7 Következmény alapján

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T'_{n,a}(a) = f'(a),\ T''_{n,a}(a) = f''(a), \ldots, T^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a). \quad \text{(I.7)}$$

Továbbá, $T_{0,a} = f(a)$ és $T_{1,a} = e_a$.

I.9. *Megjegyzés.* Az I.7 Következményből adódik az is, hogy ha egy legfeljebb n-edfokú p polinomra

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p''(a) = f''(a), \dots, p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

teljesül, akkor $p = T_{n,a}$.

A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n-edik Taylor-polinom mennyire jól közelíti a függvényt.

I.10. Tétel (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$ környezet, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható $K(a)$-ban. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $c = c(x)$ az a és az x között (vagyis, $c \in (a, x)$ vagy $c \in (x, a)$), hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{I.8}$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A félév végén foglalkozni fogunk a Taylor-polinomok végtelen összegre való általánosításával, az ún. Taylor-sorokkal (ld. a III.4. alfejezetet). Ezek előrevetítéseként igazoljuk az alábbit.

I.11. Következmény (Taylor-sorok kifejtési tétele)**.** *Legyen $\mathcal{D}(f) = I$ intervallum, f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$ rögzítve. Ha található olyan $C(x) \geq 0$ szám, hogy minden $c \in [a, x]$ (vagy $c \in [x, a]$) esetén*

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \leq C(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) \tag{I.9}$$

Bizonyítás. A feltétel szerint az (I.8) Taylor-formula maradéktagjára minden rögzített x esetén

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{C(x)}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \to 0,\ n \to \infty$$

teljesül, felhasználva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből az állítás adódik. □

A fenti (I.9) határértéket később az alábbi módon fogjuk írni:

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{I.10}$$

I.12. Példa. Írjuk fel néhány nevezetes függvény n-edik Taylor-polinomját a 0 körül!

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

   Könnyen meggondolható, hogy

   $$\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-\mathrm{id})^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}(0) = n!,$$

   tehát a 0 körüli Taylor-polinom együtthatóira

   $$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$$

   teljesül. Így

   $$T^f_{n,0}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

2. $f(x) = \mathrm{e}^x$

   Ismert, hogy $\exp' = \exp$, tehát

   $$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\mathrm{e}^0}{n!} = \frac{1}{n!},$$

   így

   $$T^f_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

3. $f(x) = \sin x$

   A sin függvény deriváltjai alapján

   $$\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} \sin 0 &= 0, \quad n = 4k; \\ \cos 0 &= 1, \quad n = 4k+1; \\ -\sin 0 &= 0, \quad n = 4k+2; \\ -\cos 0 &= -1, \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

   így

   $$T^f_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4. $f(x) = \cos x$

   A cos függvény deriváltjai alapján

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} \cos 0 &= 1, \quad n = 4k; \\ -\sin 0 &= 0, \quad n = 4k+1; \\ -\cos 0 &= -1, \quad n = 4k+2; \\ \sin 0 &= 0, \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

   így

$$T^f_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$

   Könnyen meggondolható, hogy

$$\ln(1+\mathrm{id})^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow \ln(1+\mathrm{id})^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

   Így

$$T^f_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Most gondoljuk meg, hogy az I.11. Következmény alkalmazható-e az előbbi függvények esetében, tehát igaz lesz-e, hogy f előáll a 0 körüli n-edik Taylor-polinomjainak határértékeként, vagyis

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T^f_{n,0}(x)?$$

Legyen tehát $a = 0$, és $x \in \mathbb{R}$ rögzítve. Ekkor ha $c \in [0, x]$ (vagy $c \in [x, 0]$), az I.12. Példában meggondoltak alapján minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$|\exp^{(n)}(c)| = \mathrm{e}^c \le \mathrm{e}^{|x|} =: C(x),$$
$$|\sin^{(n)}(c)| \le 1 =: C = C(x),$$
$$|\cos^{(n)}(c)| \le 1 =: C = C(x).$$

Ezért az exp, sin és cos függvényekre alkalmazható az I.11. Következmény, és az (I.10) jelölést használva

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Legyen $x \in (-1,1)$. Az

$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}(t) = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

és a

$$(\ln(1+\mathrm{id}))^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+t)^n}$$

deriváltakra nem tudunk az előbbiekhez hasonló egyenletes, csak x-től függő (de n-től független) becslést adni 0 és x között. Azonban középiskolából ismerős, hogy ha $x \in (-1,1)$, akkor a mértani sorozat összegképlete alapján, valamint felhasználva az $x^n \to 0$ nevezetes sorozathatárértéket,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}, \quad n \to \infty.$$

Tehát a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1$$

előállítás teljesül.
Később látni fogjuk, hogy az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény is előáll az (I.10) alakban.

Most kimondjuk azt az állítást, ami arról szól, hogy az f függvény Taylor-polinomja „jól” közelíti f-et az a pont közelében. Ezt az eredményt $n = 1$ esetében már bizonyítottuk, mivel $T_{1,a}(x) = e_a(x)$, ld. az (I.5) levezetést.

I.13. Tétel (Taylor-formula)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer differenciálható a-ban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{I.11}$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk ($n = 1$ eset volt). □

I.3. L'Hospital-szabály

A L'Hospital-szabály a „$\frac{0}{0}$” és a „$\frac{\infty}{\infty}$” alakú függvényhatárértékek kiszámításához ad segítséget. A bizonyításához szükségünk lesz a Lagrange-középértéktétel (ld. [Egyvalt1, III.28. Tétel]) következő általánosítára.

I.14. Tétel (Cauchy-középértéktétel)**.** *Legyenek az f és g függvények folytonosak $[a,b]$-n és differenciálhatók (a,b)-n, és tegyük fel, hogy $\forall x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$. Ekkor létezik olyan $c \in (a,b)$ pont, amelyre*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $g(b) = g(a)$ lenne, akkor a Rolle-tétel (ld. [Egyvalt1, III.27. Tétel]) miatt g' az (a, b) intervallum valamelyik pontjában 0 lenne, de ezt kizártuk. Így beszélhetünk az $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról.
Tekintsük most a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)) + f(a)\right)$$

függvényt! Könnyű ellenőrizni, hogy $h(a) = h(b) = 0$. Továbbá h folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\exists c \in (a, b)$ pont, amelyre $h'(c) = 0$. Mivel $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$ $(x \in (a, b))$, ezért

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c),$$

amiből $g'(c) \neq 0$ miatt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

következik. □

I.15. Tétel (L'Hospital-szabály)**.** *Legyenek az f és g függvények differenciálhatók az (α, β) intervallumon (ahol $\alpha, \beta = \pm\infty$ is lehet), és legyen $a \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = \lim_a g = 0$$

vagy

$$\lim_a g = +\infty \text{ vagy } -\infty,$$

továbbá $g' \neq 0$ az a pont egy kipontozott környezetében.
Ekkor ha létezik $\lim\limits_a \frac{f'}{g'}$, akkor létezik $\lim\limits_a \frac{f}{g}$ is, és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Abban a speciális esetben végezzük el a bizonyítást, amikor $a \in (\alpha, \beta)$, $f(a) = g(a) = 0$. Jelölje

$$\lim_a \frac{f'}{g'} =: L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a határérték definíciója szerint $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta(a) \subset (\alpha, \beta)$, $x \neq a$ esetén

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in K_\varepsilon(L).$$

Legyen $x \in K_\delta(a)$, $x \neq a$ tetszőleges. Az f és g függvényekre az I.14. Cauchy-középértéktételt alkalmazva $[a, x]$-en (vagy $[x, a]$-n) kapjuk, hogy $\exists c \in K_\delta(a)$ az a és x között, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in K_\varepsilon(L)$$

is teljesül, amiből a határérték definíciója alapján következik, hogy

$$\lim_a \frac{f}{g} = L.$$

□

I.16. *Megjegyzés.* A L'Hospital-szabály bizonyítása lényeges különbözik a fentitől a $\lim_a g = \pm\infty$ esetben.

I.17. Feladat. A L'Hospital-szabállyal számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

határértéket! Mind a számláló, mind a nevező 0-ban 0, ezért elég a deriváltak hányadosának a határértékét kiszámítani:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - \cos 3x)'}{(x^2)'} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4.\end{aligned}$$

Így

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4.$$

A deriváltak hányadosának határértékét szintén számolhattuk volna a L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 9\cos 3x}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4.$$

Ez az okoskodás azonban „farkába harapó kígyó" jellegű, hiszen a sin deriváltjának meghatározásakor (ld. [Egyvalt1, III.4.3]) éppen a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határértéket használtuk fel (amit a [Egyvalt1, I.5.11] szakaszban igazoltunk)...

Sajnos, még a L'Hospital-szabály sem tud minden „kritikus" határérték-feladatra könnyű választ adni.

I.18. Feladat. Mennyi a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

határérték? Könnyen látható, hogy

$$\lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = +\infty.$$

és $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})' = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \neq 0$, ha $x \neq 0$, tehát az I.15. Tétel feltételei teljesülnek.
Ha a deriváltakat nézzük, akkor

$$\lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})' = \lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})' = \lim_{x\to\infty} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = +\infty.$$

Ha ismét alkalmazni szeretnénk a l'Hospital-szabályt, és az előbbi függvények deriváltjait vizsgáljuk, akkor ugyanezeket a határértékeket kapjuk - tehát a hányados határértéke ismét $\frac{\infty}{\infty}$ alakú lesz. Ezért ilyen módon nem tudjuk kiszámítani a határértéket.
Megjegyezzük, hogy az eredeti hányadosban e^x-szel egyszerűsítve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1.$$

II. fejezet

Integrálszámítás

II.1. Primitív függvény

Ebben a szakaszban I nyílt intervallumot jelöl.

II.1. Definíció. Legyen f egy I intervallumon értelmezett függvény. Ha létezik olyan F az I-n differenciálható függvény, amelyre $F' = f$, akkor minden ilyen F függvényt az f függvény *primitív* (elsődleges vagy eredeti) *függvényé*nek vagy *határozatlan integrálj*ának nevezünk. Szokásos szóhasználat még az *antiderivált* is.

II.2. Állítás. *Ha F a f egy primitív függvénye I-n, akkor bármely c konstansfüggvény esetén*

$$(F + c)' = f,$$

így f-nek végtelen sok primitív függvénye van.

Bizonyítás. Triviális. □

II.3. Állítás. *Ha F a f egy primitív függvénye I-n, akkor f-nek minden más G primitív függvénye előáll $G = F + c$ alakban valamely c konstansfüggvényre.*

Bizonyítás. Az állítás feltételeiből következik, hogy

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

vagyis $(F - G)' = 0$ az egész I intervallumon. Ekkor a korábban belátott [Egyvalt1, III.30. Állítás] alapján $F - G$ konstansfüggvény, és ezt akartuk belátni. □

II.4. Definíció. Adott $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény esetén jelölje

$$\int f$$

(„integrál” f) az f függvény primitív függvényeinek halmazát I-n. Ha f-nek nincs primitív függvénye, akkor $\int f = \emptyset$. Ha f-nek van primitív függvénye, akkor láttuk, hogy

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\},$$

ahol F a f egy tetszőlege primitív függvénye.
Ha nem okoz félreértést, akkor $\int f$ minden elemét is az egyszerűség kedvéért $\int f$-fel jelöljük, tehát

$$\left(\int f\right)' = f.$$

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x)\,dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

II.5. Példa. Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor $\int \cos x\,dx = \{\sin x + c : \ c \in \mathbb{R}\}$, amit a megállapodás alapján úgy is írhatunk, hogy $\int \cos = \sin$.

Ha külön nem rögzítjük le az I intervallumot, akkor $\int f$ mindig egy lehető legbővebb intervallumon értendő, ahol f értelmezve van és létezik primitív függvénye (a primitív függvény(ek) megadásánál ez(eke)t az intervallumo(ka)t természetesen specifikálni kell).

*Alapintegrálok*nak nevezzük az elemi függvények deriváltjainak primitív függvényeit. Ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze. Itt használni fogunk egy kissé pontatlan, de elterjedt jelölést, mely a következőt jelenti. Tekintsük például az $1/\operatorname{id}$ függvényt! Ennek értelmezési tartománya ugyan nem intervallum, de felbomlik két intervallum, az $I_1 = (-\infty, 0)$ és az $I_2 = (0, \infty)$ diszjunkt uniójára. A függvénynek mindkét intervallumon van primitív függvénye:

$$\int \frac{1}{\operatorname{id}} \,|_{I_1} = \ln(-\operatorname{id}), \qquad \int \frac{1}{\operatorname{id}} \,|_{I_2} = \ln \operatorname{id}.$$

Ezt az egyszerűség kedvéért egy képletben fogjuk jelölni mint

$$\int \frac{1}{\operatorname{id}} = \ln|\operatorname{id}|.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a II.1 Definíció értelmében az $f = \frac{1}{\operatorname{id}}$ függvénynek az *egész* értelmezési tartományán nem értelmezhető primitív függvénye, hiszen $\mathcal{D}(f)$ nem intervallum. Ezért ez az egyenlőség ilyen értelemben megtévesztő. Azonban, az $\frac{1}{\operatorname{id}}\,|_{I_1}$ és az $\frac{1}{\operatorname{id}}\,|_{I_2}$ függvényeknek (vagy az $1/\operatorname{id}$ bármely, I_1-nél vagy I_2-nél szűkebb intervallumra való megszorításának) van primitív függvénye, és ezt hivatott kifejezni a fenti képlet.

$$\int \mathrm{id}^\alpha = \frac{\mathrm{id}^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{\mathrm{id}} = \ln|\,\mathrm{id}\,| \qquad \int \exp = \exp$$

$$\int \exp_a = \frac{\exp_a}{\ln a},\ (1 \neq a \in \mathbb{R}^+) \qquad \int \sin = -\cos \qquad \int \cos = \sin$$

$$\int \frac{1}{\cos^2} = \mathrm{tg} \qquad \int \frac{1}{\sin^2} = -\,\mathrm{ctg}$$

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{id}^2} = \mathrm{arctg} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{id}^2}} = \arcsin$$

II.6. Feladat. A fenti táblázatban miért nem került elő az arcctg és az arccos függvény?

Probléma. Hogyan lehet felismerni egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy van-e primitív függvénye I-ben?
Válasz. Sehogy! De adható szükséges és adható elégséges feltétel.

II.7. Tétel (Elegendő feltétel primitív függvény létezésére)**.** *Ha f folytonos I-n, akkor f-nek létezik I-n primitív függvénye.*

Bizonyítás. Később. □

II.8. Példa. Belátható, hogy az alábbi függvényeknek nincs elemi primitív függvénye: $\frac{1}{\ln x}$ és $\frac{\sin x}{x}$ az $I = (1, +\infty)$-en, e^{-x^2} az $I = \mathbb{R}$-en.

A primitívfüggvény-keresés vagy határozatlan integrálás tulajdonképpen egy számolási technika (kalkulusnak is hívják), lényegében a differenciálás műveletének megfordítása (de annál sokkal nehezebb). A következőkben néhány jól használható szabályt igazolunk.

II.9. Állítás (Vektortér-tulajdonság)**.**

1. *Ha f-nek és g-nek létezik primitív függvénye I-n, akkor $f+g$-nek is létezik primitív függvénye I-n, emellett*
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

2. *Ha f-nek létezik primitív függvénye I-n és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $c \cdot f$-nek is létezik primitív függvénye I-n, emellett*
$$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f.$$

Bizonyítás. Triviálisan következik a definícióból és a [Egyvalt1, III.13. és III.14. Tétel]-ből. □

II.10. Állítás (Lineáris helyettesítés)**.** *Ha* $\int f = F$*, vagyis* $F' = f$ I*-n, akkor tetszőleges* $a \neq 0$ *és* $b \in \mathbb{R}$ *konstansokra* $x \mapsto f(ax+b)$*-nek is létezik primitív függvénye* I*-n, és*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}.$$

Bizonyítás. A kompozíciófüggvény deriváltjára vonatkozó [Egyvalt1, III.19. Tétel]-t alkalmazva

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

□

II.11. Példa.

$$\int \mathrm{e}^{3x-1}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3},$$

ahol $f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 3$, $b = -1$.

$$\int (2x+5)^6\,dx = \frac{(2x+5)^7}{7\cdot 2} = \frac{(2x+5)^7}{14},$$

ahol $f(x) = x^6$, $a = 2$, $b = 5$.

II.12. Állítás. *Legyen* f *differenciálható* I*-n,* $f > 0$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Ekkor* $f^\alpha \cdot f'$*-nek létezik primitív függvénye* I*-n, és*

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln f, \quad \alpha = -1.$$

Bizonyítás. Világos, hogy mindkét esetben a jobb oldal differenciálható. Ha $\alpha \neq -1$, akkor [Egyvalt1, III.19. Tétel]-t alkalmazva

$$\left(\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\cdot f^\alpha \cdot f' = f^\alpha \cdot f'.$$

Ha $\alpha = -1$, akkor

$$(\ln f)' = \frac{1}{f}\cdot f'.$$

□

II.13. Példa.

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x\,dx = \frac{\sin^6 x}{6},$$

ahol $f(x) = \sin x$, $\alpha = 5$.

II.14. Példa.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln(\cos x), \quad \text{ha } x \in \left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\sin x}{-\cos x} = -\ln(-\cos x), \quad \text{ha } x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$. A fentieket összefoglalva úgy is írhatjuk, hogy

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|, \quad x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

II.15. Tétel (Parciális integrálás elve)**.** *Legyenek f és g differenciálhatók az I intervallumon, és tegyük fel, hogy $f \cdot g'$-nek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor $f' \cdot g$-nek is létezik primitív függvénye I-n, és ez utóbbi (egy) primitív függvénye:*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás. Kell: $(f \cdot g - \int f \cdot g')$ differenciálható I-n – ez triviális –, és $(f \cdot g - \int f \cdot g')' = f' \cdot g$. Utóbbi teljesül, mivel

$$\left(f \cdot g - \int f \cdot g'\right)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g.$$

□

II.16. Példa. Adjuk meg az ln függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás elve segítségével!

$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\,dx = x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x \cdot \ln x - x.$$

II.17. Példa.

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x\,dx = \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)}\,dx = x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

II.18. Példa. A következő feladatban 2 parciális integrálást érdemes végrehajtani egymás

után.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x \cdot \sin x \, dx &= \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v(x)} \, dx \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \left(\underbrace{\mathrm{e}^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v(x)} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{v'(x)} \, dx \right) \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \mathrm{e}^x \cdot \cos x - \int \mathrm{e}^x \cdot \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{e}^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^x \cdot \sin x - \mathrm{e}^x \cdot \cos x \right).$$

II.19. Tétel (Helyettesítéses integrálás elve)**.** *Legyenek I és I^* tetszőleges (nyílt) intervallumok. Legyenek f és g olyan függvények, hogy f-nek létezik primitív függvénye I-n, g pedig differenciálható I^*-on, továbbá $\mathcal{R}(g) \subset I$. Ekkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek létezik primitív függvénye I^*-on, és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

Bizonyítás. Legyen $F := \int f$, tehát F differenciálható I-n és $F' = f$. Ismeretes, hogy ekkor $F \circ g$ is differenciálható I^*-ban (ld. [Egyvalt1, III.19. Tétel]), és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Így $F \circ g = \left(\int f \right) \circ g = \int (f \circ g) \cdot g'$. □

II.20. *Megjegyzés.* A gyakorlatban a helyettesítéshez $g : I^* \to I$ bijektív függvényt érdemes választani, mert ekkor

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1},$$

vagyis az eredeti primitív függvény meghatározható.

Klasszikus formalizmus.

$$\int f(x) \, dx \, |_{x=g(t)} = \int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t) \, dt, \quad \frac{dx}{dt} = g'(t)$$

II.21. Példa. A következő példában $x = \sqrt{t}$-t érdemes helyettesíteni, $I^* = (0, +\infty)$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\, dx \mid_{x=\sqrt{t}} = \int \sqrt{t} \cdot \mathrm{e}^t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^t\, dt = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^t = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{x^2}.$$

Mivel a helyettesítő függvény értékkészlete a $(0, +\infty)$ intervallum, ezért így csak ezen az intervallumon kaptuk meg a primitív függényt. Ha azonban $x = -\sqrt{t}$-t helyettesítünk volna, hasonló eredményre jutottunk volna. Tehát a kapott függvény az egész $\mathbb{R}$-en primitív függvény lesz.

Ebben az esetben akár „ránézésre" is meg tudtuk volna állapítani a primitív függvényt, hiszen könnyen észrevehető, hogy $x = \frac{1}{2}(x^2)'$. Az alábbi példában azonban már nem ilyen egyszerű a helyzet.

II.22. Példa. Határozzuk meg a

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx$$

primitív függvényt az $I = (0, +\infty)$ intervallumon! Érdemes a $\sqrt{x} = t$, vagyis $x = t^2$ helyettesítést alkalmazni, ahol $I^* = (0, +\infty)$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = 2t$. A kapott integrált tovább alakítva:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx \mid_{x=t^2} = \int \frac{2t}{t+1}\, dt = \int \frac{2t+2-2}{t+1}\, dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2t - 2\ln|t+1|.$$

Visszahelyettesítve:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1).$$

II.23. Feladat. Határozzuk meg az $\sqrt{1-x^2}$ függvény (egy) primitív függvényét az $I = (-1, 1)$ intervallumon a helyettesítéses integrálás elve segítségével!
Helyettesítsünk $x = \sin t$-t, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: I^*$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t$. Így

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx \mid_{x=\sin t} &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{f(g(t))=\sqrt{\cos^2 t}} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)}\, dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2t\right)\, dt = \frac{1}{2}\int 1\, dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos t > 0$ az I^*-on. Ebből

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right) \mid_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}\right) \mid_{t=\arcsin x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

II.1.1. Racionális törtfüggvények integrálása

*Racionális törtfüggvény*nek nevezzük az

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

alakú függvényeket, ahol p és q polinomok. Könnyen látható, hogy polinomosztás után minden racionális törtfüggvény

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

alakú, ahol r, $\tilde{p}$ és $\tilde{q}$ polinomok, és $\deg \tilde{p} < \deg \tilde{q}$. Ha tehát egy

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

alakú integrált akarunk kiszámolni, akkor tulajdonképpen

$$\int \left(r(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} \right) dx = \int r(x)\, dx + \int \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}\, dx$$

alakú integrálokat kell meghatároznunk. Az $\int r(x)\, dx$ könnyen kiszámolható a hatványfüggvények integráljaiból, az összeg és konstansszoros integrálási szabálya alapján. A 2. tag általánosságban nehezebben kezelhető, de mi most csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor

$$\deg \tilde{p} \leq 1, \quad \deg \tilde{q} = 2.$$

Ilyenkor 3 esetet különböztethetünk meg:

1. $\tilde{q}$-nak nincs valós gyöke;
2. $\tilde{q}$-nak 2 különböző valós gyöke van;
3. $\tilde{q}$-nak 1 kétszeres valós gyöke van.

Az alábbiakban mindhárom eset kezelését egy-egy példán keresztül mutatjuk be.

II.24. Példa ([Feladatgy.] 5.33.)**.** Számítsuk ki az

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 6}\, dx$$

integrált!

Először állapítsuk meg, hogy mivel $D = (-2)^2 - 4 \cdot 6 < 0$, ezért a nevezőnek nincs valós gyöke. Ilyenkor alakítsuk úgy a számlálót, hogy az tartalmazza a nevező deriváltját! Tehát,

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 6}\, dx + \int \frac{1}{x^2 - 2x + 6}\, dx.$$

Az első tag azonnal adódik a II.12. Állításból:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 6).$$

A 2. tagban a nevezőt alakítsuk teljes négyzetté – így az az arctg függvény egy lineáris transzformációjának deriváltjához jutunk, ld. a II.10. Állítást.

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 5}\, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{5}})^2 + 1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{5}}.$$

Így

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 6) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{5}}.$$

II.25. Példa ([Feladatgy.] 5.43.)**.** Számítsuk ki az

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

integrált!

Először állapítsuk meg, hogy mivel $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) > 0$, ezért a nevezőnek két különböző valós gyöke van. Kiszámolva a gyököket kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1).$$

Ezt felhasználva bontsuk a racionális törtfüggvényt parciális törtek összegére!

$$\frac{x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozva,

$$\frac{x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A \cdot (x + 1) + B \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} = \frac{(A + B) \cdot x + A - 3B}{(x - 3) \cdot (x + 1)}.$$

Ebből

$$A + B = 1,\ A - 3B = 0 \Rightarrow A = 1 - B,\ 1 - B - 3B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{4},\ A = \frac{3}{4}.$$

Tehát

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{x - 3}\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x + 1}\, dx = \frac{3}{4} \cdot \ln|x - 3| + \frac{1}{4} \cdot \ln|x + 1|.$$

II.26. Példa ([Feladatgy.] 5.49.)**.** Számítsuk ki az

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 1}\, dx$$

integrált!
Vegyük észre, hogy a nevező egy teljes négyzet: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Ilyenkor egyszerűen

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 1}\, dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx = -\frac{2}{x-1}.$$

Megjegyezzük, hogy ha a számlálóban 1. fokú tag (pl. x) áll, akkor a következőképpen járhatunk el:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1}\, dx &= \int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{x-1+1}{(x-1)^2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

II.2. Riemann-integrál

II.2.1. A Riemann-integrál definíciója

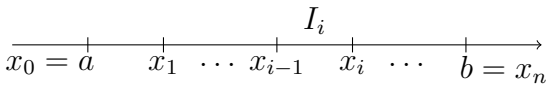
A Riemann-integrál lényege: „a függvény grafikonja és a vízszintes tengely által határolt síkidom területe”. Szemléltethetjük egy, a fizikából vett példán is. Jelölje egy autó sebességfüggvényét v! Kérdés, hogy mekkora utat tesz meg a $t = a$ és $t = b$ időpontok között. A megtett utat közelíthetjük oly módon, hogy az $[a, b]$ időintervallumot részintervallumokra osztjuk fel és feltételezzük, hogy ezeken a kis időintervallumokon egyenletes a mozgás, majd a felosztást minden határon túl finomítjuk. Nézzük most mindezt precízen!

II.27. Definíció. Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, és válasszunk valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén x_i, $i = 0, \ldots, n$ pontokat az alábbi módon:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b.$$

Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása* a $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ véges intervallumrendszer, ahol $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, a felosztás *osztópontjai* az $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pontok.

II.28. Definíció. Legyenek Φ és Ψ az $[a, b]$ intervallum felosztásai. Ezen felosztások *egyesítése* (vagy *közös finomítása*) az a $\Phi \vee \Psi$-vel jelölt felosztás, melyet úgy kapunk, hogy Φ osztópontjaihoz hozzávesszük a Ψ osztópontjait (vagy fordítva), és az így kapott új osztóponthalmazhoz tartozó intervallumrendszert tekintjük.



II.1. ábra. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása

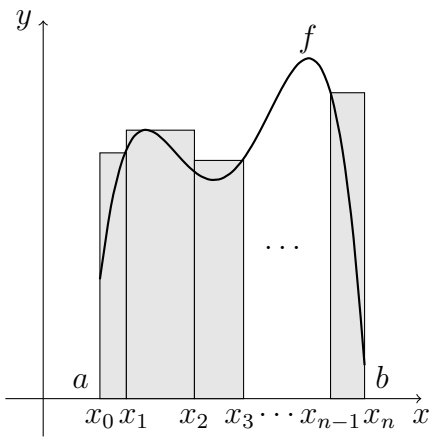
II.29. Definíció. Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztás esetén definiálja a Φ felosztáshoz tartozó *alsó közelítőösszeget*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

felső közelítőösszeget

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

ahol $|I_i| := x_i - x_{i-1}$ az I_i intervallum hossza.



II.2. ábra. Felső közelítőösszeg

II.30. *Megjegyzés.* Világos, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és Φ felosztás esetén

$$s_f(\Phi) \leq S_f(\Phi),$$

hiszen minden i esetén $\inf_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f$.

II.31. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az $[a, b]$ intervallum tetszőleges Φ, Ψ felosztásaira*

$$s_f(\Phi) \leq S_f(\Psi). \tag{II.1}$$

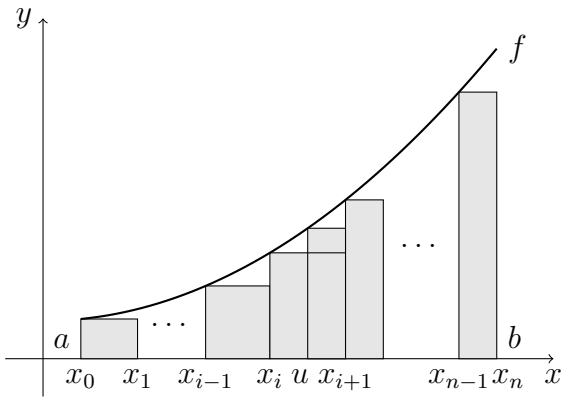
Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely Φ, Ψ felosztások esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Psi), \tag{II.2}$$

amiből (II.1) nyilván következik. A második egyenlőtlenség a II.30. Megjegyzés alapján nyilvánvaló. A következőkben azt bizonyítjuk, hogy ha Θ olyan felosztása $[a, b]$-nek, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy *egy* új osztópontot hozzáveszünk, akkor

$$s_f(\Phi) \leq s_f(\Theta). \tag{II.3}$$

Ebből az osztópontok számára vonatkozó teljes indukcióval következik az első egyenlőt-



II.3. ábra. Új osztópont hozzávétele

lenség az (II.2) sorozatban. A harmadik egyenlőtlenség bizonyításához pedig használjuk fel, hogy a $\Phi \vee \Psi$ felosztás bármely I_i intervallumára

$$\sup_{I_i} f = -\inf_{I_i}(-f)$$

teljesül. Ezért

$$S_f(\Phi \vee \Psi) = -s_{-f}(\Phi \vee \Psi),$$

és ebből (az első egyenlőtlenség alapján)

$$s_{-f}(\Phi \vee \Psi) \geq s_{-f}(\Psi) \Longrightarrow S_f(\Phi \vee \Psi) = -s_{-f}(\Phi \vee \Psi) \leq -s_{-f}(\Psi) = S_f(\Psi),$$

vagyis

$$S_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Psi)$$

következik.

Térjünk rá most az (II.3) egyenlőtlenség bizonyítására! Legyen Θ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy annak x_i és x_{i+1} osztópontjai közé felveszünk még egy u osztópontot, vagyis Θ osztópontjai

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < u < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

Az (II.3) egyenlőtlenség két oldaláról az azonos tagokat elhagyva azt kell belátnunk, hogy

$$\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \left(\inf_{[x_i,u]} f\right) \cdot (u - x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - u).$$

Mivel $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf_{[x_i,u]} f$ és $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf_{[u,x_{i+1}]} f$ (szűkebb halmazon vett infimum nagyobb vagy egyenlő, mint a bővebb halmazon vett), ezért

$$\begin{aligned}\left(\inf_{[x_i,u]} f\right) \cdot (u - x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - u) &\geq \left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot ((u - x_i) + (x_{i+1} - u)) \\ &= \left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i),\end{aligned}$$

így az állítást beláttuk. □

II.32. Következmény. *Az*

$$\{s_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása}\} \text{ és } \{S_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása}\}$$

halmazok közül a bal oldali halmaz minden eleme *kisebb vagy egyenlő a jobb oldali halmaz* minden eleménél. *Ebből az is következik, hogy az első halmaz felülről, a második alulról korlátos. Természetesen, az első halmaz alulról, a második pedig felülről is korlátos (tehát mindkettő korlátos), hiszen*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b - a) \leq s_f(\Phi) \leq S_f(\Phi) \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b - a)$$

minden Φ felosztás esetén.

II.33. Definíció. Definiálja az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *(Darboux-féle) alsó integrálját*

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \{s_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása}\}, \tag{II.4}$$

és *(Darboux-féle) felső integrálját*

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \{S_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása}\}. \tag{II.5}$$

A II.32. Következmény alapján

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{II.6}$$

II.34. Definíció. Egy korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *Riemann-integrálható*nak mondunk, ha

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Ha f Riemann-integrálható, akkor az alsó és felső integrálok közös értékét f *Riemann-integráljának* vagy *határozott integráljának* nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\,dx.$$

II.35. Feladat. Igazoljuk, hogy a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható $[0, 1]$-en!

Bizonyítás. Jelölje D a Dirichlet-függvényt. Könnyen látható, hogy a $[0, 1]$ intervallum bármely Φ felosztására

$$s_D(\Phi) = 0 \text{ és } S_D(\Phi) = 1$$

teljesül, mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám is. Tehát

$$0 = \underline{\int_0^1} D < \overline{\int_0^1} D = 1.$$

□

II.36. Feladat. Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény Riemann-integrálható $[0, 1]$-en és

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen a Φ_n felosztás az az intervallumrendszer, amit a

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

osztópontok határoznak meg. Ekkor f szigorú monoton növekedése miatt

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3},$$

$$S_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

tehát $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$ és $S_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$, ha $n \to \infty$. Ebből könnyen látható, hogy

$$\frac{1}{3} \le \underline{\int_0^1} f \le \overline{\int_0^1} f \le \frac{1}{3}.$$

Tehát $\frac{1}{3} = \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$, így f Riemann-integrálható $[0, 1]$-en és Riemann-integrálja $\frac{1}{3}$. □

II.37. Feladat. Igazoljuk, hogy a c-vel jelölt konstans c függvény Riemann-integrálható tetszőleges $[a, b]$-n, és

$$\int_a^b c = c \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy tetszőleges Φ felosztás esetén

$$s_c(\Phi) = S_c(\Phi) = c \cdot (b - a),$$

amiből az állítás adódik. □

Világos, hogy kevés, csak nagyon speciális függvénynek tudjuk a fenti módon kiszámítani a Riemann-integrálját.
A továbbiakban szükségünk lesz a Riemann-integrálhatóság egy, a fenti definíciónál jobban használható kritériumára. A kritérium megfogalmazásához vezessük be egy függvény adott felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének fogalmát!

II.38. Definíció. Ha Φ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, akkor az

$$\begin{aligned}\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|\end{aligned}$$

számot az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összegé*nek nevezzük, ahol

$$\omega_f(I_i) = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f$$

az f függvény *oszcillációja* az I_i intervallumon.

II.39. *Megjegyzés.* Meggondolható, hogy

$$\omega_f(I_i) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_i\}, \tag{II.7}$$

amivel a fenti képlet így is írható:

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} (\sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_i\}) \cdot |I_i|.$$

II.40. Állítás. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és Φ, Ψ tetszőleges felosztások, akkor*

$$\Omega_f(\Phi \vee \Psi) \leq \Omega_f(\Phi).$$

Bizonyítás. Az (II.2) egyelőtlenségből következik. □

II.41. Tétel (Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra)**.** *Egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon)$ felosztása $[a,b]$-nek, amelyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. irány: Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A II.34. Definíció szerint tudjuk, hogy

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Az alsó és felső integrál definíciója alapján $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan Φ_1 felosztás, hogy

$$s_f(\Phi_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

és létezik Φ_2 felosztás, hogy

$$S_f(\Phi_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezekből, az (II.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Phi_1) \le s_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \le S_f(\Phi_1 \vee \Phi_2)\\ \le S_f(\Phi_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

amiből $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ választással

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

2. irány: Tegyük fel indirekt, hogy a tétel állításában szereplő feltétel teljesül minden pozitív ε-ra, de

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

Legyen

$$\varepsilon := \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0,$$

és válasszunk ε-hoz Φ felosztást úgy, hogy $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Ekkor

$$s_f(\Phi) \le \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f \le S_f(\Phi) = s_f(\Phi) + \Omega_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon.$$

Ebből viszont

$$\varepsilon = s_f(\Phi) + \varepsilon - s_f(\Phi) > \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f,$$

ami ellentmondás. □

II.42. Állítás. *Ha f az $[a,b]$ intervallumon monoton függvény, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő – a monoton fogyó eset hasonlóan meggondolható. A II.41. Tételt fogjuk használni. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Keresünk olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon)$ felosztást, amelyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Legyen Φ tetszőleges ekvidisztans felosztás, vagyis amelynek $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ osztópontjaira

$$|I_i| = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy f monoton növése miatt

$$\sup_{I_i} f = \max_{I_i} f = f(x_i), \quad \inf_{I_i} f = \min_{I_i} f = f(x_{i-1}).$$

Mivel

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \to 0, \quad n \to +\infty,$$

ezért $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\Omega_f(\Phi) = \frac{b-a}{N} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Tehát a N osztóponttal rendelkező Φ ekvidisztans felosztás megfelelő lesz. □

MESE:
Most nézzük meg, mi volt a fenti integrálfogalomnak a *Riemann-féle eredeti definíciója*! A definíció bizonyos értelemben hasonlítani fog a fenti „leghasznosabb kritériumhoz”.

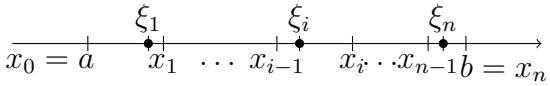
II.43. Definíció. Ha $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ egy felosztása $[a, b]$-nek, akkor definiálja Φ *finomságát*

$$|\Phi| := \max\{|I_i| : i = 1, \ldots, n\}.$$

II.44. Definíció. Legyen Φ, $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztás, és $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor*, vagyis

$$\xi_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

jelölésben: $\xi \propto \Phi$.

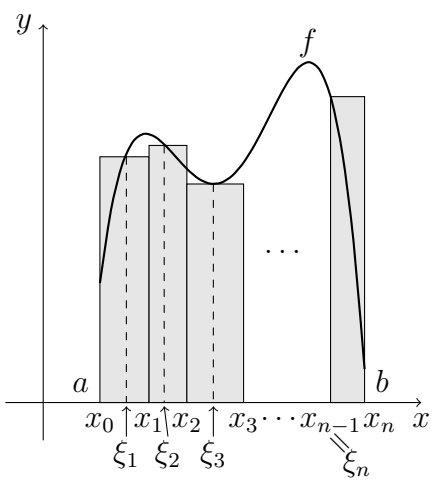


II.4. ábra. Felosztásra illeszkedő vektor

Ekkor a

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-összegé*nek nevezzük.



II.5. ábra. Riemann-összeg

II.45. *Megjegyzés.* Tetszőleges Φ felosztás és $\xi \propto \Phi$ vektor esetén

$$s_f(\Phi) \leq \sigma_f(\Phi, \xi) \leq S_f(\Phi).$$

II.46. Definíció (Az integrálhatóság Riemann-féle kritériuma)**.** Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-n* és $\int_a^b f = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden Φ felosztás, amelyre $|\Phi| < \delta$, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \varepsilon.$$

II.47. *Megjegyzés.* A definícióból következik f korlátossága $[a, b]$-n.

Meggondolható, hogy a mi (eredetileg Darboux-tól származó) integrál-definíciónk ekvivalens a Riemann-félével.

II.48. *Megjegyzés.* Néhány további, ekvivalens integrálhatósági kritérium:

1. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden Φ felosztás, $|\Phi| < \delta$ esetén $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.
2. Minden (Φ_n), $|\Phi_n| \to 0$ felosztássorozatra $\Omega_f(\Phi_n) \to 0$.
3. Létezik olyan (Φ_n) felosztássorozat, melyre $\Omega_f(\Phi_n) \to 0$.

MESE VÉGE :-)

Felmerülhet a kérdés, hogy milyen tulajdonságú függvények lesznek Riemann-integrálhatók? Az alábbiakban belátjuk, hogy a folytonos függvények ilyenek. Ehhez definiáljuk a folytonosságnak egy fontos speciális esetét, amikor egy halmaz pontjaiban a folytonosság definíciója alapján $\varepsilon > 0$-hoz létező δ nem függ a pont helyétől.

II.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *egyenletesen folytonos* H*-n*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

II.50. Feladat. Igazoljuk, hogy az id függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en! Ez igaz, ugyanis minden $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \varepsilon$ jó választás.
Gondoljuk meg, hogy az id^2 függvény nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en! Ha x nagy, akkor δ kicsi kell legyen, mert f meredeken nő. Később látni fogjuk, hogy viszont ez a függvény is egyenletesen folytonos bármely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon.

II.51. Állítás. *Ha f egyenletesen folytonos H-n, akkor folytonos is H-n.*

Bizonyítás. Legyen $a \in H$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ adva. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ezzel a δ választással, a fentit $y = a$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ami épp az a-beli folytonosságot jelenti. $\square$

A II.50. Feladatban láttuk, hogy az állítás megfordítása általában nem igaz, tehát van olyan H halmaz és H-n folytonos függvény, amely nem egyenletesen folytonos. A következő tétel azt mondja ki, hogy ha H korlátos és zárt intervallum, akkor ez az eset nem állhat fenn.

II.52. Tétel (Heine-tétel)**.** *Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f egyenletesen folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos $[a,b]$-n. Ez a definíció alapján a következőt jelenti:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0 \text{ esetén } \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b],\ |x_\delta - y_\delta| < \delta, \text{ hogy } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk $\delta = \frac{1}{n} > 0$-hoz megfelelő $x_n, y_n \in [a,b]$ pontokat minden $n \in \mathbb{N}$-re! Így kaptunk olyan $(x_n), (y_n) \subset [a,b]$ sorozatokat, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel (ld. [Bevan2, III.51. Tétel]) szerint létezik konvergens részsorozata, (x_{n_i}). Legyen

$$x := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a,b],$$

itt használtuk az $[a,b]$ intervallum zártságát. Az $|x_{\mathrm{n}_i} - y_{\mathrm{n}_i}| < \frac{1}{\mathrm{n}_i}$ feltétel miatt (y_{n_i}) is konvergens és

$$x = \lim y_{\mathrm{n}_i}.$$

Az Átviteli elv alapján (ld. [Egyvalt1, I.16. Tétel]) az f függvény x pontbeli folytonosságából következik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(x) \text{ és } f(y_{\mathrm{n}_i}) \to f(x),$$

ami ellentmondás, hiszen

$$|f(x_{\mathrm{n}_i}) - f(y_{\mathrm{n}_i})| \geq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}.$$

□

A Heine-tétel felhasználásával látható be, hogy minden folytonos függvény Riemann-integrálható.

II.53. Tétel. *Legyen f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény. Ekkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen f folytonos $[a,b]$-n. A II.41. Tétel integrálhatósági feltételét fogjuk használni, tehát legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keresünk hozzá olyan Φ felosztást, amelyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. A II.52. Heine-tétel alapján f egyenletesen is folytonos $[a,b]$-n, tehát az $\varepsilon/2(b-a)$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\text{ha } t,s \in [a,b],\ |t-s| < \delta, \text{ akkor } |f(t)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ és a Φ felosztás osztópontjait definiálja

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ i = 0, \dots, n.$$

Ekkor az $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumban bármely két szám különbsége legfeljebb $\frac{b-a}{n} < \delta$, így itt a függvény oszcillációja

$$\omega_f(I_i) = \sup\{|f(t)-f(s)| : t,s \in I_i\} \le \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)},$$

ahol felhasználtuk az (II.7) képletet. Erre a felosztásra tehát

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i)\cdot|I_i| \le \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

II.54. *Megjegyzés.* A fenti tétel megfordítása nem igaz! Tehát nem minden Riemann-integrálható függvény folytonos. Könnyen meggondolható, hogy ha egy $[a,b]$-n folytonos függvényt egy pontban „elrontunk” úgy, hogy ott ne legyen folytonos, akkor Riemann-integrálható marad (pl.a II.41. Leghasznosabb kritérium segítségével meggondolható).

II.55. Állítás. *Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ véges sok pont kivételével folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. a II.41. Leghasznosabb kritérium segítségével igazolható, nem részletezzük. □

II.56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely megszámlálhatóan végtelen sok pont kivételével folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n!

II.2.2. A Riemann-integrál tulajdonságai

Az itt felsorolt tulajdonságok egy részét a II.41. Tétel (leghasznosabb kritérium), egy részét pedig a definíció segítségével igazoljuk.

II.57. Tétel. *Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor $|f|$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és $\varepsilon > 0$ rögzítve. A II.41. Tétel alapján ε-hoz létezik olyan Φ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega_{|f|}(\Phi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$ is teljesül. Mivel adott Φ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|,$$

ezért elég belátni, hogy minden i-re

$$\omega_{|f|}(I_i) \leq \omega_f(I_i).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x, y \in I_i$ esetén

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(I_i),$$

amiből

$$\omega_{|f|}(I_i) = \sup\{||f(x)| - |f(y)|| : x, y \in I_i\} \leq \omega_f(I_i).$$

□

II.58. Állítás. *Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Ekkor $f|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integrálható $[\alpha,\beta]$-n.*

Bizonyítás. A II.41. Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan Φ felosztása $[a,b]$-nek, amelyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Tekintsük ezen felosztás $[\alpha,\beta]$ intervallumba eső osztópontjait, hozzávéve esetleg α-t és β-t : így az $[\alpha,\beta]$ intervallum egy Ψ felosztását kapjuk. Ekkor

$$\Omega_{f|_{[\alpha,\beta]}}(\Psi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

□

II.59. Tétel. *Ha f és g Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor $f \cdot g$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve, és a II.41. Tétel alapján keresünk hozzá Φ felosztást. Definiáljuk

$$K := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, \sup_{[a,b]} |g|\},$$

és válasszunk $\frac{\varepsilon}{2K}$-hoz Φ_1, Φ_2 felosztásokat, amelyekre

$$\Omega_f(\Phi_1) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi_2) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Ha $K = 0$, az érdektelen eset.) Tekintsük ezen felosztások egyesítését:

$$\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2.$$

Ekkor a II.40. Állítás alapján

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

is teljesül. Legyen $I_i \in \Phi$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy minden $x, y \in I_i$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\leq K \cdot \omega_g(I_i) + \omega_f(I_i) \cdot K = K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) . \end{aligned}$$

Ebből

$$\omega_{f \cdot g}(I_i) = \sup \{|f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in I_i\} \leq K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) .$$

Összegezve $i = 1, \ldots, n$-re kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Omega_{f \cdot g}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{f \cdot g}(I_i) \cdot |I_i| \leq \sum_{i=1}^{n} K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \cdot |I_i| \\ &= K \cdot \Omega_g(\Phi) + K \cdot \Omega_f(\Phi) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

II.60. Állítás (Vektortér-tulajdonság)**.** *Ha f, g Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$ és $c \cdot f$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-n, továbbá*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \tag{II.8}$$

és

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f. \tag{II.9}$$

Bizonyítás. Legyen f, g Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Megmutatjuk, hogy ekkor $(f + g)$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Mivel bármely $I_i \subset [a,b]$ esetén

$$\inf_{I_i} f + \inf_{I_i} g \leq \inf_{I_i}(f+g) \text{ és } \sup_{I_i}(f+g) \leq \sup_{I_i} f + \sup_{I_i} g,$$

ezért tetszőleges Φ felosztásra

$$s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \leq s_{f+g}(\Phi) \text{ és } S_{f+g}(\Phi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Phi).$$

Legyenek most Φ, Ψ tetszőleges felosztások. A fentiekből és az (II.2) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_f(\Phi) + s_g(\Psi) &\leq s_f(\Phi \vee \Psi) + s_g(\Phi \vee \Psi) \leq s_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq \\ &\leq S_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) + S_g(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Psi). \end{aligned}$$

A bal oldalon véve először Φ-ben, majd Ψ-ben szuprémumot, a jobb oldalon pedig infimumot, kapjuk, hogy

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mivel az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, ezért következik, hogy $f+g$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n és (II.8) teljesül.
Legyen most f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor $(c \cdot f)$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \dot{\int_a^b} f.$$

Könnyen látható, hogy tetszőleges $c > 0$ és Φ felosztás esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi),$$

amiből az állítás mindkét része adódik. Negatív c esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi),$$

amiből

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} (c \cdot f) &= \sup \{ s_{c \cdot f}(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása} \} \\ &= \sup \{ c \cdot S_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása} \} \\ &= c \cdot \inf \{ S_f(\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felosztása} \} = c \cdot \int_a^b f, \end{aligned}$$

és ugyanígy

$$\overline{\int_a^b} (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f.$$

Tehát az állítás ekkor is következik. $\square$

II.61. Állítás (Intervallum szerinti additivitás)**.** *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, $a < c < b$. Tegyük fel, hogy $f|_{[a,c]}$ Riemann-integrálható $[a, c]$-n és $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrálható $[c, b]$-n. Ekkor f Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{II.10}$$

Bizonyítás. Mivel f korlátos $[a, c]$-n és $[c, b]$-n, ezért korlátos $[a, b]$-n is. Véve az $[a, c]$ intervallum egy tetszőleges Φ_1 felosztását, a $[c, b]$ intervallumnak pedig egy Φ_2 felosztását, az ezekhez tartozó részintervallumok rendszereinek egyesítéséből kapjuk az $[a, b]$ intervallum Φ felosztását. Könnyen látható, hogy

$$s_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + s_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2) = s_f(\Phi) \leq \underline{\int_a^b} f \text{ és } \overline{\int_a^b} f \leq S_f(\Phi) = S_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + S_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2).$$

Az összes ilyen Φ_1 ill. Φ_2 felosztásra szuprémumot ill. infimumot véve kapjuk, hogy

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

A feltétel szerint az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, amiből f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és (II.10) adódik. □

II.62. Állítás (Integrandus szerinti monotonitás)**.** *Legyenek f, g Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n, és tegyük fel, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$. Ekkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden Φ felosztás esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_g(\Phi),$$

amiből az összes Φ felosztásra szuprémumot véve kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g.$$

□

II.63. Következmény. *Bármely $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvényre fennáll, hogy*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [a,b]$ esetén

$$(-|f|)(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x),$$

amiből az állítás a II.57. Tétel és a II.62. Állítás szerint következik. □

II.64. Állítás (Integrál triviális becslése)**.** *Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal adódik a II.62. Állításnak az $\inf f$ konstans függvény és f ill. f és a $\sup f$ konstans függvényre való alkalmazásából.
Másképp meggondolva: a $\Phi = \{I_1\}$ felosztásra, ahol $I_1 = [a,b]$

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) = s_f(\Phi), \quad (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a) = S_f(\Phi)$$

– az állítás ebből is következik. □

II.65. Következmény. *Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható a II.63. Következmény és a II.64. Állítás alapján. □

Ezen becslések segítségével (folytonos függvényekre) bizonyítható a differenciálszámításban megismert középértéktétellel analóg állítás Riemann-integrálra.

II.66. Tétel (Integrálszámítás első középértéktétele)**.** *Legyen f folytonos $[a,b]$-n. Ekkor létezik olyan $c \in [a,b]$, melyre*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A II.64. Állítás alapján és a Weierstrass-tételből (ld. [Egyvalt1, I.40. Tétel]) kapjuk, hogy

$$\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f.$$

A Bolzano–Darboux-tétel (ld. [Egyvalt1, I.36. Tétel]) miatt van olyan $c \in [a,b]$, amelyre

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a},$$

amivel az állítást beláttuk. □

II.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata

II.3.1. A Newton–Leibniz-tétel

A következőkben kiderül, hogy mi a primitív függvény és a Riemann-integrál kapcsolata. Ez a XVII-XVIII. században élt Newton és Leibniz munkásságának, egyben a differenciál- és integrálszámításnak legfontosabb eredménye.

II.67. Tétel (Newton–Leibniz-tétel)**.** *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik olyan F függvény, amely $[a,b]$-n folytonos, (a,b)-n differenciálható, és amelyre $F' = f$ az (a,b)-n (vagyis, F primitív függvénye f-nek (a,b)-n). Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b = F|_a^b.$$

Bizonyítás. Legyen Φ tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek. Ha Φ osztópontjainak halmaza $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, akkor $F|_{[x_{i-1},x_i]}$-re alkalmazva Lagrange-középértéktételt (ld. [Egyvalt1, III.28. Tétel]) létezik olyan $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Összegezve $i = 1, \dots, n$-re a következő teleszkopikus összeget kapjuk

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Nyilvánvalóan

$$s_f(\Phi) \le \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \le S_f(\Phi), \quad \text{(II.11)}$$

(ahol középen egy Riemann-összeg áll, ld. a II.44 Definíciót). Mivel f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ezért az (II.11) egyenlőtlenségsorozat bal ill. jobb végén a Φ felosztásokra szuprémumot ill. infimumot véve kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f,$$

amiből

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

és ezt akartuk belátni. □

II.68. *Megjegyzés.* A II.67. Newton–Leibniz-tétel feltételei közül az f függvény Riemann-integrálhatósága nem hagyható el, még korlátos f esetén sem!

A Newton–Leibniz-tétel feltételeit teljesítő függvényekre bizonyíthatók a primitív függvényeknél megismert parciális és helyettesítéses integrálás szabályai.

II.69. Tétel (Parciális integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy az f és g függvények kielégítik a Newton–Leibniz-tétel feltételeit $[a, b]$-n, és legyen (egy) primitív függvényük F, ill. G. Ekkor $f \cdot G$ és $F \cdot g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g.$$

Másképp:

$$\int_a^b F' \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot G'.$$

Bizonyítás. Mivel F és G differenciálhatók, így folytonosak, tehát Riemann-integrálhatók is $[a, b]$-n, ld. a II.53. Tételt. A II.59. Tétel alapján pedig a szorzatok Riemann-integráljai is léteznek. Mivel

$$(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g,$$

ezért a II.67. Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = [F \cdot G]_a^b.$$

A II.60 Állítás szerint a fenti egyenlőség bal oldalára

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = \int_a^b f \cdot G + \int_a^b F \cdot g,$$

amivel a bizonyítás teljes. □

II.70. Példa. Számoljuk ki az

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \, dx$$

Riemann-integrál értékét!
A II.69. Tételt fogjuk alkalmazni $f(x) = x$, $G(x) = \ln x$ szereposztással. Ekkor $F(x) = \frac{x^2}{2}$ választással,

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 \ln 2 - 0 - \frac{1}{2} \cdot (2 - \frac{1}{2}) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Jelölés. Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor jelölje

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

II.71. Tétel (Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy f kielégíti a Newton–Leibniz-tétel feltételeit $[a,b]$-n. Legyen továbbá $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ differenciálható bijekció, melyre $(f \circ g) \cdot g'$ Riemann-integrálható $[\alpha,\beta]$-n. Ekkor*

$$\int_a^b f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g) \cdot g'.$$

Bizonyítás. A feltételekből azonnal következik, hogy g vagy szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton fogyó, tehát $g^{-1}(a) = \alpha$, $g^{-1}(b) = \beta$, vagy fordítva. Mivel f tetszőleges F primitív függvényére

$$(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g',$$

ezért a II.67. Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g) \cdot g' = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{ha } g \text{ monoton növő;} \\ F(a) - F(b), & \text{ha } g \text{ monoton fogyó.} \end{cases} \tag{II.12}$$

Másrészt, szintén a Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Ha g monoton növő, a tétel azonnal következik; ha monoton fogyó, az (II.12) egyenlőség mindkét oldalának ellentettjét véve kész a bizonyítás. □

II.3.2. Integrálfüggvények

II.72. Definíció. Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor f *integrálfüggvénye* az $[a,b]$-n értelmezett

$$I(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a,b] \tag{II.13}$$

függvény.

Az alábbiakban kiderül, hogy az integrálfüggvény „simább”, mint az integrandus: ha f Riemann-integrálható, akkor az integrálfüggvénye folytonos, ha pedig f folytonos, akkor az integrálfüggvénye differenciálható lesz.

II.73. Állítás. *Legyen f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor f integrálfüggvénye folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az integrálfüggvény egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, amiből az állítás a II.51. Állítás alapján adódik.
Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Ehhez keresünk olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ számot, hogy ha $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$, akkor $|I(x)-I(y)| < \varepsilon$. A II.65. Következmény alapján tetszőleges $x, y \in [a,b]$, $x < y$ esetén

$$\begin{aligned} |I(x) - I(y)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \\ &\leq (\sup_{[x,y]} |f|) \cdot (y - x) \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sup_{[a,b]} |f|}$$

választással, ha $|x - y| < \delta$, akkor

$$|I(x) - I(y)| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot |x - y| < (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot \frac{\varepsilon}{\sup_{[a,b]} |f|} = \varepsilon,$$

és ezt akartuk belátni. □

Most azt mutatjuk be, hogy ha f Riemann-integrálható, és létezik primitív függvénye, akkor ez - konstans tagtól eltekintve - éppen az integrálfüggvénye.

II.74. Tétel. *Tegyük fel, hogy f kielégíti a Newton–Leibniz-tétel feltételeit $[a,b]$-n, vagyis f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és létezik primitív függvénye (a,b)-ben, ami folytonos is $[a,b]$-n.*
Ekkor f integrálfüggvénye differenciálható (a,b)-n, és deriváltja éppen f - vagyis, ez az f (egyik) primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen F az f egy, a feltételeket kielégítő primitív függvénye. Ekkor a II.67. Newton–Leibniz-tétel szerint

$$I(x) = \int_a^x f = F(x) - F(a), \quad x \in [a,b].$$

Mivel a jobb oldal differenciálható (a,b)-n, ezért I is, továbbá

$$I'(x) = F'(x) - 0 = f(x), \quad x \in (a,b).$$

□

Annak idején a II.7. Tételt, vagyis hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, bizonyítás nélkül mondtuk ki. Most elérkeztünk oda, hogy ezt a tételt igazoljuk. Mivel az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható is (ld. a II.53. Tételt), a most belátott tétel alapján, ha létezik primitív függvénye, akkor az - konstans tagtól eltekintve - csak az integrálfüggvénye lehet.

II.75. Tétel. *Legyen f Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és tegyük fel, hogy f folytonos az $u \in [a, b]$ pontban.*
Ekkor f I-vel jelölt integrálfüggvénye differenciálható u-ban, és deriváltja

$$I'(u) = f(u).$$

Bizonyítás. Legyen

$$I(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

az f integrálfüggvénye. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in [a, b]$, $|x - u| < \delta$, $x \neq u$, akkor

$$\left| \frac{I(x) - I(u)}{x - u} - f(u) \right| < \varepsilon. \tag{II.14}$$

Ebből már következik, hogy

$$\lim_{x \to u} \frac{I(x) - I(u)}{x - u} = I'(u) = f(u).$$

Mivel f folytonos u-ban, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in [a, b]$, $|x - u| < \delta$, akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon/2$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó lesz. Legyen $x \in [a, b]$, $|x - u| < \delta$, $x \neq u$ rögzítve. A I integrálfüggvény definíciója és a II.61. Állítás szerint

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(x) - I(u)}{x - u} - f(u) \right| &= \left| \frac{1}{x - u} \int_u^x f(t)\, dt - \frac{1}{x - u} \int_u^x f(u)\, dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - u} \int_u^x \left(f(t) - f(u) \right)\, dt \right|. \end{aligned}$$

A II.65. Következményből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{I(x) - I(u)}{x - u} - f(u) \right| \leq \sup \{ |f(t) - f(u)| : t \in [u, x] \} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ami éppen (II.14). □

II.76. Következmény. *Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor f-nek van primitív függvénye (a, b)-n.*

Bizonyítás. Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ld. a II.53. Tételt. Így a II.75. Tétel alapján az I-vel jelölt integrálfüggvényére $I' = f$ adódik (a, b)-n. □

II.4. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

Tegyünk most egy kis kitérőt a *terület* matematikai fogalmához! A terület egy olyan $T : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ függvény, ahol $\mathcal{M}$ a sík mérhető („területtel rendelkező") részhalmazait jelöli, és a következő axiómák teljesülnek:

II.77. Definíció.

1. Ha H téglalap, oldalhosszai a és b, akkor $H \in \mathcal{M}$ és $T(H) = a \cdot b$;
2. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ és $H_1 \subseteq H_2$, akkor $T(H_1) \leq T(H_2)$ (monotonitás);
3. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$, és van olyan e egyenes, hogy az e által határolt félsíkok egyike tartalmazza H_1-et, másika H_2-t, akkor $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{M}$ és $T(H_1 \cup H_2) = T(H_1) + T(H_2)$;
4. Ha a sík egy B részhalmaza teljesíti a következő feltételt: minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $A, C \in \mathcal{M}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $T(C) - T(A) < \varepsilon$, akkor $B \in \mathcal{M}$.

II.78. Állítás. *Legyen $f \geq 0$ és f Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Ekkor az*

$$A_f := \{(x, y) : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területe

$$T(A_f) = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Mivel az integrált közelítő alsó és felső összegek téglalapok területeinek összegei, ezért a II.77. Definíció alapján következik. □

II.79. Definíció. Legyenek f és g Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n, és $f(x) \leq g(x)$, ha $x \in [a, b]$. Ekkor a

$$N_{f,g} = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

halmazt *normáltartomány*nak nevezzük.

II.80. Állítás. *Az előbbiekben definiált normáltartomány területe*

$$T(N_{f,g}) = \int_a^b (g - f).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a II.78. Állítást a $g - f \geq 0$ függvényre. □

II.81. Példa. Számítsuk ki az

$$f(x) = 0 \text{ és } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét!
Mivel $\mathcal{D}(g) = [-1,1]$ és $f(x) \leq g(x)$ a $[-1,1]$-en, ezért ezen az intervallumon tekinthetjük az $N_{f,g}$ normáltartományt. A fenti állítás alapján, és $h(t) = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} T(N_{f,g}) &= \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Világos, hogy az 1 sugarú félkörlap területét kellett kapnunk, ami valóban $\frac{\pi}{2}$.

Az ívhossz fogalmát később fogjuk precízen definiálni, és ott igazoljuk az alábbi tételt is.

II.82. Állítás. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható (vagyis f differenciálható, és f' folytonos), akkor az f*

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

grafikonjának ívhossza

$$|\operatorname{graph}(f)| = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

A térfogat fogalmát hasonlóan definiálhatjuk a térben, mint a területet a síkban – erre most nem térünk ki.

II.83. Állítás. *Legyen $f \geq 0$ és f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott F forgástest térfogata*

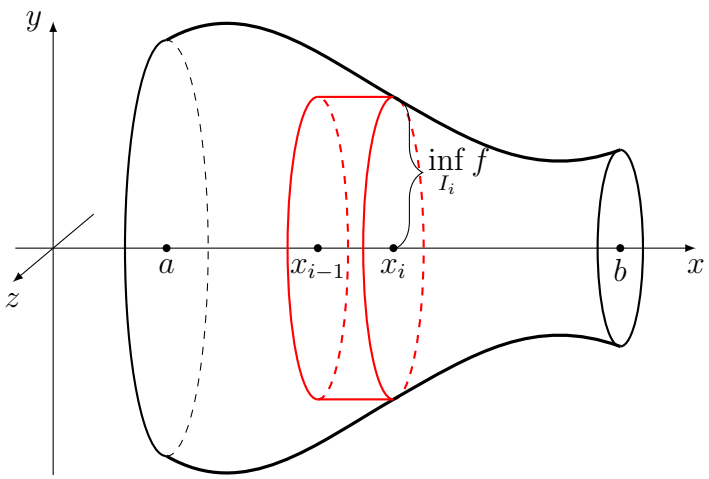
$$V(F) = \pi \int_a^b f^2. \tag{II.15}$$

Bizonyítás. Legyen $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztása $[a,b]$-nek. A forgástest térfogatát alulról az $\inf_{I_i} f$ alapkör sugarú, $|I_i|$ magasságú hengerek térfogataival közelíthetjük. Egy ilyen henger térfogata

$$\pi \cdot (\inf_{I_i} f)^2 \cdot |I_i| = \pi \cdot (\inf_{I_i} f^2) \cdot |I_i|,$$

ahol kihasználtuk, hogy $f \geq 0$. Hasonlóan, a térfogatot felülről $\sup_{I_i} f$ alapkör sugarú, $|I_i|$ magasságú hengerek térfogataival közelíthetjük, ami pedig

$$\pi \cdot (\sup_{I_i} f)^2 \cdot |I_i| = \pi \cdot (\sup_{I_i} f^2) \cdot |I_i|.$$



II.6. ábra. Forgástest térfogatának közelítése hengerekkel

Ezeket összegezve i-re kapjuk, hogy a közelítések

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (\inf_{I_i} f^2) \cdot |I_i| = \pi \cdot s_{f^2}(\Phi), \quad \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (\sup_{I_i} f^2) \cdot |I_i| = \pi \cdot S_{f^2}(\Phi).$$

Vagyis, éppen az (II.15) képletben található integrál alsó ill. felső közelítéseit kaptuk, amiből az állítás adódik. $\square$

III. fejezet

Sorok

A sorokra akkor van szükségünk, mikor végtelen sok számot akarunk összeadni. A sorok tulajdonképpen speciális alakú, véges összegekből álló sorozatok.

III.1. Végtelen sorok

Vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha a rudat félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozatához jutunk. Most gondoljunk arra, hogy valaki a rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

„összeget” szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$-hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így a kapott rúd $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ hosszú lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ hosszút kap, és így tovább. A kapott összegekből álló sorozatot fogjuk végtelen sornak nevezni.

A végtelen sorok klasszikus motivációja Akhilleusz és a teknősbéka „futóversenye”, Zénon paradoxona. Akhilleusz kezdetben száz láb előnyt ad a hüllőnek. Alighogy elindul a verseny, Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahonnan a teknős indult. Ezalatt az idő alatt azonban a teknős is haladt egy keveset. Akhilleusz egy újabb lépéssel odaér, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan is ér Akhilleusz oda, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előrébb lesz. Zénón úgy érvelt, hogy Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak utolérni sem a teknőst. Azonban, ha összeadjuk a végtelen sok apró időszeletet, amit az egyes lépések

igénybe vesznek, véges időt kapunk eredményül, méghozzá pontosan annyit, amennyire Akhilleusznak szüksége van, hogy utolérje a teknőst. Ha ennél több időt adunk, természetesen meg is előzi.

III.1. Definíció. Legyen (a_n) egy adott sorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ S_3 := a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

összegek sorozatát. A kapott $(S_n) := (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ sorozatot *(végtelen) sor*nak nevezzük, és $\sum a_n$-nel jelöljük, azaz

$$\sum a_n := (S_n).$$

Itt $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a sor *n-edik részletösszege* vagy *szelete.*

A végtelen sor tehát egy speciális alakú sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens.

III.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, ha az (S_n) sorozat konvergens. $\sum a_n$ *divergens*, ha az (S_n) sorozat divergens.
Ha az (S_n) sorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor a $\sum a_n$ *végtelen sor összegén* a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

III.3. Feladat. *Mértani sor* Legyen $q \in \mathbb{R},\ |q| < 1$. Tekintsük a

$$\sum q^n$$

ún. *mértani sort*! Az n-edik részletösszeg ($n \geq 0$):

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ezért

$$\lim S_n = \lim \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a végtelen sor összege.
Ha $q \geq 1$, akkor a fenti részletösszegre $S_n \to \infty$ teljesül, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

Ha pedig $q \leq -1$, akkor a $\sum q^n$ sornak nem létezik összege.

A véges sok szám összeadására teljesülő azonosságok közül a végtelen sorok összegére teljesül az asszociativitás, valamint, hogy konstanst kiemelhetünk belőle. A végtelen sorok szorzatára (és a szorzat megfelelő definiálására) vonatkozó szabályok már bonyolultabbak, erről a fejezet végén ejtünk néhány szót.

III.4. Tétel (Sorok összege és műveletek)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}},$$

$c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1.

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

2. Ha az $A + B$ összeg értelmes (A és B nem ellenkező előjelű végtelenek), akkor

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B.$$

Bizonyítás. Jelölje $S_n := a_1 + \cdots + a_n$, $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. A feltételek szerint $\lim S_n = A$, $\lim T_n = B$.
1. A $\sum (c \cdot a_n)$ sor n-edik szeletére

$$U_n = (c \cdot a_1) + \cdots (c \cdot a_n) = c \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = c \cdot S_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = \lim U_n = c \cdot \lim S_n = c \cdot A = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. A $\sum (a_n + b_n)$ sor n-edik szeletére

$$V_n = (a_1 + b_1) + \cdots (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = S_n + T_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim V_n = \lim S_n + \lim T_n = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

III.5. *Megjegyzés.* Egy konvergens sor konvergens marad (legfeljebb az összege változik), ha

- (a_n) első néhány tagját megváltoztatjuk (akár elhagyjuk, felcseréljük, stb.);
- zárójeleket iktatunk be a végtelen összegbe (így tulajdonképpen (S_n) egy részsorozatát kapjuk).

Zárójeleket elhagyni azonban nem szabad! Például, a

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

végtelen sor konvergens, összege 1, a zárójeleket elhagyva azonban egy divergens sort kapunk (az (S_n) sorozat tagjai felváltva 0-k és 1-ek).

A részletösszegek sorozata – így a sor – pontosan akkor konvergens, ha teljesül rá a Cauchy-kritérium, ld. [Bevan2, III.53. Tétel].

III.6. Tétel (Cauchy-kritérium sorokra)**.** *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists N \in \mathbb{N},\ hogy\ \forall n > m \geq N\ esetén\ |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a sorozatokra tanult Cauchy-kritériumot az (S_n) sorozatra! Ez alapján (S_n) pontosan akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N},\ \text{hogy } \forall n > m \geq N \text{ esetén } |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Felhasználva, hogy

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n|, \quad n > m,$$

éppen a kívánt állítást kapjuk. □

A Cauchy-kritériumból következik, hogy ha egy sor konvergens, akkor a tagjaiból álló sorozat 0-hoz tart.

III.7. Állítás („Triviális kritérium" sorokra)**.** *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Bizonyítás. Mivel $\sum a_n$ egy konvergens sor, ezért az (S_n) sorozat konvergens. A fenti Cauchy-kritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $m \geq N$ és $n := m + 1 > N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \to 0$.
Másképp: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, vagyis $S_n \to A$, akkor persze $S_{n-1} \to A$ is teljesül. Így

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to A - A = 0.$$

□

Fontos megjegyeznünk, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz! Ehhez az alábbi példákat gondoljuk meg.

III.8. Példa. Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$, vagyis tekintsük a

$$\sum \ln \frac{n+1}{n}$$

sort! Igazoljuk, hogy nem konvergens!
Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, ezért

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n} \to \ln 1 = 0.$$

Másrészt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} S_n &= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Mivel $\ln(n+1) \to \infty$, ezért (S_n) nem korlátos, így $\sum a_n$ nem konvergens.

III.9. *Megjegyzés.* Láttuk, hogy az előbbi sor tagjai átalakíthatók mint

$$\sum \ln \frac{n+1}{n} = \sum (\ln(n+1) - \ln n).$$

Az ilyen típusú sorokat *teleszkópikus összeg*nek szokták hívni.

III.10. Példa. *Harmonikus sor* Tekintsük a

$$\sum \frac{1}{n} \tag{III.1}$$

ún. *harmonikus sort*! Tudjuk, hogy $\frac{1}{n} \to 0$. Mutassuk meg, hogy a $\sum \frac{1}{n}$ sor nem konvergens!
A III.6 Tételt alkalmazzuk. Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén $m = N$ és $n = 2N$ választással

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = \left| \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát a $\sum \frac{1}{n}$ sorra nem teljesül a Cauchy-kritérium, így nem konvergens.

A gyakorlatban előfordulnak az ún. abszolút konvergens sorok.

III.11. Definíció. A $\sum a_n$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

III.12. Állítás. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, ezért a III.6 Tétel alapján $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, hogy $\forall n > m \geq N$ esetén

$$||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| = |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\sum a_n$ sorra is teljesül a Cauchy-kritérium ugyanezen küszöbindexszel, hiszen

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens. □

III.2. Konvergenciakritériumok

A gyakorlatban a definíció vagy a Cauchy-kritérium alapján sokszor nehéz eldönteni, hogy egy adott sor konvergens-e. Másrészt, általában a sor összegének értékére nincs is szükségünk, csak annak ismeretére, hogy konvergens-e. Az alábbiakban néhány olyan tétellel ismerkedünk meg, melyek hasznosak lehetnek sorok konvergenciájának/divergenciájának megállapításához. A tételeket pozitív (≥ 0) tagú sorokra mondjuk ki, majd általánosítjuk tetszőleges előjelű tagokból álló sorokra.
Először azt gondoljuk meg, hogy egy pozitív tagú sornak mindig létezik összege.

III.13. Állítás. *Ha $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

mindig létezik, mégpedig $A \in \mathbb{R}$ (tehát a sor konvergens), ha a részletösszegeiből álló (S_n) sorozat felülről korlátos, és $A = +\infty$, ha (S_n) felülről nem korlátos.

Bizonyítás. Következik abból, hogy ilyenkor (S_n) monoton növő sorozat, tehát alkalmazható [Bevan2, III.37. Állítás]: (S_n) határértéke véges vagy $+\infty$, attól függően, hogy felülről korlátos vagy sem. □

III.14. Következmény. *A III.10 Feladatban a harmonikus sor összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

A III.13 Állítás alapján az alábbi, pozitív tagú sorokra kimondott konvegenciakritériumok esetében mindig elegendő azt vizsgálni, hogy a részletösszegekből álló sorozat felülről korlátos vagy nem.
Az első az ún. összehasonlító vagy majoráns- ill. minoránskritérium.

III.15. Tétel (Összehasonlító kritérium)**.** *Legyen* $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ha* $\sum b_n$ *konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*
2. *Ha* $\sum a_n$ *divergens, akkor* $\sum b_n$ *divergens.*

Bizonyítás. Legyen $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $T_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az előbbiek alapján (S_n) és (T_n) monoton növő sorozatok. Továbbá, a feltétel szerint

$$S_n \leq T_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{III.2}$$

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor ez azt jelenti, hogy (T_n) konvergens, tehát felülről korlátos. Az (III.2) miatt ilyenkor (S_n) is felülről korlátos, tehát konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.
2. Ugyanúgy adódik az (III.2) egyenlőtlenségből, mint az 1. pontban.

□

III.16. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a fenti tételben elég lett volna megkövetelni, hogy $a_n \leq b_n$ egy N indextől kezdve teljesüljön.

III.17. Példa. A III.15. Összehasonlító kritérium segítségével igazolható, hogy a

$$\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

sor divergens, mivel

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

és $\sum \frac{1}{n}$ divergens, ld. a III.10. Példát.

III.18. Feladat. A

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

alakú sorokat *hiperharmonikus sor*nak nevezik. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} &\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergens, ha } \alpha \leq 1; \\ &\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens, ha } \alpha > 1! \end{aligned} \tag{III.3}$$

A bizonyításhoz szükség lesz egy újabb konvergenciakritériumra, amit bizonyítás nélkül mondunk ki.

III.19. Tétel (Kondenzációs kritérium)**.** *Ha az* (a_n) *sorozat monoton fogyó és* $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *akkor a*

$$\sum a_n \text{ és } \sum 2^n a_{2^n}$$

sorok egyszerre konvergensek vagy divergensek.

A hiperharmonikus sorra alkalmazva, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pontosan akkor konvergens, ha a

$$\sum 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum 2^{n\cdot(1-\alpha)}$$

sor konvergens. Ez pedig a III.3 Feladat alapján éppen az (III.3) kitétel.
A továbbiakban a hányados- és gyökkritériummal ismerkedünk meg.

III.20. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium)**.** *Legyen* (a_n) *adott sorozat,* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ha* $\exists q \in (0,1)$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

   akkor $\sum a_n$ *konvergens.*

2. *Ha* $\exists q > 1$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q, \quad n \geq N,$$

   akkor $\sum a_n$ *divergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az 1. feltételből

$$\begin{aligned}
\frac{a_{N+1}}{a_N} &\le q \Rightarrow a_{N+1} \le a_N \cdot q \\
\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} &\le q \Rightarrow a_{N+2} \le a_{N+1} \cdot q \le a_N \cdot q^2 \\
&\vdots \\
\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} &\le q \Rightarrow a_{N+k} \le a_{N+k-1} \cdot q \le \ldots \le a_N \cdot q^k.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}
S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} \\
&\le L + a_N + a_N \cdot q + a_N \cdot q^2 + \ldots + a_N \cdot q^k \\
&= L + a_N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + a_N \cdot \frac{1}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk a III.3 Feladatból, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.
A 2. feltétel esete hasonlóan meggondolható. □

III.21. *Megjegyzés.* A hányadoskritérium feltételei teljesülnek, ha

1. $$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, 1),$$

   illetve

2. $$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor „bármi” lehet.

III.22. Példa. A

$$\sum \frac{2022^n}{n!}$$

sorra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2022^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2022^n} = \frac{2022}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

tehát alkalmazva a III.20. Hányadoskritériumot kapjuk, hogy a sor konvergens.

III.23. Példa. A

$$\sum \frac{2022^n \cdot n!}{n^n}$$

sorra

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2022^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2022^n \cdot n!} = 2022 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2022 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{2022}{\mathrm{e}}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Mivel $\frac{2022}{\mathrm{e}} > 1$, ezért a III.20. Hányadoskritérium alapján a sor divergens.

III.24. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium)**.** *Legyen (a_n) adott sorozat, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Ha $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

   akkor $\sum a_n$ konvergens.

2. *Ha $\exists q > 1$, hogy*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q \text{ végtelen sok } n\text{-re},$$

   akkor $\sum a_n$ divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az 1. feltételből

$$\begin{aligned}\sqrt[N]{a_N} \leq q &\Rightarrow a_N \leq q^N \\ \sqrt[N+1]{a_{N+1}} \leq q &\Rightarrow a_{N+1} \leq q^{N+1} \\ &\vdots \\ \sqrt[N+k]{a_{N+k}} \leq q &\Rightarrow a_{N+k} \leq q^{N+k}.\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} \\ &\leq L + q^N + q^{N+1} + \ldots + q^{N+k} \\ &= L + q^N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + q^N \cdot \frac{1}{1-q},\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk a III.3 Feladatból, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.
A 2. eset hasonlóan gondolható meg. □

III.25. *Megjegyzés.* A gyökkritérium feltételei teljesülnek, ha

1. $$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q \in [0, 1),$$

   illetve

2. $$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1.$$

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor „bármi” lehet.

III.26. Példa. A
$$\sum \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{n} \right)^n$$
sorra
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2022} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2022}, \quad n \to \infty.$$
Mivel $\frac{1}{2022} < 1$, ezért alkalmazva a III.24. Gyökkritériumot kapjuk, hogy a sor konvergens.

III.27. Példa. A
$$\sum \frac{n}{2022^n}$$
sorra
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2022} \to \frac{1}{2022}, \quad n \to \infty.$$
Mivel $\frac{1}{2022} < 1$, ezért a III.24. Gyökkritérium alapján a sor konvergens.

Ha a fenti kritériumokat tetszőleges előjelű sorokra akarjuk alkalmazni, akkor a sor tagjainak abszolút értékére kell őket vonatkoztatni.

III.28. Állítás. *Tegyük fel, hogy (a_n) és (b_n) tetszőleges előjelű sorozatok. Ekkor a III.15., III.20. és III.24. Tételek feltételeit a $\sum |a_n|$ ill. $\sum |b_n|$ sorra alkalmazva, mindegyik tételben az*

1. *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ abszolút konvergens, így konvergens; a*
2. *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ divergens – kivéve, a III.15. Tételben csak a $\sum |b_n|$ divergenciáját állíthatjuk.*

Bizonyítás. A bizonyítás az 1. esetben megegyezik a korábbi tételek bizonyításával. A 2. feltétel esetében a III.20. és a III.24. Tételek alkalmazásakor meggondolható, hogy $(|a_n|)$, így (a_n) sem tarthat 0-hoz. □

III.29. Feladat. Lássuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra a III.20. Tétel (hányadoskritérium) valamelyik feltétele teljesül, akkor a III.24. Tétel (gyökkritérium) megfelelő feltétele is teljesül rá!
Adjunk példát olyan sorra, melynek a gyökkritérium alapján eldönthető a konvergenciája, a hányadoskritérium alapján azonban nem! Tehát az előbbi állítás megfordítása nem igaz, így a gyökkritérium ténylegesen erősebb a hányadoskritériumnál.

III.30. Példa. A $\sum \frac{1}{n}$ divergens és a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetén is

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

teljesül. Tehát a III.21. és a III.25. Megjegyzésben a feltételek élesek.

III.31. Példa. Legyen

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ páratlan}, \\ \frac{1}{3^n}, & n \text{ páros}. \end{cases}$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ páratlan}, \\ \frac{1}{3}, & n \text{ páros}, \end{cases}$$

tehát az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatnak nincs határértéke. Viszont

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tehát a III.24. Tétel 1. pontja alkalmazható, így $\sum a_n$ konvergens.

Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

III.32. Tétel (Leibniz-tétel)**.** *Legyen (a_n) monoton fogyó, $a_n \to 0$. Ekkor a*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \vdots & \vdots \\ S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} \end{array}$$

Mivel $a_n > 0$ minden n-re, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &> S_2 \\ S_3 &> S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &> S_{2k}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_{2k-1} \geq a_{2k} > \ldots$, kapjuk az alábbit

$$S_1 \geq S_3 \geq \ldots \geq S_{2k-1} > \ldots \text{ és } S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2k} \leq \ldots$$

Ebből következik, hogy (S_{2k-1}) és (S_{2k}) is monoton, korlátos sorozat, tehát konvergens (ld. [Bevan2, III.12. Tétel]). Mivel $S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k}$, ezért

$$\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0,$$

hiszen $a_n \to 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A \in \mathbb{R},$$

amiből következik, hogy (S_n) is konvergens, $\lim S_n = A$, tehát $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens. □

A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, így

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \leq a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$|S_n - A| \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{III.4}$$

Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.

III.33. Definíció. Ha egy sor kielégíti a Leibniz-tétel feltételeit, vagyis

$$\sum(-1)^{n+1}a_n$$

alakú, ahol (a_n) monoton fogyó, $a_n \to 0$, akkor *Leibniz-sor*nak nevezzük.

III.34. Példa. A

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, így a Leibniz-tétel szerint konvergens. Azonban nem abszolút konvergens, mert láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

III.35. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

III.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata

III.36. Definíció. Egy $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót (p kölcsönösen egyértelmű és $\mathcal{R}(p) = \mathbb{N}$) a *természetes számok permutációjá*nak (más szóval *átrendezésé*nek) nevezünk.

Például a $3, 2, 1, 6, 5, 4, \ldots, 3k+3, 3k+2, 3k+1, \ldots$ sorozat egy permutációja a természetes számoknak.
Világos, hogy egy permutáció egyben egy sorozat is, ezért a

$$p(n) = p_n, \quad n \in N$$

jelölést fogjuk használni.

III.37. Definíció. Legyen adva az (a_n) és (b_n) sorozat. Azt mondjuk, hogy (b_n) az (a_n) sorozat egy *átrendezése*, ha létezik p permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.

A következő két tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

III.38. Tétel. *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha minden p permutáció esetén $\sum a_{p_n}$ abszolút konvergens. Ekkor bármely p permutáció esetén*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő kommutativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

III.39. Tétel. *Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor.*

1. *Minden $A \in \mathbb{R}$ számhoz létezik p permutáció, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A.$$

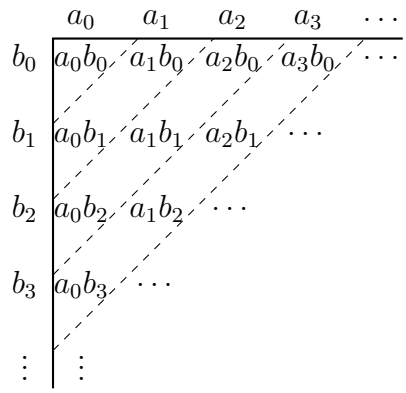
2. *Létezik olyan p permutáció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.*

A következőkben technikai okokból a sorozatok tagjait $n = 0$-tól kezdve sorszámozzuk.

III.40. Definíció. Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzat*án azt a $\sum c_n$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Szemléletesen:



III.1. ábra. Sorok Cauchy-szorzata

Formálisan a Cauchy-szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorzunk.

III.41. Tétel (Mertens-tétel)**.** *Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens és $\sum b_n$ konvergens végtelen sor. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens, továbbá*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, gondoljuk meg az alábbi lemmát!

III.42. Lemma. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens végtelen sor és (x_n) nullsorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_n x_0) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk egy K pozitív számot, melyre

$$|x_n| \le K,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le K. \tag{III.5}$$

Mivel $x_n \to 0$, a $\sum |a_n|$ sorra pedig teljesül a III.6 Cauchy-kritérium, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } |a_{N+1}| + ... + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad n > N. \tag{III.6}$$

Ha $n > 2N$, akkor $n - k > N$ minden $0 \le k \le N$ esetén, ezért (III.5) és (III.6) alapján

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} a_k x_{n-k}\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |x_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |x_{n-k}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \sum_{k=0}^{N} |a_k| + K \cdot \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

A Mertens-tétel bizonyítása. Jelölje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n := B \in \mathbb{R}.$$

Be kell látnunk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = A \cdot B.$$

Legyen $S_n := a_0 + a_1 + \cdots a_n$, $T_n := b_0 + b_1 + \cdots b_n$. Ekkor $\lim S_n = A$ és $\lim T_n = B$. Felírva a Cauchy-szorzat n-edik részletösszegét, átalakítások után az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned}V_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 T_n + a_1 T_{n-1} + \cdots + a_n T_0 \\ &= a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \cdots + a_n \cdot (T_0 - B) + (a_0 + a_1 + \cdots a_n) \cdot B \\ &= [a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \cdots + a_n \cdot (T_0 - B)] + S_n \cdot B.\end{aligned}$$

Mivel a $(T_n - B)$ sorozat 0-hoz tart, ezért a III.42 Lemma alapján a kapott összeg első (szögletes zárójelben lévő) tagja 0-hoz tart. A 2. tag pedig definíció szerint $A \cdot B$-hez tart, amivel a tételt beláttuk. □

III.43. Példa. Könnyen látható (akár a hányados-, akár a gyökkritérium segítségével), hogy a

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki a

$$\sum \frac{x^n}{n!} \text{ és } \sum \frac{y^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokra! A III.40 Definíció alapján a $\sum c_n$ szorzatsor n. tagja

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k},$$

ami a Binomiális tétel (ld. [Bevan2, I.9. Tétel]) alapján

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Tehát a két sor Cauchy-szorzatára

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

teljesül.

III.44. *Megjegyzés.* Az előbbi példában

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ez könnyen igazolható abból, hogy – amint láttuk – az $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ függvény ugyanazt az egyenlőséget elégíti ki, mint az exponenciális függvény, nevezetesen

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y),$$

$x = 1$-re belátható (ld. külön anyag), hogy $E(1) = \mathrm{e}$. Ebből teljes indukcióval következik, hogy $E(n) = \mathrm{e}^n$, $n \in \mathbb{N}$, amiből racionális számokra is adódik az

$$E(q) = \mathrm{e}^q, \quad q \in \mathbb{Q}$$

összefüggés. A valós kitevős hatványozás definíciójából (ld. [Egyvalt1, I.4. fejezet]) pedig kapjuk, hogy

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

III.4. Taylor-sorok

Most egy kis emlékeztető következik a félév elejéről. Ismételjük át az I.8. Definíciót!

III.45. Definíció. Legyen f az a pontban n-szer differenciálható függvény. Definiálja $T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T^f_{n,a}(x) = T_{n,a}(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

az *f függvény a pont körüli (vagy a pontbeli) n-edik Taylor-polinomját.*

A Lagrange-féle maradéktag az f függvény és a Taylor-polinomjának eltérése, ld. az I.10. Tételt.

III.46. Tétel (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$ környezet, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható $K(a)$-ban. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $c = c(x)$ az a és az x között (vagyis, $c \in (a,x)$ vagy $c \in (x,a)$), hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{III.7}$$

Ha az (III.7) formulában a maradéktagot egyenletesen felülről tudjuk becsülni az a és az x pont között, akkor az n-edik Taylor-polinomok $f(x)$-hez tartanak, ha $n \to +\infty$, ld. az I.11. Következményt.

III.47. Következmény (Taylor-sorok kifejtési tétele)**.** *Legyen $\mathcal{D}(f) = I$ intervallum, f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$ rögzítve. Ha található $C(x) \geq 0$ szám, hogy minden $c \in [a,x]$ (vagy $c \in [x,a]$) esetén*

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \leq C(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{III.8}$$

Világos, hogy az (III.8) egyenletben szereplő sor n-edik részletösszegére

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = T_{n,a}(x) \end{aligned} \tag{III.9}$$

teljesül. Mivel definíció szerint a sor összege a részletösszegekből álló sorozat határértéke, ezért a fenti következmény feltételei mellett adódnak az (III.8) egyenlőségek.

III.48. Definíció. A III.47. Következményben kapott

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{III.10}$$

végtelen sort az adott f függvény *a pont körüli Taylor-sor*ának nevezzük.

Az előző tételt szavakkal úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha f deriváltjai nem nőnek túl gyorsan, akkor f Taylor-sora konvergens és előállítja f-et.
A következőkben megadjuk a legfontosabb elemi függvények Taylor-sorát.

III.49. Tétel. *A következő sorfejtések érvényesek az $a = 0$ pont körül:*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1,$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

Bizonyítás. Az $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenlőség $|x| < 1$ esetén a tanult mértani sorösszegből következik. Másrészt könnyen látható, hogy

$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-\mathrm{id})^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}(0) = n!,$$

tehát a sor valóban egy (III.10) alakú Taylor-sor.
Az I.12. Példában meggondoltak alapján adódik az együtthatók helyessége, csak a konvergencia maradt kérdéses. Ennek igazolására az I.11 Következmény teljesülését fogjuk megmutatni a fenti függvényekre. Legyen $a = 0$ és x rögzítve az adott függvények értelmezési tartományából. Ekkor a 0 és x közé eső minden c esetén

$$|\exp^{(n)}(c)| = \mathrm{e}^c \le \mathrm{e}^{|x|} =: C(x),$$
$$|\sin^{(n)}(c)| \le 1 =: C = C(x),$$
$$|\cos^{(n)}(c)| \le 1 =: C = C(x),$$

□

III.50. *Megjegyzés.* Megemlítünk néhány további nevezetes 0 körüli Taylor-sorelőállítást (ld. még az I.3. Tételt).

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1, 1],$$

Az együtthatók a megfelelő deriváltakból ellenőrizhetők. Mivel

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

ezért tagonkénti integrálással (ez megtehető, de itt nem igazoljuk)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

Hasonlóan igazolható az $\operatorname{arctg} x$ előállítása is a $(-1, 1)$ intervallumon.
Érdekesség, hogy az előállítás a fent megadott intervallumvégpontokban is érvényes (ezt itt szintén nem bizonyítjuk), amiből

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

$$\pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Ez szerepelt a félév elején is, ld. (I.3) és (I.4).

III.51. *Megjegyzés.* Fontos megjegyeznünk, hogy ha egy Taylor-sor valamely x pontban konvergens, akkor nem biztos, hogy ott az összege $f(x)$-el egyenlő! Például, tekintsük az alábbi módon megadott függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Belátható, hogy $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tehát f-nek a 0 körüli Taylor-sora minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a csupa 0 tagból álló sor, ami természetesen konvergens, és összege 0. Ez azonban csak egyetlen pontban, az $x = 0$-ban egyezik meg $f(x)$-el.

III.5. A sorok néhány alkalmazásáról

III.5.1. Végtelen tizedestörtek

A valós számok végtelen tizedestört-előállítása már középiskolából ismert, de foglalkoztunk vele a Bevezető analízis 2. tárgy során is, ld. [Bevan2, II.5. fejezet]. Idézzük fel az ott kimondott definíciót!

III.52. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ szám *végtelen tizedestört alakja*

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots, \quad x_0 \in \mathbb{N},\ x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, n \geq 1, \tag{III.11}$$

ha $x_0 \leq x \leq x_0 + 1$,

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1 + 1}{10^1}, \quad x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2 + 1}{10^2},$$

és így tovább. Vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} \leq x \leq x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n + 1}{10^n}.$$

Adott $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ szám esetén a megfelelő x_n számok létezését az Archimédészi axióma segítségével mutattuk meg. A mostani tudásunkkal azt is beláthatjuk, hogy az x szám végtelen tizedestört alakja az x egy végtelen sorösszeg-előállítását definiálja, mégpedig

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}. \tag{III.12}$$

Ugyanis, s_n-nel jelölve az (III.12) végtelen sor n-edik részletösszegét, vagyis

$$s_n := x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}, \tag{III.13}$$

a III.52. Definíció alapján

$$|x - s_n| \leq \frac{1}{10^n},$$

tehát $s_n \to x$, $n \to \infty$.
Láttuk azt is, hogy az előállítás nem egyértelmű, például

$$1 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \cdots.$$

Megfordítva, legyen most adva egy

$$x_0, x_1x_2x_3\ldots, \quad x_0 \in \mathbb{N},\ x_n \in \{0,1,\ldots,9\}, n \geq 1 \tag{III.14}$$

végtelen tizedestört. Annak idején a Cantor-axióma segítségével igazoltuk, hogy az (III.14) tizedestörthöz egyértelműen létezik olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, amelynek ez a III.52. Definíció szerinti előállítása. Most már tudjuk, hogy

$$\sum \frac{x_n}{10^n}$$

ez esetben is egy konvergens végtelen sor, hiszen

$$\left|\frac{x_n}{10^n}\right| \leq \frac{9}{10^n}, \quad \sum \frac{9}{10^n} \text{ konvergens mértani sor,}$$

így alkalmazható a III.15. Összehasonlító kritérium. Mivel egy konvergens végtelen sor összege egyértelmű, így x is egyértelmű.

III.5.2. Az e szám irracionális

Tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}^+, q \geq 2$$

(a $q \geq 2$ feltehető, egyébként bővítjük a törtet). Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelöléssel $s_n \to \mathrm{e}$ szigorúan monoton növő módon. Legyen $n > q$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 \leq q! \cdot (s_n - s_q) &= q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdot\cdots\cdot n} \\
&= \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+2} + \cdots + \frac{1}{(q+2)\cdot\cdots\cdot n}\right) \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$0 \leq q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) \leq \frac{1}{2}.$$

Másrészt, az indirekt feltevés alapján és mivel $s_q < \mathrm{e}$,

$$0 < q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q\right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) \in \mathbb{Z},$$

ami ellentmondás.

III.53. *Megjegyzés.* Ez az elegáns bizonyítás Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikustól származik.

Tárgymutató

differenciálhatóság
egyváltozós
többször, 3

e szám, 67

folytonosság
egyenletes, 30
forgástest térfogata, 44

Heine-tétel, 31

integrálfüggvény, 40
és primitív függvény kapcsolata, 41
intervallum felosztása, 21
alsó, felső közelítőösszeg, 22
felosztásra illeszkedő vektor, 29
finomsága, 29
közös finomítása, 21
oszcillációs összeg, 26
Riemann-összeg, 29

L'Hospital-szabály, 9

Maclaurin-formula, 4

Newton–Leibniz-tétel, 38
normáltartomány, 43
területe, 43

primitív függvény, 12
f integrálja, 12
helyettesítéses integrálás, 17
Newton–Leibniz-tétel, 38
parciális integrálás, 16
és folytonosság kapcsolata, 42
és integrálfüggvény kapcsolata, 41

Riemann-integrál, 25
alsó/felső integrál, 24
helyettesítéses integrálás, 40
középértéktétele, 37
Leghasznosabb kritérium, 27
parciális integrálás, 39
Riemann-féle definíció, 30
tulajdonságok, 32–36
és folytonosság, 31

sor, 47
abszolút konvergens, 51
Cauchy-kritérium, 49
Cauchy-szorzat, 59
feltételesen konvergens, 58
gyökkritérium, 55
harmonikus sor, 50
hányadoskritérium, 53
kondenzációs kritérium, 53
konvergens, divergens, 47
Leibniz-sor, 58
Leibniz-tétel, 57
Mertens-tétel, 60
mértani sor, 47
műveletek, 48
összege, 47
összehasonlító kritérium, 52

Taylor-formula, 8
Lagrange-maradéktaggal, 5
Taylor-polinom
egyváltozós, 4

Taylor-sor, 64
Kifejtési tétel, 5
nevezetes függvényeké, 64
Tételek
Cauchy-kritérium sorokra, 49
Cauchy-középértéktétel, 8
Folytonos függvény integrálhatósága, 31
Folytonos függvény primitív függvénye, 42
Gyökkritérium sorokra, 55
Heine-tétel, 31
Helyettesítéses integrálás elve, 17
Riemann-integrálra, 40
Hányadoskritérium sorokra, 53
Kondenzációs kritérium sorokra, 53
L'Hospital-szabály, 9
Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra, 27
Leibniz-tétel, 57
Mertens-tétel, 60
Newton–Leibniz-tétel, 38
Parciális integrálás elve, 16
Riemann-integrálra, 39
Riemann-integrál középértéktétele, 37
Taylor-formula, 8
Lagrange-maradéktaggal, 5
Taylor-sorok kifejtési tétele, 5
Összehasonlító kritérium sorokra, 52

végtelen tizedestört, 66
definíciója, 66

Irodalomjegyzék

[LTS07] Laczkovich M., T. Sós V., *Valós analízis I.,* TypoTeX, Budapest, 2012.

[MFS] Mezei I., Faragó I., Simon P., *Bevezetés az analízisbe,* elektronikus jegyzet. `http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Mezei_Bev_Anal.pdf`

[Bevan2] Sikolya E., *Bevezető analízis 2 előadásjegyzet,* elektronikus jegyzet. `https://sikolyaesz.web.elte.hu/oktatas/Bevezeto_analizis_2_jegyzet.pdf`

[Egyvalt1] Sikolya E., *Egyváltozós analízis 1 előadásjegyzet,* elektronikus jegyzet. `https://sikolyaesz.web.elte.hu/oktatas/Egyvalt_analizis_1_jegyzet.pdf`

[Feladatgy.] Gémes M., Szentmiklóssy Z., *Analízis feladatgyűjtemény I.,* `http://etananyag.ttk.elte.hu/download.php?view.100`