

# Bevezetés az operátorfélcsoportok elméletébe

Sikolya Eszter

ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

# Tartalomjegyzék

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Előszó</b>                                                     | <b>3</b>  |
| <b>1. Lineáris dinamikai rendszerek</b>                           | <b>5</b>  |
| 1.1. Cauchy-féle függvényegyenlet . . . . .                       | 5         |
| 1.2. Véges dimenziós dinamikai rendszerek . . . . .               | 8         |
| 1.3. Egyenletesen folytonos operátorfélcsoportok . . . . .        | 15        |
| 1.4. Példák operátorfélcsoportokra . . . . .                      | 18        |
| 1.4.1. Szorzásfélcsoport a $C_0(\Omega)$ téren . . . . .          | 18        |
| 1.4.2. Szorzásfélcsoport az $L^p(\Omega)$ téren . . . . .         | 19        |
| 1.4.3. Eltolás-félcsoportok . . . . .                             | 21        |
| 1.5. Erősen folytonos operátorfélcsoportok . . . . .              | 23        |
| 1.5.1. Alapvető tulajdonságok . . . . .                           | 24        |
| 1.5.2. Standard konstrukciók . . . . .                            | 28        |
| 1.6. Feladatok . . . . .                                          | 31        |
| <b>2. Félcsoportok, generátorok, rezolvensek</b>                  | <b>32</b> |
| 2.1. Félcsoport generátora és annak rezolvense . . . . .          | 32        |
| 2.2. Példák „újrátöltve” . . . . .                                | 44        |
| 2.2.1. Standard konstrukciók . . . . .                            | 44        |
| 2.2.2. Standard példák . . . . .                                  | 45        |
| 2.3. Hille–Yosida-tételkör . . . . .                              | 48        |
| 2.3.1. Csoportok és félcsoportok generálása . . . . .             | 49        |
| 2.3.2. Disszipatív operátorok és kontrakciófélcsoportok . . . . . | 56        |
| 2.4. Evolúciós egyenletek . . . . .                               | 66        |
| 2.5. Félcsoportok típusai . . . . .                               | 69        |

|           |                                                               |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 2.5.1.    | Analitikus félcsoporthok . . . . .                            | 69         |
| 2.5.2.    | Differenciálható félcsoporthok . . . . .                      | 75         |
| 2.5.3.    | Normafolytonos félcsoporthok . . . . .                        | 77         |
| 2.5.4.    | Kompakt félcsoporthok . . . . .                               | 77         |
| 2.5.5.    | Példák . . . . .                                              | 81         |
| 2.6.      | Feladatok . . . . .                                           | 83         |
| <b>3.</b> | <b>Félcsoporthok perturbációja és approximációja</b>          | <b>84</b>  |
| 3.1.      | Korlátos perturbációk . . . . .                               | 84         |
| 3.2.      | Kontraktív és analitikus félcsoporthok perturbációi . . . . . | 90         |
| 3.3.      | További perturbációk . . . . .                                | 91         |
| 3.3.1.    | Kis kitérő a Szoboljev-tornyok felé . . . . .                 | 91         |
| 3.3.2.    | Desch–Schappacher-perturbáció . . . . .                       | 96         |
| 3.3.3.    | Miyadera–Voigt-perturbáció . . . . .                          | 98         |
| 3.4.      | Félcsoporthok approximációja . . . . .                        | 100        |
| 3.4.1.    | Pszeudorezolvenssek . . . . .                                 | 102        |
| 3.4.2.    | Approximációs tételek . . . . .                               | 105        |
| 3.4.3.    | Példák . . . . .                                              | 109        |
| 3.5.      | Feladatok . . . . .                                           | 117        |
| <b>4.</b> | <b>Félcsoporthok és generátorok spektrálmélete</b>            | <b>119</b> |
| 4.1.      | Zárt operátorok spektrálmélete . . . . .                      | 119        |
| 4.2.      | Félcsoporthok és generátoraik spektruma . . . . .             | 128        |
| 4.3.      | Spektráleképezés-tételek . . . . .                            | 137        |
| 4.4.      | Feladatok . . . . .                                           | 147        |
| <b>5.</b> | <b>Félcsoporthok aszimptotikája</b>                           | <b>148</b> |
| 5.1.      | Félcsoporthok stabilitása . . . . .                           | 148        |
| 5.2.      | Félcsoporthok hiperbolicitása . . . . .                       | 158        |
| 5.3.      | Feladatok . . . . .                                           | 161        |
|           | <b>Tárgymutató</b>                                            | <b>163</b> |
|           | <b>Irodalomjegyzék</b>                                        | <b>167</b> |

# Előszó

A félcsoporth fogalma – mint algebrából ismeretes – egy olyan struktúrát takar, amelyen egy kétváltozós, asszociatív művelet van értelmezve. Az operátor a matematikában általában leképezést jelent. Jelen jegyzet a funkcionálanalízis egy, a 20. század második felében született, és azóta is folyamatosan fejlődő ágába, az operátorfélcsoporthok világába nyújt betekintést. Az operátorfélcsoporthok itt egy tetszőleges  $X$  Banach-téren értelmezett korlátos (lineáris) operátorok struktúráját jelentik, amelyekre teljesül a

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad T(0) = \text{Id}$$

félcsoporth-tulajdonság minden  $t, s \geq 0$  esetén. Ha ezen tulajdonságot kibővítjük az erős (vagyis pontonkénti) folytonossággal, vagyis megköveteljük, hogy a

$$t \mapsto T(t)x$$

ún. pályák folytonosak legyenek  $\mathbb{R}^+$ -on minden  $x \in X$  esetén, akkor az erősen folytonos operátorfélcsoporthokhoz jutunk, amelyek szép tulajdonságokkal rendelkeznek.

A jegyzet elsősorban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán folyó Alkalmazott matematikus MSc-képzés, illetve a Matematika Doktori Iskola „Operátorfélcsoporthok” című tantárgyához készült segédanyag. Ezen egy féléves kurzus anyagánál azonban jóval bővebb ismereteket tartalmaz, amelyek az erősen folytonos operátorfélcsoporthok elméletébe való átfogóbb bevezetést szolgálják.

A jegyzet megértéséhez nélkülözhetetlen a funkcionálanalízis alapjainak ismerete. Ezek közül a legfontosabbak, címszavakban felsorolva: normált tér, duális tér, folytonos (korlátos) lineáris operátor és kompakt operátor fogalma, a fontosabb Banach-terek ( $L^p$ -terek,  $c_0$ -tér, stb.), Hilbert-terek, továbbá az alapvető tételek (Riesz-reprezentációs tétel, egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tétel, stb.).

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet Csomós Petrának és Farkas Bálintnak a jegyzet megírásában, Besenyei Ádámnak pedig az ábrák elkészítésében nyújtott segítségért.

# 1. fejezet

## Lineáris dinamikai rendszerek

### 1.1. Cauchy-féle függvényegyenlet

A félév során tulajdonképpen az ún. Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásával fogunk foglalkozni.

$$(FE) \quad \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & t, s \geq 0, \\ T(0) = \text{Id}. \end{cases}$$

Ezek az egyenletek és a bennük szereplő  $T$  operátorok *autonóm determinisztikus rendszerek* időbeli viselkedésének leírására szolgálnak. Ezen rendszereket, valamint a  $T$  operátorokat az alábbi módon definiálhatjuk.

- (a) A megfigyelés tárgya egy időbeli mozgásban/változásban lévő rendszer.
- (b) Az *időt* az  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$  additív (fél)csoportjával írjuk le.
- (c) A megfigyelt *rendszert* egy előzetesen lerögzített  $Z$  *állapottérrel* írjuk le, amely a későbbiekben általában egy ( $X$ -szel jelölt) Banach-tér. A tér  $z \in Z$  elemei az állapotok, amelyeknek az időbeli változására vagyunk kíváncsiak. Például, ha a megfigyelt rendszer egy bolygórendszer, akkor  $Z$  állhat a bolygók helyzeteiből és sebességvektorraiból (vagy perdületeiből ill. impulzusmomentumaiból). Ha pedig egy ökoszisztémát vizsgálunk, akkor az állapotok lehetnek az egyes fajokhoz tartozó egyedek számai.
- (d) A rendszer *mozgását* az állapotok időbeli változása írja le, vagyis matematikailag egy  $\mathbb{R} \ni t \mapsto z(t) \in Z$  függvény.

- (e) Minden  $t_0 \in \mathbb{R}$  időpillanathoz és minden  $z_0 \in Z$  kezdeti állapothoz egyértelműen tartozik egy  $z_{t_0, z_0} : \mathbb{R} \rightarrow Z$  mozgás, amelyre  $z_{t_0, z_0}(t_0) = z_0$ . Így tehát minden  $t, s \in \mathbb{R}$  számpárhoz definiálhatunk egy  $\Phi_{t,s} : Z \rightarrow Z$  leképezést, amelyre  $\Phi_{t,s}(w) := z_{t,w}(s)$  a  $t$  időpillanatban a  $w$ -ből induló mozgás helyzete az  $s$  időpillanatban. Az eddigi feltételek szerint

$$\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} = \Phi_{t,r}$$

minden  $t, s, r \in \mathbb{R}$  időpontra, és  $\Phi_{t,t} = \text{Id}_Z$ . Az ilyen típusú rendszerek neve *determinisztikus rendszer*.

- (f) A  $z_1 = \Phi_{t,s}(z_0)$   $t$  időpontbeli állapot csak a  $z_0$  kezdeti állapottól és a  $\tau = t - s$  különbségtől függ. Az ilyen rendszereket hívják *autonómnak*. Ez azt jelenti, hogy

$$T(t) := \Phi_{r, r+t}$$

definícióval (ahol  $r$  tetszőleges) egy  $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$  ún. *egyparaméteres csoportot* kapunk  $Z$ -n, amelyre az (e) pontban meggondoltak szerint

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad T(0) = \text{Id},$$

minden  $t, s \in \mathbb{R}$  esetén.

Cauchy 1821-ben vetette fel a kérdést: keressük (FE) összes  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos megoldását. Könnyen látható, hogy

$$t \mapsto e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$$

megoldás. A sejtésünk az – amit az alábbiakban bizonyítani is fogunk –, hogy más folytonos megoldás nincs. Először a differenciálható megoldásokat vizsgáljuk.

**1.1. Állítás.** Legyen  $T(t) := e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $t \geq 0$ . Ekkor  $T$  differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:

$$(DE) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) &= aT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= 1. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és  $a = \frac{d}{dt}T(0)$ .

*Bizonyítás.* Az állítás első része az analízisben tanultakból adódik. Az egyértelműséget bizonyításához legyen  $S(\cdot)$  egy másik differenciálható megoldás,  $t > 0$  rögzített. Definiálja

$$Q(s) := T(s)S(t-s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Ekkor  $Q$  differenciálható, és

$$\frac{d}{ds}Q(s) = \frac{d}{ds}T(s)S(t-s) - T(s)\frac{d}{ds}S(t-s) = aT(s)S(t-s) - T(s)aS(t-s) = 0,$$

ezért  $Q$  konstans  $[0, t]$ -n. Így

$$T(t) = Q(t) = Q(0) = S(t).$$

Mivel  $t$  tetszőleges volt, az egyértelműség bizonyítása kész.  $\square$

A következő állítás arról szól, hogy (FE) folytonos megoldásai differenciálhatók is.

**1.2. Állítás.** *Legyen  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos megoldása (FE)-nek. Ekkor  $T$  differenciálható is, továbbá egyértelműen létezik  $a \in \mathbb{C}$  szám, amelyre (DE) teljesül.*

*Bizonyítás.* Definiálja

$$V(t) := \int_0^t T(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Ekkor  $V$  differenciálható, és  $\frac{d}{dt}V(t) = T(t)$ . Mivel  $\frac{d}{dt}V(0) = T(0) = 1$ , ezért  $\exists t_0 > 0$ :  $V(t_0) \neq 0$ . Így (FE) felhasználásával

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{V(t_0)}V(t_0)T(t) = \frac{1}{V(t_0)} \int_0^{t_0} T(s)T(t) ds = \frac{1}{V(t_0)} \int_t^{t+t_0} T(s) ds \\ &= \frac{1}{V(t_0)} \int_0^{t+t_0} T(s) ds - \frac{1}{V(t_0)} \int_0^t T(s) ds = \frac{1}{V(t_0)} (V(t+t_0) - V(t)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Így  $T$  differenciálható, továbbá (FE) teljesülése miatt

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(t+h) - T(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(h) - 1) T(t) = \frac{d}{dt}T(0)T(t).$$

Tehát (DE) teljesül a  $T$  függvényre  $a = \frac{d}{dt}T(0)$  választással.  $\square$

**1.3. Következmény.** *Az előbbi két állítás alapján, ha  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos megoldása (FE)-nek, akkor  $T(t) = e^{at}$ ,  $t \geq 0$ , tehát  $T$  differenciálható is (sőt, végtelen sokszor differenciálható).*

Az (FE) egyenlet azt jelenti, hogy  $T : (\mathbb{R}_+, +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  homomorfizmus. Ez kiterjeszthető  $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ , sőt  $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  homomorfizmussá is.



## 1.2. Véges dimenziós dinamikai rendszerek

Legyen  $X := \mathbb{C}^n$  az állapottér, továbbá legyen  $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  az  $n \times n$  mátrixok tere, mely azonosítható a  $\mathbb{C}^n$ -en értelmezett (folytonos) lineáris leképezések terével (algebrájával). *Lineáris dinamikai rendszernek* nevezzük az olyan  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix értékű függvényt, amelyre teljesül a

$$(FE) \quad \begin{cases} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad t, s \geq 0, \\ T(0) &= \text{Id} \end{cases}$$

függvényegyenlet. Az  $x_0 \in X$  állapot időbeli változását a  $\xi_{x_0} : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ ,

$$\xi_{x_0}(t) := T(t)x_0$$

függvény írja le. A  $\{T(t)x_0 : t \geq 0\}$  halmazt szokás az  $x_0$  állapot *pályájának* is nevezni.

Keressük (FE) összes megoldását.

**1.4. Definíció.** Tetszőleges  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  és  $t \in \mathbb{R}$  esetén jelölje

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

A fenti definíció értelmes, mert bármely mátrixnormát véve, a végtelen sor részletösszegei Cauchy-sorozatokat alkotnak, tehát konvergálnak  $X$ -ben. Ugyanis, ha  $m > n$  természetes számok, akkor minden  $t \geq 0$  esetén

$$(1.1) \quad \left\| \sum_{k=0}^m \frac{t^k A^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!},$$

ami 0-hoz tart, ha  $n, m \rightarrow \infty$ , hiszen az  $e^{\|t\| \|A\|}$  sorának szeleteiről van szó. Ugyanígy látható, hogy

$$(1.2) \quad \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}, \quad t \geq 0.$$

**1.5. Állítás.** Tetszőleges  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

függvény folytonos és kielégíti az alábbiakat

$$(FE) \quad \begin{cases} e^{(t+s)A} &= e^{tA}e^{sA}, \quad t, s \geq 0, \\ e^{0A} &= \text{Id}. \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Az (1.1) egyenlőtlenség miatt az  $e^{tA}$  mátrixot definiáló sor abszolút konvergens. Ezért

$$\begin{aligned} e^{tA} e^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

Tehát (FE) teljesül. A folytonosság igazolásához megmutatjuk, hogy minden  $t \geq 0$  esetén

$$\|e^{(t+h)A} - e^{tA}\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Felhasználva az előbbieket kapjuk, hogy

$$e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA} (e^{hA} - \text{Id}).$$

Így elég bizonyítani, hogy  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{hA} = \text{Id}$ . Felhasználva az (1.2) egyenlőtlenséget,

$$\|e^{hA} - \text{Id}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|h|\|A\|} - 1 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

□

**1.6. Definíció.** Az  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  mátrixcsaládot az  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix által generált *egyparaméteres félcsoport*nak nevezzük.

**1.7. Megjegyzés.** Az 1.4. Definícióban  $t \in \mathbb{R}$  (vagy  $t \in \mathbb{C}$ ) is vehető. Ez esetben  $e^{tA}$  invertálható,  $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$  csoport, továbbá  $t \mapsto e^{tA}$  homomorfizmus  $(\mathbb{R}, +)$ -ből  $GL(n, \mathbb{C})$ -be (az invertálható,  $n \times n$ -es komplex mátrixok csoportjába).

**1.8. Példa.**

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix. Ekkor

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{ta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{ta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{ta_n} \end{pmatrix}.$$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Jordan-blokk. Írjuk fel  $A$ -t  $A = D + N$  összeg-alakban, ahol  $D = \text{diag}(\lambda)$  diagonális,  $N$  pedig nilpotens, azaz a  $k$ -adik hatványa 0. Így

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Mivel  $D$  és  $N$  felcserélhetők, ezért

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN}.$$

**1.9. Lemma.** Legyen  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tetszőleges,  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  invertálható. Ekkor az  $A := S^{-1}BS$  mátrix által generált (fél)csoport

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S.$$

*Bizonyítás.* Közvetlen számolással adódik, hogy  $A^k = S^{-1}B^kS$  minden  $k \in \mathbb{N}$  esetén. Mivel az  $S$  ill.  $S^{-1}$  operátorral való szorzás folytonos, ezért

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1}B^kS}{k!} = S^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) S = S^{-1}e^{tB}S.$$

□

**1.10. Következmény.** Legyen  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tetszőleges mátrix. Lineáris algebrából ismert, hogy létezik olyan  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  invertálható mátrix, melyre  $B = S^{-1}AS$  Jordan-normál alakú, vagyis az 1.8. Példában szereplő típusú mátrixok direkt összege. Az 1.9. Lemma alapján

$$e^{tA} = S e^{tB} S^{-1},$$

ahol  $e^{tB}$  az 1.8. Példában számított exponenciálisok direkt összegéből áll.

Az alábbiakban ismét a differenciálhatóság segítségével igazoljuk a (FE) megoldásának egyértelműségét  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -ben.

**1.11. Állítás.** Legyen  $T(t) := e^{tA}$  valamely  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  esetén. Ekkor a  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  függvény differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:

$$(DE) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= \text{Id}. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti  $T$  függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és  $A = \frac{d}{dt}T(0)$ .

*Bizonyítás.* A  $t$  pontbeli differenciálhatóság bizonyításához gondoljuk meg, hogy (FE) alapján minden  $h > 0$  esetén

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(h) - \text{Id}}{h}T(t).$$

Ezért elég belátni a 0-beli differenciálhatóságot, és hogy  $A = \frac{d}{dt}T(0)$ , amivel így (DE) teljesülését is igazoltuk. A  $T(t) = e^{tA}$  függvény definíciója miatt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(h) - \text{Id}}{h} - A \right\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

A bizonyítás hátralévő része az 1.1. Állítás bizonyításának analógiájára történik. □

**1.12. Állítás.** Legyen  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  folytonos megoldása (FE)-nek. Ekkor létezik egyértelműen  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix, amelyre

$$T(t) = e^{tA}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Definiálj

$$(1.3) \quad V(t) := \int_0^t T(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Ekkor  $V$  differenciálható, és  $\frac{d}{dt}V(t) = T(t)$ . Mivel  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}V(t) = \text{Id}$ , és az invertálható mátrixok nyílt halmazt alkotnak  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -ben, ezért  $\exists t_0 > 0$ :  $V(t_0)$  invertálható. Ekkor minden  $t$ -re

$$T(t) = V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t).$$

Ezután ismételjük meg az 1.2. Állítás bizonyítását! □

Az előbbi bizonyítás az (1.3) alakú integrálon alapult. Felmerül a kérdés, hogy hogyan értelmezhetjük mátrix – vagy még általánosabban: Banach-tér-értékű függvények – ilyen típusú integráljait. Ezért most a teljesség igénye nélkül kis kitérőt teszünk az ún. **Bochner-integrál** bevezetésére, ami nem más, mint a Lebesgue-integrál általánosítása Banach-tér-értékű függvényekre.

Legyen  $X$  Banach-tér,  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum,  $f : I \rightarrow X$ .

### 1.13. Definíció.

1. Azt mondjuk, hogy  $f$  *egyszerű függvény*, ha

$$f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{J_k}$$

alakú, ahol  $J_k \subset I$  (Lebesgue-)mérhető,  $x_k \in X$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Ekkor  $f$  (*Bochner-integrál*)ja

$$\int_I f(s) \, ds := \sum_{k=1}^n x_k \cdot \lambda(J_k) \in X.$$

2. Azt mondjuk, hogy  $f$  (*erősen*) *mérhető*, ha létezik  $(f_n)$  egyszerű függvényekből álló sorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad \text{m.m. } s \in I.$$

3. Ha  $f$  mérhető és létezik  $(f_n)$  egyszerű függvényekből álló sorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|f(s) - f_n(s)\| \, ds = 0,$$

akkor  $f$  (*Bochner-integrál*)ható,

$$\int_I f(s) \, ds := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(s) \, ds.$$

Igazolható, hogy a definícióban szereplő integrálsorozat valóban konvergens  $X$ -ben, és a limesz független az  $(f_n)$  egyszerű függvények választásától.

1.14. *Megjegyzés.* Ha  $I$  kompakt,  $f : I \rightarrow X$  folytonos, akkor a fent definiált integrálja megegyezik a Riemann-összegek által definiált Riemann-integrállal. Ha pedig  $I$  tetszőleges,  $f : I \rightarrow X$  folytonos akkor megegyezik a Riemann-improprius integráljával, feltéve, hogy valamelyik (a Riemann-improprius vagy a Bochner-) integrál abszolút konvergens.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondunk a Bochner-integrál tulajdonságairól szóló néhány fontos állítást.

### 1.15. Állítás.

(a) Legyen  $(f_n)$  mérhető függvényekből álló sorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad \text{m.m. } s \in I.$$

Ekkor  $f$  is mérhető.

(b) Legyen  $f$  mérhető,  $F : I \rightarrow \mathcal{L}(X)$  erősen folytonos (vagyis, minden  $x \in X$  esetén  $I \ni s \mapsto F(s)x \in X$  folytonos). Ekkor  $F \circ f$  is mérhető, ahol

$$(F \circ f)(s) = F(s)f(s).$$

**1.16. Állítás.** Legyen  $f : I \rightarrow X$  mérhető. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i)  $f$  integrálható;

(ii)  $\int_I \|f(s)\| \, ds < \infty$ .

**1.17. Következmény.** Legyen  $f : I \rightarrow X$  mérhető. Ekkor

(a)

$$\left\| \int_I f(s) \, ds \right\| \leq \int_I \|f(s)\| \, ds.$$

(b) Lebesgue dominált konvergenciatétel teljesül, vagyis ha  $(f_n)$  mérhető függvényekből álló sorozat,  $f_n \rightarrow f$  majdnem mindenütt, továbbá létezik olyan  $g$  valós függvény, amelyre

$$\|f_n\| \leq g, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \int_I g(s) \, ds < \infty \quad (\text{azaz } g \in L^1(I)),$$

akkor

$$\int_I f_n(s) \, ds \rightarrow \int_I f(s) \, ds.$$

A továbbiakban az  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix által generált  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  félcsoporthoz aszimptotikus tulajdonságaival foglalkozunk.

**1.18. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  félcsoport *stabil*<sup>1</sup>, ha

$$(1.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0,$$

ahol  $\|\cdot\|$  tetszőleges mátrixnorma az  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  téren.

1.19. *Megjegyzés.* Mivel az  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  téren a pontonkénti és a normakonvergenzia megegyezik, ezért az (1.4) feltétel ekvivalens azzal, hogy minden  $x \in \mathbb{C}^n$  esetén

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}x\| = 0.$$

A következő tétel az  $A$  mátrix  $\sigma(A)$ -val jelölt sajátértékhalmozának tulajdonságai és a stabilitás közötti kapcsolatról szól.

**1.20. Tétel** (Ljapunov, 1892). *Legyen  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  az  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix által generált félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i) *A félcsoport (aszimptotikusan) stabil, azaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$ ;*
- (ii) *Az  $A$  mátrix minden sajátértéke negatív valós részű, azaz  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  minden  $\lambda \in \sigma(A)$  esetén.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy a stabilitás invariáns a hasonlóságra, így feltehető, hogy  $A$  Jordan normálalakú. Ekkor szintén könnyen igazolható, hogy  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  pontosan akkor stabil, ha minden egyes  $A_k$  Jordan-blokk által generált  $(e^{tA_k})_{t \geq 0}$  félcsoport stabil. Az 1.8 Példában kiszámoltak alapján ez akkor teljesül, ha  $e^{t\lambda_k} \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Ez pedig akkor igaz, ha  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  minden  $k$ -ra. Mivel  $\lambda_k$ -k éppen  $A$  sajátértékei, a bizonyítás kész.  $\square$

Később általánosítani fogjuk a fenti állítást végtelen dimenziós esetre is. Hasonlóan bizonyítható az alábbi következmény.

**1.21. Következmény.** *Legyen  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  az  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mátrix által generált félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i) *A félcsoport korlátos, azaz létezik  $M \geq 0$ , hogy  $\|e^{tA}\| \leq M$  minden  $t \geq 0$  esetén;*
- (ii) *Az  $A$  mátrix minden sajátértékére  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  teljesül, és ha  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , akkor  $\lambda$  egyszeres sajátérték (vagyis a hozzá tartozó összes Jordan-blokk  $1 \times 1$  méretű).*

---

<sup>1</sup>Precízen azt kellene mondanunk, hogy *aszimptotikusan stabil*.

### 1.3. Egyenletesen folytonos operátorfélcsoportok

Legyen  $X$  tetszőleges Banach-tér, jelölje  $\mathcal{L}(X)$  a rajta értelmezett folytonos (korlátos) lineáris operátorok Banach terét a megfelelő operátornormával. Keressük az összes olyan  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvényt, mely teljesíti az alábbi egyenleteket:

$$(FE) \quad \begin{cases} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad t, s \geq 0, \\ T(0) &= \text{Id}. \end{cases}$$

**1.22. Definíció.** A korlátos lineáris operátorokból álló  $(T(t))_{t \geq 0}$  családot (*egyparaméteres*) *operátorfélcsoportnak* (vagy lineáris dinamikai rendszernek) nevezzük az  $X$  Banach-téren, ha (FE) teljesül rá. Ha (FE) minden  $t, s \in \mathbb{R}$  esetén is teljesül, akkor a  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  családot (*egyparaméteres*) *operátorcsoportnak* nevezzük.

**1.23. Definíció.** Tetszőleges  $A \in \mathcal{L}(X)$  és  $t \in \mathbb{R}$  esetén jelölje

$$(1.5) \quad e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

A fenti definíció értelmes, mert a végtelen sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, tehát konvergálnak  $\mathcal{L}(X)$ -ben (v.ö. az 1.4. Definícióval).

A következő két állítás a mátrixokra bizonyított 1.5. és 1.11. Állításokkal analóg módon igazolható.

**1.24. Állítás.** Tetszőleges  $A \in \mathcal{L}(X)$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$$

*függvény folytonos és kielégíti az alábbiakat*

$$(FE) \quad \begin{cases} e^{(t+s)A} &= e^{tA}e^{sA}, \quad t, s \geq 0, \\ e^{0A} &= \text{Id}. \end{cases}$$

**1.25. Állítás.** Legyen  $T(t) := e^{tA}$  valamely  $A \in \mathcal{L}(X)$  esetén. Ekkor a  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvény differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:

$$(DE) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= \text{Id}. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és  $A = \frac{d}{dt}T(0)$ .



**1.26. Definíció.** A  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyparaméteres operátorfélcsoportot *egyenletesen folytonosnak* mondunk, ha

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$$

folytonos ( $\mathcal{L}(X)$ -ben az operátornormát véve).

A következő tétel ugyanúgy bizonyítható, mint az 1.12. Állítás, kihasználva, hogy az invertálható operátorok  $\mathcal{L}(X)$ -ben is nyílt halmazt alkotnak.

**1.27. Tétel.** Az  $X$  Banach-téren egyenletesen folytonos  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport

$$T(t) = e^{tA}$$

alakú valamely  $A \in \mathcal{L}(X)$  operátorra.

Az  $X$  Banach-téren értelmezett operátorfélcsoportokkal kapcsolatosan most vezessünk be egy, a mátrixokénál látszólag erősebb stabilitásfogalmat.

**1.28. Definíció.** A  $(T(t))_{t \geq 0}$  operátorfélcsoportot *egyenletesen exponenciálisan stabilnak* mondunk, ha léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  számok, melyekre

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0.$$

Az alábbi állításból kiderül, hogy az exponenciális stabilitás fogalma egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén megegyezik azzal, amit stabilitásként definiálnánk.

**1.29. Állítás.** A  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén a következő állítások ekvivalensek.

- (i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$ ;
- (iii)  $\exists t_0 > 0 : \|T(t_0)\| < 1$ ;
- (iv)  $\exists t_1 > 0 : r(T(t_1)) < 1$ , ahol  $r(T(t))$  jelöli  $T(t)$  spektrálsugarát.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) triviális. (iii)  $\Rightarrow$  (iv) következik abból, hogy

$$r(T(t)) \leq \|T(t)\|.$$

Másrészt,  $(iv) \Rightarrow (iii)$  következik abból, hogy

$$r(T(t_1)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(t_1)^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(kt_1)\|^{\frac{1}{k}}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ : Legyen  $\|T(t_0)\| < q < 1$  rögzített pozitív szám, és

$$M := \sup_{s \in [0, t_0]} \|T(s)\|,$$

ami véges, hiszen  $t \mapsto \|T(t)\|$  folytonos. Tetszőleges  $t$ -t írjunk fel  $t = k \cdot t_0 + s$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0, t_0]$  alakban! Ekkor

$$\|T(t)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|T(kt_0)\| \leq M \|T(t_0)^k\| \leq M q^k = \frac{M}{q} e^{(k+1) \ln q} \leq \frac{M}{q} e^{-\varepsilon t},$$

ahol  $\varepsilon = -\frac{\ln q}{t_0} > 0$ . □

A következő tétel az  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  félcsoport és az  $A \in \mathcal{L}(X)$  operátor spektruma, azaz sajátértékeinek halmaza közötti kapcsolatról szól. Egy  $B \in \mathcal{L}(X)$  operátor spektrumát  $\sigma(B)$ -vel jelöljük.

**1.30. Tétel** (Spektrálleképezés). *Legyen  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  egyenletesen folytonos operátorfélcsoport. Ekkor*

$$\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)} = \{e^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$$

*minden  $t \geq 0$  esetén.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás az alábbi ötleten alapul, nem részletezzük. Ha  $t = 0$ , akkor az állítás triviális. Legyen tehát  $t > 0$ . Ekkor

$$e^{tA} - e^{t\lambda} \text{Id} = e^{t\lambda} (e^{t(A-\lambda \text{Id})} - \text{Id}) = e^{t\lambda} (A - \lambda) \int_0^t e^{s(A-\lambda)} ds.$$

Mivel  $\int_0^t e^{s(A-\lambda)} ds$  invertálható, ezért az egyenlőségből következik, hogy

$$e^{tA} - e^{t\lambda} \text{Id} \text{ invertálható} \iff A - \lambda \text{ invertálható}.$$

□

**1.31. Következmény.** *Az 1.29. Állítás (i) – (iv) pontjai ekvivalensek azzal, hogy (v)  $\text{Re } \lambda < 0$  minden  $\lambda \in \sigma(A)$  esetén.*

## 1.4. Példák operátorfélcsoportokra

### 1.4.1. Szorzásfélcsoport a $C_0(\Omega)$ téren

Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  esetén

$$C_0(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \{s : |f(s)| \geq \varepsilon\} \text{ kompakt}\}.$$

**1.32. Definíció.** Legyen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos. Definiálja az  $M_q : C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$  ún. *szorzásoperátort*

$$(1.6) \quad \begin{aligned} M_q f &:= q \cdot f \\ D(M_q) &:= \{f \in C_0(\Omega) : q \cdot f \in C_0(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Az alpont hátralévő állításainak bizonyítását a fejezet végén feladatként tűzzük ki.

**1.33. Állítás.** Az (1.6) egyenletben definiált  $M_q$  operátorra az alábbiak teljesülnek.

(a)  $(M_q, D(M_q))$  zárt, sűrűn definiált.

(b)  $M_q$  pontosan akkor korlátos (vagyis  $D(M_q) = C_0(\Omega)$ ), ha  $q$  korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\| = \sup_{s \in \Omega} |q(s)|.$$

(c)  $M_q$ -nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha  $q$ -nak létezik inverze  $1/q$ , vagyis  $0 \notin \overline{q(\Omega)}$ . Ekkor

$$M_q^{-1} = M_{1/q}.$$

(d)  $M_q$  spektruma  $q$  képhalmazának lezártja, vagyis

$$\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}.$$

**1.34. Definíció.** Legyen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos függvény, melyre

$$\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty.$$

Ekkor definiálja a  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  ún. *szorzásfélcsoportot*

$$(1.7) \quad T_q(t)f := e^{tq}f, \quad t \geq 0, \quad f \in C_0(\Omega).$$

**1.35. Állítás.** Az (1.7) félcsoportra az alábbiak teljesülnek.

(a)  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha  $q$  korlátos.

(b) Minden  $f \in C_0(\Omega)$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t)f \in C_0(\Omega)$$

leképezés folytonos.

**1.36. Állítás.** Legyen minden  $t \geq 0$  esetén  $m_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  korlátos folytonos függvény, és tegyük fel, hogy

1. a megfelelő

$$T(t)f := m_t \cdot f$$

szorzásoperátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak a  $C_0(\Omega)$  téren,

2. minden  $f \in C_0(\Omega)$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in C_0(\Omega)$$

leképezés folytonos.

Ekkor létezik olyan  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos függvény, amelyre  $\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$ , és

$$m_t(s) = e^{tq(s)}, \quad s \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

## 1.4.2. Szorzásfélcsoport az $L^p(\Omega)$ téren

Legyen a következőkben  $1 \leq p < \infty$ ,  $X := L^p(\Omega)$ , ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-mérhető. Lássuk el  $X$ -et a szokásos

$$\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f(s)|^p d\mu(s) \right)^{1/p}$$

normával, ahol  $f \in X$  a megfelelő ekvivalenciaosztály egy eleme,  $\mu$  pedig az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett Lebesgue-mértéket jelöli.

Legyen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető. Ekkor  $q$  lényeges képhalmaza

$$q_{\text{ess}}(\Omega) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \mu(\{s \in \Omega : |q(s) - \lambda| < \varepsilon\}) \neq 0 \text{ minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén} \}.$$

**1.37. Definíció.** Legyen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető. Defináljuk az  $M_q : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  szorzásoperátort a következőkkel:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} M_q f &:= q \cdot f \\ D(M_q) &:= \{f \in L^p(\Omega) : q \cdot f \in L^p(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Az alpont hátralévő állításainak bizonyítását a fejezet végén feladatként tűzzük ki.

**1.38. Állítás.** Az (1.8) egyenlőséggel definiált  $M_q$  operátorra az alábbiak teljesülnek.

(a)  $(M_q, D(M_q))$  zárt, sűrűn definiált.

(b)  $M_q$  pontosan akkor korlátos (vagyis  $D(M_q) = L^p(\Omega)$ ), ha  $q$  lényegesen korlátos, vagyis  $q_{\text{ess}}(\Omega)$  korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\|_{\infty} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in q_{\text{ess}}(\Omega)\}.$$

(c)  $M_q$ -nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha  $0 \notin q_{\text{ess}}(\Omega)$ . Ekkor

$$M_q^{-1} = M_r,$$

ahol  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$r(s) := \begin{cases} 1/q(s), & q(s) \neq 0; \\ 0, & q(s) = 0. \end{cases}$$

(d)  $M_q$  spektruma  $q$  lényeges képhalmaza, vagyis

$$\sigma(M_q) = q_{\text{ess}}(\Omega).$$

Jelölje a továbbiakban

$$\text{ess sup } q := \sup_{\lambda \in q_{\text{ess}}(\Omega)} \lambda.$$

**1.39. Definíció.** Legyen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető függvény, amelyre

$$\text{ess sup } \text{Re } q = \sup_{\lambda \in q_{\text{ess}}(\Omega)} \text{Re } \lambda < \infty.$$

Ekkor definiálja a  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  szorzásfélcsoportot

$$(1.9) \quad T_q(t)f := e^{tq}f, \quad t \geq 0, \quad f \in L^p(\Omega).$$

**1.40. Állítás.** Az (1.9) félcsoportra az alábbiak teljesülnek.

(a)  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha  $q$  lényegesen korlátos.

(b) Minden  $f \in L^p(\Omega)$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t)f \in L^p(\Omega)$$

leképezés folytonos.

**1.41. Állítás.** Legyen minden  $t \geq 0$  esetén  $m_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  korlátos mérhető függvény, és tegyük fel, hogy

1. a megfelelő

$$T(t)f := m_t \cdot f$$

szorzásoperátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak az  $L^p(\Omega)$  téren,

2. minden  $f \in L^p(\Omega)$  esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in L^p(\Omega)$$

leképezés folytonos.

Ekkor létezik olyan  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető függvény, amelyre  $\text{ess sup } \text{Re } q < \infty$ , és

$$m_t(s) = e^{tq(s)} \text{ majdnem minden } s \in \Omega \text{ és } t \geq 0 \text{ esetén.}$$

### 1.4.3. Eltolás-félcsoportok

**1.42. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \geq 0$ . Ekkor

$$(1.10) \quad (T_\ell(t)f)(s) := f(s+t), \quad s \in \mathbb{R};$$

$$(T_r(t)f)(s) := f(s-t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Könnyen meggondolható, hogy a  $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$  és  $(T_r(t))_{t \geq 0}$  operátorcsaládok kielégítik (FE)-t.

1.43. *Jelölés.* Jelölje a továbbiakban  $I \subset \mathbb{R}$  tetszőleges intervallum esetén (a példáinkban  $I = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$  vagy  $[a, b]$ )

- $L^\infty(I)$  az  $I$ -n m.m. értelmezett értelmezett korlátos, mérhető függvények (ill. azok ekvivalenciaosztályainak) terét;
- $C_b(I)$  az  $I$ -n korlátos, folytonos függvények terét;
- $C_{ub}(I)$  az  $I$ -n korlátos, egyenletesen folytonos függvények terét;
- $C_0(I)$  az  $I$ -n folytonos, végtelenben eltűnő függvények terét;
- $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  az  $\mathbb{R}$ -en folytonos,  $2\pi$ -nként periodikus függvények terét, ellátva a  $\|\cdot\|_\infty$  supremum-normával,

továbbá  $1 \leq p < \infty$  esetén

- $L^p(I)$  az  $I$ -n m.m. értelmezett olyan függvényeket (illetve azok ekvivalencia-osztályait), melyek  $p$ -edik abszolút hatványának integrálja véges, ellátva a szokásos  $p$ -normával.

**1.44. Állítás.** Legyen  $I := \mathbb{R}$ . Ekkor  $T_\ell(t)$  operátorok izometriák a fenti terek mindegyikén, inverzük  $T_r(t)$ . Így a  $(T_\ell(t))_{t \in \mathbb{R}}$  (vagy  $(T_r(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ) operátorcsalád egyparaméteres ún. eltoláscsoportot alkot a fenti terek mindegyikén.

**1.45. Állítás.** Legyen  $I = \mathbb{R}$ . Ekkor a  $(T_\ell(t))_{t \in \mathbb{R}}$  eltoláscsoport nem egyenletesen folytonos egyetlen fenti téren sem. Továbbá

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto T_\ell(t)f \in L^\infty(\mathbb{R})$$

csak akkor folytonos, ha  $f \in C_{ub}(\mathbb{R})$ .

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy a  $t \mapsto T_\ell(t)$  nem normafolytonos  $t = 0$ -ban a fenti tereken. Legyen  $h > 0$  tetszőleges. Ekkor konstruálható olyan  $f_h$  függvény a fenti terek mindegyikében (gondoljunk „csúcsos” folytonos függvényekre), amelyre

$$\|T_\ell(h)f_h - T_\ell(0)f_h\| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_h(s+h) - f_h(s)| = 1,$$

tehát  $\|T_\ell(h) - T_\ell(0)\| \not\rightarrow 0, h \rightarrow 0$ .

A második állítás következik abból, hogy tetszőleges  $h > 0, f \in L^\infty(\mathbb{R})$  esetén

$$\begin{aligned} \|T_\ell(t+h)f - T_\ell(t)f\| &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t+s+h) - f(t+s)| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s+h) - f(s)| \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pontosan akkor teljesül, ha  $f \in C_{ub}(\mathbb{R})$ . □

**1.46. Definíció.** Legyen  $I = \mathbb{R}_+$ . Ekkor a baleltolás-operátort ugyanúgy definiáljuk az 1.43. Jelölésben bevezetett tereken, mint az (1.10) egyenletben. A jobbeltolás legyen a folytonos függvények terein

$$(T_r(t)f)(s) := \begin{cases} f(s-t), & s-t \geq 0; \\ f(0), & s-t < 0, \end{cases}$$

$L^p(\mathbb{R}_+)$ -on pedig

$$(T_r(t)f)(s) := \begin{cases} f(s-t), & s-t \geq 0; \\ 0, & s-t < 0. \end{cases}$$

Természetesen az 1.45. Állítás érvényben marad  $I = \mathbb{R}_+$  esetén is.

**1.47. Definíció.** Legyen  $I = [a, b]$ . Ekkor a baleltolás-operátor a folytonos függvények terein

$$(T_\ell(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t), & s+t \leq b; \\ f(b), & s+t > b, \end{cases}$$

$L^p[a, b]$ -n pedig

$$(T_\ell(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t), & s+t \leq b; \\ 0, & s+t > b. \end{cases}$$

**1.48. Definíció.** Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoportot *nilpotens*nek hívunk, ha létezik olyan  $t_0 \geq 0$ , amelyre  $T(t_0) = 0$ . Ekkor természetesen minden  $t > t_0$  esetén is  $T(t) = 0$ .

**1.49. Állítás.** A baleltolás-félcsoport  $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$  *nilpotens*  $L^p[a, b]$ -n, azaz

$$T_\ell(t) = 0,$$

ha  $t \geq b - a$ .

## 1.5. Erősen folytonos operátorfélcsoportok

Amint az előző fejezet példáiból láthattuk, sok esetben a leggyakrabban előforduló, függvénytereken ható operátorfélcsoportok nem egyenletesen folytonosak. Az 1.35. és az 1.40. Állítások (b) pontjában szereplő, ún. erős folytonosság azonban olyan tulajdonság, mely a legtöbb példában szereplő félcsoportra teljesül.



**1.50. Definíció.** Legyen  $X$  Banach-tér. Az  $X$ -en értelmezett, korlátos lineáris operátorokból álló  $(T(t))_{t \geq 0}$  operátorcsaládot *(egyparaméteres) erősen folytonos félcsoportnak* vagy  $C_0$ -félcsoportnak nevezzük, ha kielégíti az

$$(FE) \quad \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & t, s \geq 0; \\ T(0) = \text{Id} \end{cases}$$

függvényegyenletet, továbbá a

$$(EF) \quad \xi_x : t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x$$

*pályaleképezések* (ezeket időnként *pályának* is fogjuk hívni) folytonosak  $\mathbb{R}_+$ -on minden  $x \in X$  esetén.

Ha az (FE) és (EF) tulajdonságok  $\mathbb{R}$ -en is teljesülnek minden  $t, s \in \mathbb{R}$  esetén, akkor az operátorcsaládot *(egyparaméteres) erősen folytonos csoportnak* nevezzük, és jelöljük mint  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ .

Ezen erősen folytonos (fél)csoportok lesznek jelen jegyzet főszereplői.

### 1.5.1. Alapvető tulajdonságok

Elsőként azt vizsgáljuk meg, hogy az erős folytonosság (EF) tulajdonságát hogyan lehet könnyen igazolni konkrét operátorcsaládok esetén.

**1.51. Lemma.** Legyen  $X$  Banach-tér,  $F : K \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvény, ahol  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt halmaz. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- (i) Minden  $x \in X$  esetén a  $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$  leképezés folytonos (vagyis  $F$  erősen folytonos);
- (ii)  $F$  egyenletesen korlátos  $K$ -n, és a  $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$  leképezés folytonos minden  $x \in D$  esetén, ahol  $D \subset X$  sűrű részhalmaz.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Következik abból, hogy az  $(F(t))_{t \in K}$  függvénycsalád pontonként korlátos az  $X$  Banach-téren (hiszen kompakt halmaz folytonos képe korlátos), majd alkalmazzuk az egyenletes korlátosság tételét. A  $D$  altér pedig választható  $D := X$ -nek.  
(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Legyen  $\|F(s)\| \leq M$ ,  $s \in K$ . Legyen  $x \in X$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  rögzített. Megmutatjuk,

hogy  $K \ni s \mapsto F(s)x \in X$  leképezés folytonos  $t$ -ben. Ehhez vegyünk egy  $\varepsilon > 0$  számot. Azt kell igazolni, hogy létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $s \in K$ ,  $|s - t| < \delta$ , akkor

$$\|F(s)x - F(t)x\| < \varepsilon.$$

A  $D$  halmaz sűrűsége miatt létezik olyan  $d_{\varepsilon, x} =: d \in D$  melyre

$$\|x - d\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

A (ii) tulajdonság miatt  $d$ -hez és  $\varepsilon$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $s \in K$ ,  $|s - t| < \delta$ , akkor

$$\|F(s)d - F(t)d\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen  $s \in K$ ,  $|s - t| < \delta$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \|F(s)x - F(t)x\| &\leq \|F(s)x - F(s)d\| + \|F(s)d - F(t)d\| + \|F(t)d - F(t)x\| \\ &\leq \|F(s)\| \cdot \|x - d\| + \|F(s)d - F(t)d\| + \|F(t)\| \cdot \|x - d\| \\ &< M \cdot \varepsilon/3M + \varepsilon/3 + M \cdot \varepsilon/3M = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ezen lemma segítségével belátható, hogy az (EF) tulajdonság már jóval gyengébb feltételekből is következik.

**1.52. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport az  $X$  Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos;
- (ii)  $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$  minden  $x \in X$  esetén;
- (iii) Léteznek  $\delta > 0$ ,  $M \geq 1$  számok, és  $D \subset X$  sűrű részhalmaz, melyekre

$$(a) \quad \|T(t)\| \leq M \text{ minden } t \in [0, \delta];$$

$$(b) \quad \lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \text{ minden } x \in D \text{ esetén.}$$

*Bizonyítás.*  $(i) \Rightarrow (iii)(b)$  : könnyen látható.

$(i) \Rightarrow (iii)(a)$  : Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan  $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  sorozat, amelyre  $\|T(\delta_n)\| \rightarrow \infty$ . Az egyenletes korlátosság tétele miatt ekkor létezik  $x \in X$ , melyre  $\|T(\delta_n)x\|$  normák nem korlátosak, ami ellentmond az erős folytonosságnak.

$(iii) \Rightarrow (ii)$  : Legyen  $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ ,  $t_n \rightarrow 0$  tetszőleges sorozat. A  $(iii)$  tulajdonság miatt  $x \in D$  esetén  $T(t_n)x \rightarrow x$ , továbbá van olyan  $N \in \mathbb{N}$ , hogy  $n \geq N$ -re  $\|T(t_n)\| \leq M$ . Legyen

$$K := \{t_n : n \geq N\} \cup \{0\}.$$

Ekkor  $K$  kompakt halmaz  $\mathbb{R}$ -ben,  $T : K \rightarrow \mathcal{L}(X)$  korlátos és  $D$ -n erősen folytonos. Ekkor az 1.51. Lemma miatt  $X$ -en is erősen folytonos. Mivel a  $(t_n)$  sorozat tetszőleges volt,  $(ii)$  teljesül.

$(ii) \Rightarrow (i)$  : Legyen  $t_0 > 0$ ,  $x \in X$  tetszőleges. Megmutatjuk, hogy  $t \mapsto T(t)x$  folytonos  $t_0$ -ban. Ehhez legyen először  $h > 0$ . Ekkor (FE) és  $(ii)$  miatt

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \cdot \|T(h)x - x\| \rightarrow 0,$$

ha  $h \downarrow 0$ .

Legyen most  $h < 0$ . Ekkor szintén az (FE) egyenletből adódik, hogy

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 + h)\| \cdot \|x - T(-h)x\|.$$

A  $(ii)$  miatt a 2. tényező 0-hoz tart, ha  $h \uparrow 0$ . Legyen  $0 < \delta < t_0$  tetszőleges,  $h \in [-\delta, 0]$ . Ekkor

$$\|T(t_0 + h)\| \leq \|T(t_0 - \delta)\| \cdot \|T(\delta + h)\|,$$

és  $\delta + h \in [0, \delta]$ . Itt a

$$\left\{ \|T(\delta + h)\|, \quad h \in [-\delta, 0] \right\}$$

halmaz korlátos, ami ugyanúgy látható, mint  $(i) \Rightarrow (iii)(a)$  (ott is csak a 0-ban való erős folytonosságot használtuk). Tehát a

$$\left\{ \|T(t_0 + h)\|, \quad h \in [-\delta, 0] \right\}$$

halmaz korlátos, így

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \rightarrow 0, \quad h \uparrow 0.$$

□

Az 1.52. Állítás segítségével gyakran bizonyíthatjuk egy adott félcsoporthat erős folytonosságát, mivel sok esetben  $T(t)$  egyenletes korlátossága egy  $[0, \delta]$  intervallumon könnyen igazolható, valamint  $\xi_x$  folytonos, ha  $x$  egy „szép” sűrű részhalmazból való.

Az 1.51. Lemmából következik a félcsoporthat alábbi hasznos tulajdonsága is.

**1.53. Következmény.** *Ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat az  $X$  Banach-téren, akkor tetszőleges  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$  kompakt intervallum esetén a*

$$\{T(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathcal{L}(X)$$

*halmaz egyenletesen (normában) korlátos.*

Ebből az is következik, hogy egy erősen folytonos félcsoporthat exponenciálisan korlátos  $\mathbb{R}_+$ -on.

**1.54. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat. Ekkor léteznek  $w \in \mathbb{R}$  és  $M \geq 1$  konstansok, melyekre*

$$(1.11) \quad \|T(t)\| \leq M \cdot e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $M \geq 1$  definiálva mint

$$M := \sup_{s \in [0,1]} \|T(s)\|.$$

Ez véges az 1.53. Következmény miatt. Legyen  $t \geq 0$  tetszőleges. Írjuk fel  $t$ -t  $t = n + s$  alakban, ahol  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0, 1)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n + s)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|T(n)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|T(1)\|^n \\ &\leq M \cdot e^{n \ln \|T(1)\|} \leq M \cdot e^{n \ln M} \leq M \cdot e^{tw}, \end{aligned}$$

ahol  $w := \ln M$ . □

A fenti tulajdonságú  $w$ -k infimuma fontos szerepet fog játszani a félcsoporthat vizsgálatában.

**1.55. Definíció.** Legyen  $T := (T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat. Definiálja

$$(1.12) \quad \omega_0 = \omega_0(T) := \inf \left\{ w \in \mathbb{R} : \exists M_w \geq 1, \text{ melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot e^{wt}, t \geq 0 \right\} < \infty$$

a  $(T(t))_{t \geq 0}$  növekedési korlátját vagy típusát. A félcsoporthat *korlátosnak* mondjuk, ha  $w = 0$  választható, és *kontraktívnak*, ha  $w = 0$ ,  $M_0 = 1$  választható. A félcsoporthat *izometrikus*, ha  $\|T(t)x\| = \|x\|$  minden  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  esetén.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy

1.  $\omega_0 = -\infty$  előfordulhat;
2. az infimum az (1.12) definícióban nem feltétlenül vétetik fel;
3.  $M > 1$  szükséges lehet.

### 1.56. Példa.

1. Ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  nilpotens (pl. a baleltolás  $L^1[0, 1]$ -en), akkor  $\omega_0 = -\infty$ .
2. Legyen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az 1.8.2. Példa alapján az  $A$  által generált félcsoport,  $T(t) = e^{tA}$

$$T(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú. Könnyen látható, hogy  $\omega_0 = 0$ , azonban  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = \infty$ , tehát a félcsoport nem korlátos.

3. Legyen  $X := L^1(\mathbb{R})$ , és definiáljuk az eltolás-félcsoportot „ugrással” az alábbi módon

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} 2f(s+t), & s \in [-t, 0], \\ f(s+t), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor könnyen látható, hogy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport,  $\|T(t)\| = 2$ , ha  $t > 0$ , hiszen

$$\|T(t)\chi_{[0,t]}\| = 2\|\chi_{[0,t]}\|.$$

Tehát a félcsoport korlátos, de bármilyen nagy  $w$ -hez  $M_w > 1$  választandó.

### 1.5.2. Standard konstrukciók

Az alábbiakban  $(T(t))_{t \geq 0}$  egy erősen folytonos félcsoportot jelöl az  $X$  Banach-téren. A konstruált félcsoportok tulajdonságai könnyen meggondolhatók, az olvasóra bízunk.

**Hasonló félcsoporthok:** Legyen  $Y$  egy Banach-tér,  $V : Y \rightarrow X$  izomorfizmus. Ekkor

$$S(t) := V^{-1}T(t)V, \quad t \geq 0$$

a  $(T(t))_{t \geq 0}$ -hez *hasonló*, erősen folytonos félcsoporth az  $Y$  téren.

**Átskálázott félcsoporthok:** Legyen  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha > 0$ , az  $(S(t))_{t \geq 0}$  *átskálázott félcsoporth*

$$S(t) := e^{\mu t}T(\alpha t), \quad t \geq 0.$$

Ha  $\mu = -\omega_0$  (vagy  $\mu < -\omega_0$ ) és  $\alpha = 1$ , akkor az új félcsoporth növekedési korlátja 0 (vagy kisebb, mint 0).

**Megszorított félcsoporthok:** Ha  $Y \subset X$  zárt altér, melyre  $T(t)Y \subset Y$ ,  $t \geq 0$ , azaz  $Y$   $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariáns, akkor

$$T(t)_| := T(t)|_Y, \quad t \geq 0$$

az *(altérre) megszorított félcsoporth*  $Y$ -on.

**Hányados (kvóciens) félcsoporthok:** Legyen  $Y \subset X$  zárt  $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariáns altér. Tekintsük az  $X_/_Y := X/Y$  hányados (vagy kvóciens) teret a kanonikus  $q : X \rightarrow X_/_Y$  kvóciens-leképezéssel. A hányados-operátorok

$$T(t)_/(q(x)) := q(T(t)x), \quad x \in X, \quad t \geq 0$$

erősen folytonos félcsoporthot alkotnak az  $X_/_Y$  téren, melyet  $(T(t)_/)__{t \geq 0}$  *hányados (kvóciens) félcsoporth*nak nevezünk.

**Adjungált félcsoporthok:** Legyen  $X := H$  Hilbert-tér. Ekkor a félcsoporth operátorainak adjungáltjaiból álló  $(T^*(t))_{t \geq 0}$  is erősen folytonos félcsoporth  $H$ -n.

**Szorzat félcsoporthok:** Legyen  $(S(t))_{t \geq 0}$  egy másik félcsoporth, ami kommutál a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthtal, vagyis

$$T(t)S(t) = S(t)T(t), \quad t \geq 0.$$

Ekkor az

$$U(t) := T(t)S(t), \quad t \geq 0$$

operátorok erősen folytonos félcsoporthat alkotnak, melyet  $(T(t))_{t \geq 0}$  és  $(S(t))_{t \geq 0}$  *szorzat félcsoporthat* nevezünk.

## 1.6. Feladatok

**1.1. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi  $2 \times 2$ -es  $A$  mátrixok esetén  $e^{tA}$ -t!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.2. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.33. Állítást!

**1.3. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.35. Állítást!

**1.4. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.36. Állítást!

**1.5. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.38. Állítást!

**1.6. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.40. Állítást!

**1.7. Feladat.** Bizonyítsuk be az 1.41. Állítást!



## 2. fejezet

# Félcsoportok, generátorok, rezolvensek

Az egyenletesen folytonos félcsoportoknál láttuk, hogy mindig létezik egy  $A \in \mathcal{L}(X)$  operátor, melyre

$$T(t) = e^{tA}, \quad t \geq 0.$$

Erősen folytonos félcsoportok esetén is tudunk definiálni egy  $A$  operátort, amely valamilyen módon a fenti analógja, és amelyet a félcsoport generátorának fogunk nevezni. Ez lineáris, de általában nem korlátos operátor, mely az  $X$  tér egy  $D(A)$  sűrű részhalmazán van definiálva. Hogy a félcsoportot visszkapjuk a generátorából, szükségünk lesz az ún. rezolvensoperátorra, melyet

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

definiál megfelelő  $\lambda \in \mathbb{C}$  komplex számok esetén.

### 2.1. Félcsoport generátora és annak rezolvense

Egyenletesen folytonos félcsoportok esetén láttuk, hogy a  $t \mapsto T(t)$  leképezés differenciálható is, és a  $t = 0$  pontbeli jobb oldali derivált az az  $A \in \mathcal{L}(X)$  operátor, melyre  $T(t) = e^{tA}$ . Erősen folytonos félcsoportok esetén – általában – legfeljebb a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x \in X$$

pályák differenciálhatóságában reménykedhetünk.

**2.1. Példa.** Az 1.45. Állításban láttuk, hogy az eltoláscsoport  $\mathbb{R}$ -en nem egyenletesen folytonos egyik felsorolt téren sem. Így nyilván nem is lehet normában differenciálható.

**2.2. Lemma.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport,  $x \in X$ . Ekkor a  $\xi_x$  pályára az alábbiak ekvivalensek.

(i)  $\xi_x$  differenciálható  $\mathbb{R}_+$ -on;

(ii)  $\xi_x$  jobbról differenciálható  $t = 0$ -ban.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : azonnal adódik.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Legyen  $t > 0$  adva. Ekkor az (FE) egyenlet és a  $T(t)$  operátor korlátossága miatt

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(t+h)x - T(t)x) &= T(t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \\ &= T(t) \frac{d}{dt} \xi_x(0), \end{aligned}$$

tehát  $\xi_x$  jobbról differenciálható  $\mathbb{R}_+$ -on. A balról való differenciálhatósághoz legyen most  $t > 0$  és  $-t \leq h < 0$  rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (T(t+h)x - T(t)x) - T(t) \frac{d}{dt} \xi_x(0) &= T(t+h) \left( \frac{1}{h} (x - T(-h)x) - \frac{d}{dt} \xi_x(0) \right) \\ &\quad + \left( T(t+h) \frac{d}{dt} \xi_x(0) - T(t) \frac{d}{dt} \xi_x(0) \right). \end{aligned}$$

Ha  $h \uparrow 0$ , akkor a jobb oldal első tagja 0-hoz tart, mivel a  $\|T(t+h)\|$  normák korlátosak, és a (ii) tulajdonságot feltettük. A 2. tag pedig a félcsoport erős folytonossága miatt tart 0-hoz. Tehát,  $\xi_x$  balról is differenciálható, és

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \xi_x(t) = T(t) \frac{d}{dt} \xi_x(0), \quad t \geq 0.$$

□

**2.3. Definíció.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren. A  $(T(t))_{t \geq 0}$  generátora az az  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  operátor, melyre

$$(2.2) \quad Ax := \frac{d}{dt} \xi_x(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

minden  $x$ -re a  $D(A)$ -ból, ahol

$$(2.3) \quad D(A) = \{x \in X : \xi_x \text{ differenciálható}\}.$$

Időnként hangsúlyozzuk, mi az  $A$  operátor értelmezési tartománya, és jelöljük:  $(A, D(A))$ .

A 2.2. Lemma alapján

$$(2.4) \quad D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \right\}.$$

**2.4. Lemma.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

(a)  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  lineáris operátor.

(b) Ha  $x \in D(A)$ , akkor  $T(t)x \in D(A)$  (vagyis  $D(A)$   $T(t)$ -invariáns), továbbá

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad t \geq 0.$$

(c) Minden  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  esetén

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A).$$

(d) Minden  $t \geq 0$  esetén

$$(2.6) \quad T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x \, ds, \quad \text{ha } x \in X,$$

$$(2.7) \quad = \int_0^t T(s)Ax \, ds, \quad \text{ha } x \in D(A).$$

*Bizonyítás.*

(a) Mivel  $A$  lineáris operátorok összegének határtéke, ezért nyilván lineáris.

(b) Legyen  $x \in D(A)$  tetszőleges. Ekkor

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(t+h)x - T(t)x) = T(t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.$$

Az (FE) tulajdonság miatt a fenti limesz azonos az alábbival

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)T(t)x - T(t)x),$$

és mivel ez létezik,  $T(t)x \in D(A)$  és  $AT(t)x = T(t)Ax$ .

(c) és

(d) Legyen  $x \in X$ ,  $t \geq 0$  tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left( T(h) \int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds, \end{aligned}$$

ez pedig tart  $T(t)x - x$ -hez, ha  $h \downarrow 0$ , ami így egyenlő  $A \int_0^t T(s)x \, ds$ -sel. Tehát (c) és (2.6) fennáll. Ha  $x \in D(A)$ , akkor az

$$s \mapsto T(s) \frac{T(h)x - x}{h}$$

függvények  $[0, t]$ -n egyenletesen tartanak az  $s \mapsto T(s)Ax$  függvényhez, ha  $h \downarrow 0$ , mivel az 1.53. Következmény szerint a  $T(s)$  operátorok egyenletesen korlátosak  $[0, t]$ -n. Ezért

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h) - \text{Id}) \int_0^t T(s)x \, ds &= \lim_{h \downarrow 0} \int_0^t T(s) \frac{1}{h} (T(h) - \text{Id}) x \, ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax \, ds, \end{aligned}$$

tehát (2.7) teljesül. □

**2.5. Definíció.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy  $A$  *zárt*, ha az alábbi (ekvivalens) feltételek valamelyike teljesül rá:

(i) Ha egy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  sorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y \in X$  léteznek, akkor  $x \in D(A)$  és  $Ax = y$ ;

(ii)  $A$

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

gráf zárt halmaz;

(iii) Az  $X_1^A := (D(A), \|\cdot\|_A)$  tér Banach-tér, ahol

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Ha  $A$  korlátos, akkor természetesen  $A$  zárt is. A fordított irányú állítás nem igaz, ezt mutatja az alábbi példa.

**2.6. Példa.** Legyen  $X := C[0, 1]$ , ellátva a szokásos maximum-normával. Definiálja az  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  operátort

$$Af := f', \quad f \in D(A) = \{f \in C[0, 1] : f' \in C[0, 1]\} = C^1[0, 1].$$

A  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in X$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = g \in X$  feltételek azt jelentik, hogy

$$f_n \hookrightarrow f, \quad f'_n \hookrightarrow g.$$

Analízis órán láttuk, hogy ekkor  $f$  is differenciálható és  $f' = g \in C[0, 1]$ , tehát  $f \in D(A)$  és  $Af = g$ . Így  $(A, D(A))$  zárt.

Másrészt,  $A$  nem korlátos, hiszen tudunk mutatni olyan  $(f_n) \subset D(A)$  sorozatot, melyre  $\|f_n\| = 1$ , de  $\|f'_n\| \rightarrow \infty$ . Ilyen például az  $f_n(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sorozat.

Az előbbi példában még az is igaz, hogy  $D(A)$  sűrű  $X$ -ben. Most igazoljuk, hogy egy félcsoporth generátora is ilyen tulajdonságú.

**2.7. Tétel.** *Egy erősen folytonos félcsoporth generátora zárt és sűrűn definiált lineáris operátor, amely egyértelműen meghatározza a félcsoporthot.*

*Bizonyítás.* Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth az  $X$  Banach-téren. Ahogy láttuk, az  $(A, D(A))$  generátor lineáris operátor. A zártság igazolásához legyen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  sorozat, melyre  $x_n \rightarrow x$ ,  $Ax_n \rightarrow y$ . A (2.7) egyenlőség szerint

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds$$

minden  $t > 0$  esetén. Mivel a  $(T(\cdot)Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$  függvénysorozat egyenletesen tart  $[0, t]$ -n  $T(\cdot)y$ -hoz, ezért

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt  $1/t$ -vel, és tartsunk  $t$ -vel jobbról 0-hoz. Ebből

$$Ax = T(0)y = y,$$

így  $A$  zárttsága következik.

Legyen  $x \in X$  tetszőleges. A 2.4. Lemma (c) pontja alapján  $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$  minden  $t$ -re. A félcsoport erős folytonossága miatt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds = x$$

teljesül, így  $D(A)$  sűrű  $X$ -ben.

Végül, legyen  $(S(t))_{t \geq 0}$  egy másik erősen folytonos félcsoport  $X$ -en, melynek ugyanúgy  $(A, D(A))$  a generátora. Tetszőleges  $x \in D(A)$ ,  $t > 0$  esetén tekintsük a

$$s \mapsto \eta_x(s) := T(t-s)S(s)x, \quad 0 \leq s \leq t$$

leképezést. Ennek differenciáhányadosa

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\eta_x(s+h) - \eta_x(s)) &= T(t-s-h) \frac{1}{h} (S(s+h)x - S(s)x) \\ &\quad - \frac{1}{-h} (T(t-s-h) - T(t-s)) S(s)x \end{aligned}$$

Legyen most  $h \downarrow 0$ . Ekkor a 2. tag limesze  $AT(t-s)S(s)x$ . Megmutatjuk, hogy az 1. tag limesze  $T(t-s)AS(s)x$ . Ezt igazolandó legyen  $h \in (0, 1]$ , ekkor

$$\begin{aligned} &\|T(t-s-h)^{1/h} (S(s+h)x - S(s)x) - T(t-s)AS(s)x\| \\ &\leq \|T(t-s-h)^{1/h} (S(s+h)x - S(s)x) - AS(s)x\| \\ &\quad + \|(T(t-s-h) - T(t-s)) AS(s)x\|. \end{aligned}$$

Az 1.53. Következmény szerint létezik olyan  $M > 0$  szám, hogy  $\|T(t-s-h)\| \leq M$ , ha  $h \in (0, 1]$ . Ezért

$$\begin{aligned} &\|T(t-s-h)^{1/h} (S(s+h)x - S(s)x) - T(t-s)AS(s)x\| \\ &\leq M \|^{1/h} (S(s+h)x - S(s)x) - AS(s)x\| + \|(T(t-s-h) - T(t-s)) AS(s)x\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha  $h \downarrow 0$ . A (2.5) egyenlőség miatt tehát

$$\frac{d}{ds} \eta_x(s) = 0, \quad s \in [0, t],$$

így

$$T(t)x = \eta_x(0) = \eta_x(t) = S(t)x,$$

ha  $x \in D(A)$ . Mivel  $D(A)$  sűrű és  $t > 0$  tetszőleges volt, ezért  $T(t) = S(t)$ ,  $t \geq 0$ .

□

**2.8. Tétel** (Zárt gráf). *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

- (i)  $(A, D(A))$  korlátos operátor, azaz létezik  $M \geq 0$ , melyre  $\|Ax\| \leq M\|x\|$ ,  $x \in D(A)$ ;
- (ii)  $D(A)$  zárt  $X$ -ben.

*Bizonyítás.*  $(i) \Rightarrow (ii)$  : Legyen  $(x_n) \subset D(A)$ ,  $x_n \rightarrow x$  sorozat. Ekkor  $(x_n)$  Cauchy-sorozat  $D(A)$ -ban, és (i) miatt

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Tehát  $(Ax_n)$  is Cauchy-sorozat, így konvergens is. Legyen  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ . Mivel  $A$  zárt, az eddigiekből következik, hogy  $x \in D(A)$  (és  $y = Ax$ ). Tehát  $D(A)$  zárt.

$(ii) \Rightarrow (i)$  : mély, nem bizonyítjuk. □

Mivel egy  $(A, D(A))$  generátor mindig sűrűn definiált, ezért a 2.8. Zártgráf-tétel (ii) feltétele esetünkben azt jelenti, hogy  $D(A) = X$ . Ennek segítségével látható be az alábbi következmény.

**2.9. Következmény.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

- (i) Az  $A$  generátor korlátos, azaz létezik  $M > 0$ , melyre  $\|Ax\| \leq M\|x\|$ ,  $x \in D(A)$ ;
- (ii)  $D(A) = X$ ;
- (iii)  $D(A)$  zárt  $X$ -ben;
- (iv)  $A$   $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporth egyenletesen folytonos.

*Ha a fentiek közül bármelyik teljesül, akkor*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Az  $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$  ekvivalenciák a 2.7. és a 2.8. Tételekből adódnak. Az  $(i) \Leftrightarrow (iv)$ , valamint a félcsoporth előállítás pedig következik abból, hogy az 1.27. Tétel alapján egy egyenletesen folytonos félcsoporth  $T(t) = e^{tB}$  alakú valamely  $B \in \mathcal{L}(X)$  operátorra. A generátor definíciójából adódik, hogy ebben az esetben  $A = B$ . □

**2.10. Definíció.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  lineáris operátor. A  $D \subset D(A)$  altér  $A$  *lényeges része* (angolul: core), ha sűrű  $D(A)$ -ban a  $\|\cdot\|_A$  normára nézve.

**2.11. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Legyen  $D \subset D(A)$   $\|\cdot\|$ -sűrű  $X$ -ben és  $T(t)$ -invariáns. Ekkor  $D$  az  $A$  lényeges része.

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk, a fenti technikákkal kijön. □

**2.12. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Ekkor

$$D(A^\infty) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(A^n)$$

az  $A$  lényeges része (itt  $D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$ ).

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk, az előző állítással igazolható. □

Az alábbiakban bevezetjük a generátor rezolvensének fogalmát. Ehhez szükségünk lesz némi spektrálméletre.

**2.13. Definíció.** Legyen  $(A, D(A))$  zárt operátor. Ekkor  $A$  *rezolvenshalmaza*

$$(2.8) \quad \rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektív}\}.$$

Legyen  $A$  *spektruma*

$$(2.9) \quad \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem bijektív}\}.$$

Az  $A$  *rezolvens* a  $\lambda \in \rho(A)$  pontban

$$(2.10) \quad R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}.$$

**2.14. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  zárt operátor. Ekkor

(a)  $\rho(A)$  *nyílt halmaz*  $\mathbb{C}$ -ben. Következésképpen,  $\sigma(A)$  *zárt*.

(b)  $R(\lambda, A)$  *korlátos operátor minden*  $\lambda \in \rho(A)$  *esetén*.

*Bizonyítás.*

(a) Később, ld. a 2.19. Következmény bizonyítását.



- (b) A feltételből következik, hogy  $\lambda - A$  is zárt, továbbá zárt operátor inverze is zárt. Mivel  $\lambda \in \rho(A)$  esetén  $\lambda - A$  szürjektív is, így  $R(\lambda, A)$  az egész  $X$ -en van értelmezve, és a 2.8. Tétel miatt korlátos is.  $\square$

Most igazolunk két, a (2.6) és a (2.7) egyenletekhez hasonló egyenlőséget, amelyek sok fontos későbbi állításunk bizonyításának alapját fogják képezni.

**2.15. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Legyen  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $t > 0$  tetszőleges. Ekkor*

$$(2.11) \quad e^{-\lambda t} T(t)x - x = (A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds, \quad \text{ha } x \in X,$$

$$(2.12) \quad = \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(A - \lambda)x \, ds, \quad \text{ha } x \in D(A).$$

*Bizonyítás.* Legyen

$$S(t) := e^{-\lambda t} T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoporth. Könnyen látható, hogy a generátora  $B = A - \lambda$ ,  $D(B) = D(A)$ . Alkalmazzuk a 2.4. Lemma (d) pontját az  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthra.  $\square$

2.16. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha az  $(A, D(A))$  operátor zárt,  $B \in \mathcal{L}(X)$  korlátos, akkor  $(A+B, D(A))$  is zárt. Ha azonban csak annyit teszünk fel, hogy  $(B, D(B))$  zárt, akkor  $(A+B, D(A) \cap D(B))$  nem feltétlenül zárt. Keressünk ilyen példát!

**2.17. Tétel.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth az  $X$  Banach-téren, és legyenek  $w \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$  olyan konstansok, melyekre*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0,$$

*ld. az 1.54. Állítást. Ekkor a félcsoporth  $(A, D(A))$  generátorára az alábbiak teljesülnek.*

(a) *Ha  $\lambda \in \mathbb{C}$  olyan, hogy  $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds$  létezik minden  $x \in X$  esetén, akkor  $\lambda \in \rho(A)$  és  $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ .*

(b) *Ha  $\operatorname{Re} \lambda > w$ , akkor  $\lambda \in \rho(A)$  és a rezolvens az (a) pont alatti integrál alakú.*

(c) *Minden  $\operatorname{Re} \lambda > w$  esetén teljesül az alábbi becslés:*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - w}.$$

2.18. *Megjegyzés.* A fenti 2.17. Tétel (a) pontjában szereplő integrálalak természetesen mint improprius Riemann-integrál értendő, vagyis a feltételek teljesülése esetén

$$R(\lambda, A)x = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds, \quad x \in X.$$

A továbbiakban ezt röviden így fogjuk jelölni:

$$(2.13) \quad R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) \, ds,$$

és a rezolvens *integrál-reprezentációjának* hívjuk (ami nem más, mint a félcsoport Laplace-transzformáltja).

*Bizonyítás.* (2.17. Tétel)

(a) Átskálázás után feltehetjük, hogy  $\lambda = 0$ . Legyen  $x \in X$  tetszőleges. Ekkor bármely  $h > 0$  esetén

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - \text{Id}}{h} R(0)x &= \frac{T(h) - \text{Id}}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s+h)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds. \end{aligned}$$

Ha  $h \downarrow 0$ , akkor a kapott kifejezés  $-x$ -hez tart. Így  $\text{ran } R(0) \subset D(A)$  és  $AR(0) = -\text{Id}$ . Másrészt, ha  $x \in D(A)$ , akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)x \, ds = R(0)x,$$

és a 2.4. Lemma (d) pontja alapján

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A \int_0^t T(s)x \, ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax \, ds = R(0)Ax.$$

Mivel  $A$  zárt és  $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$  minden  $t$ -re, az előbbiek alapján  $AR(0)x = R(0)Ax = -x$ . Tehát  $R(0) = (-A)^{-1}$  következik.

(b) és

(c) Következik (a)-ból és az alábbi becslésből

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \right\| \leq \left( M \int_0^t e^{(w - \operatorname{Re} \lambda) s} \, ds \right) \cdot \|x\|.$$

Ha  $\operatorname{Re} \lambda > w$ , akkor a jobb oldal első tényezője tart  $M/(\operatorname{Re} \lambda - w)$ -hez,  $t \rightarrow \infty$  esetén.

□

**2.19. Következmény.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren, és  $w \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$  olyan konstansok, melyekre

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Legyen  $\lambda \in \mathbb{C}$ , melyre  $\operatorname{Re} \lambda > w$  és legyen  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor a félcsoport generátorának rezolvensére

$$(2.14) \quad R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A) x$$

$$(2.15) \quad = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s) x \, ds$$

minden  $x \in X$  esetén. Továbbá

$$(2.16) \quad \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $\mu \in \mathbb{C}$  olyan szám, melyre  $|\lambda - \mu| < 1/\|R(\lambda, A)\|$ . Megmutatjuk, hogy  $\mu \in \rho(A)$  és

$$(2.17) \quad R(\mu, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R(\lambda, A)^{n+1},$$

amiből a (2.14) állítás következik. Írjuk fel

$$\mu - A = \lambda - A + \mu - \lambda = [\operatorname{Id} - (\lambda - \mu)R(\lambda, A)] (\lambda - A).$$

Mivel  $\lambda \in \rho(A)$ , ezért ez az operátor pontosan akkor bijektív, ha  $\operatorname{Id} - (\lambda - \mu)R(\lambda, A)$  invertálható. Ez teljesül, ha  $|\lambda - \mu| < 1/\|R(\lambda, A)\|$ . Ebből

$$R(\mu, A) = R(\lambda, A) [\operatorname{Id} - (\lambda - \mu)R(\lambda, A)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R(\lambda, A)^{n+1}.$$

A 2.17. Tétel (a) pontját felhasználva  $\operatorname{Re} \lambda > w$  esetén minden  $x \in X$ -re

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \\ &= - \int_0^\infty s e^{-\lambda s} T(s)x \, ds.\end{aligned}$$

Indukcióval kapjuk a (2.15) egyenlőséget.

Végül a (2.16) becslést a következőképpen kaphatjuk:

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \right\| \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{(w-\operatorname{Re} \lambda)s} \, ds \cdot \|x\| \\ &= \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n} \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

□

2.20. *Megjegyzés.* A fenti 2.19. Következmény bizonyításának első részében azt is belátuk, hogy egy zárt operátor rezolvenshalmaza nyílt, vagyis igazoltuk a 2.14. Állítás (a) pontját.

A 2.17. Tétel (b) pontjából következik, hogy egy félcsoporth generátorának spektruma mindig egy félsíkban fekszik. Az alábbi alakban definiált szám a legkisebb ilyen félsíkot karakterizálja.

**2.21. Definíció.** Tetszőleges  $A$  lineáris operátor esetén legyen  $A$  *spektrálkorlátja*

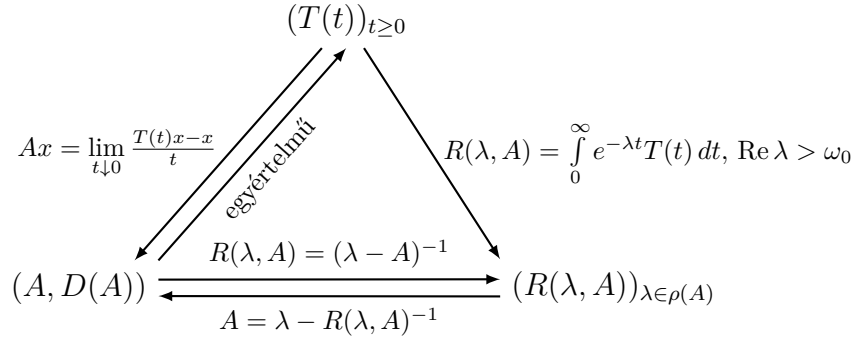
$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

A 2.17. Tétel (b) pontjából azonnal adódik a félcsoporth növekedési korlátja (1.12) és generátorának spektrálkorlátja közti reláció.

**2.22. Következmény.** Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Ekkor

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < +\infty.$$

Az alfejezet összefoglalásaképpen álljon itt a következő diagram.



2.1. ábra. Félcsoport, generátor, rezolvens

## 2.2. Példák „újratöltve”

### 2.2.1. Standard konstrukciók

Az 1.5.2. alpont példái esetében karakterizáljuk a félcsoportok generátorát és annak rezolvensét, a bizonyításokat az olvasóra bízva. Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren, melynek generátora  $(A, D(A))$ .

**Hasonló félcsoportok:** Legyen  $Y$  egy Banach-tér,  $V : Y \rightarrow X$  izomorfizmus. Ekkor az  $S(t) := V^{-1}T(t)V$ ,  $t \geq 0$  hasonló félcsoport generátora

$$B := V^{-1}AV, \quad D(B) = \{y \in Y : Vy \in D(A)\}.$$

Könnyen látható, hogy  $\sigma(A) = \sigma(B)$ , továbbá

$$R(\lambda, B) = V^{-1}R(\lambda, A)V, \quad \lambda \in \rho(A).$$

**Átskálázott félcsoportok:** Legyen  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha > 0$ , az  $S(t) := e^{\mu t}T(\alpha t)$ ,  $t \geq 0$  átskálázott félcsoport generátora

$$B = \alpha A + \mu \text{Id}, \quad D(B) = D(A).$$

Könnyen látható, hogy  $\sigma(B) = \alpha\sigma(A) + \mu$ , továbbá

$$R(\lambda, B) = \frac{1}{\alpha} R\left(\frac{\lambda - \mu}{\alpha}, A\right), \quad \lambda \in \rho(B).$$

Ezek alapján könnyen válthatunk az eredeti és az átskálázott félcsoporthoz között.

**Megszorított félcsoporthoz:** Legyen  $Y \subset X$  zárt altér, mely  $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariáns, és  $T(t)|_Y := T(t)|_Y$ ,  $t \geq 0$  az altérre megszorított félcsoporthoz  $Y$ -on. Ekkor  $(T(t)|_Y)_{t \geq 0}$  generátora  $Y$ -on az az  $(A|_Y, D(A|_Y))$  operátor, amelyre

$$A|_Y y = Ay, \quad D(A|_Y) = D(A) \cap Y.$$

**Hányados (kvóciens) félcsoporthoz:** Legyen  $Y \subset X$  zárt  $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariáns altér. Tekintsük az  $X/_Y := X/Y$  hányados (vagy kvóciens) teret a kanonikus  $q : X \rightarrow X/_Y$  kvóciens-leképezéssel. A  $(T(t)/_Y)_{t \geq 0}$  hányados félcsoporthoz generátora

$$A/_Y(q(x)) = q(A(x)), \quad D(A/_Y) = q(D(A)).$$

**Adjungált félcsoporthoz:** Legyen  $X := H$  Hilbert-tér. Ekkor a félcsoporthoz operátorainak adjungáltjaiból álló  $(T^*(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz generátora  $H$ -n az  $(A, D(A))$  sűrűn definiált operátor adjungáltja, vagyis

$$D(A^*) = \{x \in H : \exists y \in H, \langle h, y \rangle = \langle Ah, x \rangle \text{ minden } h \in D(A)\}, \quad A^*x := y.$$

**Szorzat félcsoporthoz:** Legyen  $(S(t))_{t \geq 0}$  egy másik félcsoporthoz, ami kommutál a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz, és legyen  $U(t) := T(t)S(t)$ ,  $t \geq 0$  a szorzatfélcsoporthoz. Jelölje  $(S(t))_{t \geq 0}$  generátorát  $(B, D(B))$ . Ekkor a 2.11. Állítás segítségével belátható, hogy az  $(U(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz  $(C, D(C))$  generátorának  $D(A) \cap D(B)$  lényeges része, és ezen a halmazon teljesül, hogy

$$Cx = Ax + Bx, \quad x \in D(A) \cap D(B).$$

## 2.2.2. Standard példák

### Szorzásfélcsoporthoz

Az 1.35. ill. az 1.40. Állításokban láttuk, hogy a  $C_0(\Omega)$  ill. az  $L^p(\Omega)$  tereken az  $e^{tq}$ ,  $t \geq 0$  függvényekkel definiált szorzásoperátorok – ahol  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos ill. mérhető, a valós része (lényegesen) korlátos – erősen folytonos operátorfélcsoporthoz alkotnak.

**2.23. Lemma.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos szorzásfélcsoporthoz az  $X = C_0(\Omega)$  vagy  $X = L^p(\Omega)$  téren, melyre

$$T_q(t)f := e^{tq} \cdot f, \quad f \in X, \quad t \geq 0.$$

Ekkor a félcsoporthoz  $(A, D(A))$  generátora az alábbi szorzásoperátor:

$$\begin{aligned} Af &= M_q f := q \cdot f, \\ D(A) &= D(M_q) := \{f \in X : qf \in X\}. \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Nem részletezzük, adódik abból, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{tq(s)} f(s) - f(s)}{t} = q(s)f(s)$$

az adott Banach-tér normájában is teljesül. □

Ez a lemma, összevetve az 1.35. és az 1.36., ill. az 1.40. és az 1.41. Állításokkal, karakterizálja az erősen folytonos szorzásfélcsoporthoz generátorait. A következő állítás ezt mondja ki, felhasználva, hogy a szorzásoperátor spektruma a  $q$  függvény (lényeges) képhalmazának a lezártja, ld. az 1.33. ill. az 1.38. Állítást.

**2.24. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  egy operátor a  $C_0(\Omega)$  vagy  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  téren. Ekkor ekvivalensek:

- (i)  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos szorzásfélcsoporthoz generátora;
- (ii)  $(A, D(A))$  szorzásoperátor, melyre

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\} \subset \rho(A) \text{ valamely } w \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

## Eltolás-félcsoporthoz

Ahogy láttuk az 1.4.3. alpontban, a (bal)eltolás-operátorok

$$(T_\ell(t)f)(s) := f(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

erősen folytonos (fél)csoporthoz alkotnak  $C_{\text{ub}}(\mathbb{R})$ -en, ill.  $L^p(\mathbb{R})$ -en,  $1 \leq p < \infty$ .

**2.25. Állítás.** A  $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$  (bal)eltolás-félcsoport generátora az  $X$  Banach-téren

$$Af := f',$$

melyre

1. legyen

$$D(A) = \{f \in C_{\text{ub}}(\mathbb{R}) : f \text{ differenciálható, } f' \in C_{\text{ub}}(\mathbb{R})\},$$

ha  $X = C_{\text{ub}}(\mathbb{R})$ , és

2. legyen

$$D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ abszolút folytonos, } f' \in L^p(\mathbb{R})\},$$

ha  $X = L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

*Bizonyítás.* Nem részletezzük, adódik abból, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} = f'(s),$$

és ez az adott Banach-tér normájában is érvényes. □

**2.26. Állítás.** A fenti  $(A, D(A))$  derivációsoperátor rezolvensére (bármelyik  $X$  téren)  $\text{Re } \lambda > 0$  esetén

$$(2.18) \quad (R(\lambda, A)f)(s) = \int_s^\infty e^{-\lambda(\tau-s)} f(\tau) d\tau, \quad f \in X, s \in \mathbb{R}.$$

### Diffúzió-félcsoport (1 dimenzióban)

**2.27. Állítás.** Legyen  $X = C[0, 1]$ , és definiáljuk az alábbi differenciáloperátort  $X$ -en Neumann-peremfeltétellel:

$$Af := f''$$

$$D(A) = \{f \in C^2[0, 1] : f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

Ekkor  $(A, D(A))$  generátora az alább definiált  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoportnak:

$$T(0) = \text{Id};$$

$$(T(t)f)(s) = \int_0^1 k_t(s, r) f(r) dr, \text{ ahol}$$

$$k_t(s, r) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s) \cos(\pi n r),$$

$t > 0$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $f \in X$ .



*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy  $A$  zárt, sűrűn definiált. A félcsoporthalakja „némi” számolással adódik abból, hogy a

$$e_n(s) := \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \sqrt{2} \cos(\pi n s), & n \geq 1 \end{cases}$$

függvények  $D(A)$ -ban vannak minden  $n$ -re, továbbá,

$$Ae_n = -\pi^2 n^2 e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A bizonyítást itt nem részletezzük. □

### Diffúzió-félcsoporthalak ( $n$ dimenzióban)

**2.28. Állítás.** Legyen  $X = L^p(\mathbb{R}^n)$  és legyen  $(A, D(A))$  a Laplace-operátor lezártja  $X$ -en, melyre

$$Af = \Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial s_k^2} f(s_1, \dots, s_n), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

ahol  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  az ún. Schwartz-tér, a végtelenszer differenciálható, gyorsan lecsengő függvények tere. Ekkor  $(A, D(A))$  generátora az alábbi diffúziós, hővezetési vagy Gauss-félcsoporthalakra

$$\begin{aligned} T(0) &= \text{Id}; \\ (T(t)f)(s) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|s-r|^2}{4t}} f(r) dr, \\ t &> 0, s \in \mathbb{R}^n, f \in X. \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

## 2.3. Hille–Yosida-tételkör

Ebben az alfejezetben azzal foglalkozunk, hogy hogyan karakterizálhatók az erősen folytonos félcsoporthalak generátorai.

### 2.3.1. Csoportok és félcsoportok generálása

**2.29. Lemma.** *Legyen  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált operátor az  $X$  Banach-téren. Tegyük fel, hogy létezik  $w \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , melyekre  $[w, \infty) \subset \rho(A)$  és  $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$  minden  $\lambda \geq w$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek  $\lambda \rightarrow \infty$  esetén.*

(a)  $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$  minden  $x \in X$ -re.

(b)  $\lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax \rightarrow Ax$  minden  $x \in D(A)$ -ra.

*Bizonyítás.* Legyen  $y \in D(A)$ . Ekkor

$$(2.19) \quad \lambda R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)(\lambda - A)y + R(\lambda, A)Ay = y + R(\lambda, A)Ay.$$

A feltételekből adódik, hogy

$$\|R(\lambda, A)Ay\| \leq \frac{M}{\lambda} \|Ay\|,$$

ezért a (2.19) kifejezés  $y$ -hoz tart, ha  $\lambda \rightarrow \infty$ . Mivel a  $\lambda R(\lambda, A)$  operátorok a feltétel szerint egyenletesen korlátosak  $[w, \infty)$ -n, és ahogy láttuk, pontonként konvergensek a sűrű  $D(A)$  részhalmazon, ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt (a) adódik. A (b) állítás pedig mindebből következik.  $\square$

**2.30. Tétel** (Hille–Yosida, 1948, kontrakció eset). *Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren, ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos kontrakció-félcsoportot generál;

(ii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda > 0$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.20) \quad \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1;$$

(iii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.21) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

*Bizonyítás.* A 2.7. és a 2.17. Tételek miatt elég a (ii)  $\Rightarrow$  (i) irányt bizonyítani. Defináljuk az ún. *Yosida-approximációt* mint

$$(2.22) \quad A_n := nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - n \operatorname{Id}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A fenti operátorok korlátosak és kommutálnak egymással. Tekintsük az általuk generált egyenletesen folytonos félcsoportokat

$$(2.23) \quad T_n(t) := e^{tA_n}, \quad t \geq 0.$$

A 2.29. Lemma (b) pontja alapján  $A_n \rightarrow A$  pontonként  $D(A)$ -n. Ebből az alábbiakat igazoljuk.

(a) Létezik a  $T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x$  limesz minden  $x \in X$  esetén.

(b)  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos kontrakció-félcsoport.

(c)  $(T(t))_{t \geq 0}$  generátora  $(A, D(A))$ .

(a) Minden  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoport, hiszen

$$\|T_n(t)\| \leq e^{-nt} e^{\|n^2 R(n,A)\|t} \leq e^{-nt} e^{nt} = 1, \quad t \geq 0.$$

Ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt elég a konvergenciát  $D(A)$ -n igazolni. Felhasználva, hogy a  $T_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  operátorok felcserélhetők, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_n(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds} (T_m(t-s)T_n(s)x) \, ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)(A_n x - A_m x) \, ds. \end{aligned}$$

Ebből

$$(2.24) \quad \|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t \|A_n x - A_m x\|.$$

A 2.29. Lemma (b) pontja alapján  $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-sorozat minden  $x \in D(A)$  esetén. Ezért,  $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$  egyenletesen konvergens minden kompakt  $[0, t_0]$  intervallumon.

(b) A  $(T_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  operátorsorozatok pontonkénti konvergenciájából következik, hogy a limesz operátorcsalád  $(T(t))_{t \geq 0}$  kielégíti az (FE) függvényegyenletet, tehát félcsoport, továbbá kontrakciókból áll. Másrészt, minden  $x \in D(A)$  esetén a

$$\xi : t \mapsto T(t)x, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

pálya egyenletes limesze folytonos függvényeknek, ld. (2.24), tehát folytonos. Így az 1.52. Állítás alapján  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos.

(c) Jelölje  $(B, D(B))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  generátorát, és legyen  $x \in D(A)$ . A

$$\xi_n : t \mapsto T_n(t)x$$

leképezések minden  $[0, t_0]$  kompakt intervallumon egyenletesen tartanak  $\xi$ -hez, ld. (2.24). Másrészt, a

$$\frac{d}{dt}\xi_n : t \mapsto T_n(t)A_nx$$

deriváltfüggvények ugyanezért egyenletesen tartanak az

$$\eta : t \mapsto T(t)Ax$$

függvényhez. Ebből következik, hogy  $\xi$  differenciálható, és  $\frac{d}{dt}\xi(0) = \eta(0)$ , vagyis  $D(A) \subset D(B)$  és  $Ax = Bx$ ,  $x \in D(A)$ .

Legyen  $\lambda > 0$  tetszőleges. Mivel  $\lambda \in \rho(A)$ , ezért  $\lambda - A : D(A) \rightarrow X$  bijekció. Másrészt,  $(B, D(B))$  egy kontrakció-félcsoportot generál, tehát  $\lambda \in \rho(B)$  a 2.17. Tétel miatt, így  $\lambda - B : D(B) \rightarrow X$  is bijekció. Láttuk, hogy  $\lambda - A$  megegyezik  $\lambda - B$ -vel  $D(A)$ -n. Ezért ez csak úgy lehet, ha  $D(A) = D(B)$  és  $A = B$ .  $\square$

Legyen a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátora  $(A, D(A))$ , és legyen valamely  $w \in \mathbb{R}$  esetén

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Ekkor az

$$S(t) := e^{-wt}T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoport kontrakciókból áll, és generátora  $B = A - w$  (ld. a 2.2.1. alpontot). Az ilyen tulajdonságú félcsoportokra a Hille–Yosida-tétel az alábbi formát ölti.

**2.31. Következmény.** *Legyen  $w \in \mathbb{R}$ . Egy  $(A, D(A))$  lineáris operátorra az  $X$  Banach-téren az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál, melyre

$$(2.25) \quad \|T(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq 0;$$

(ii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.26) \quad \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 1;$$

(iii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.27) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - w}.$$

A (2.25) egyenlőtlenséget kielégítő félcsoportokat szokás *kvázikontrakció-félcsoport*nak hívni.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy  $(A, D(A))$  pontosan akkor generál egy erősen folytonos csoportot, ha  $A$  és  $-A$  is egy-egy félcsoport generátora. Ennek fényében a Hille–Yosida-tétel feltételeit könnyen átfogalmazhatjuk kontrakciócsoportok, azaz izometriacsoportok generátoraira.

**2.32. Következmény.** *Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren, ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos izometriacsoportot generál;

(ii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.28) \quad \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1;$$

(iii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.29) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re} \lambda|}.$$

Ezek után megfogalmazzuk a tetszőleges erősen folytonos félcsoport generátorának karakterizációjáról szóló tételt. Ebben a rezolvens *minden* hatványára vonatkozó becslést kell feltennünk.

**2.33. Tétel** (Feller, Miyadera, Phillips, 1952). *Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren,  $w \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$ . Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál, melyre

$$(2.30) \quad \|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0;$$

(ii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.31) \quad \|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N};$$

(iii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$(2.32) \quad \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Bizonyítás.* Az  $(i) \Rightarrow (iii)$  irány a 2.19. Következmény alapján adódik, a  $(iii) \Rightarrow (ii)$  pedig triviális. Így csak a  $(ii) \Rightarrow (i)$  irányt kell igazolnunk. A 2.2.1. alpontban látott átskálázási technikát felhasználva feltehetjük, hogy  $w = 0$ , vagyis

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tetszőleges  $\mu > 0$  esetén definiáljunk  $X$ -en egy új normát mint

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|.$$

Ezen normákra az alábbiak teljesülnek:

- (a)  $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$ , vagyis ekvivalensek  $\|\cdot\|$ -vel;
- (b)  $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1$ ;
- (c)  $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ , ha  $0 < \lambda \leq \mu$ ;
- (d)  $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ , ha  $0 < \lambda \leq \mu$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (e)  $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ ,  $0 < \lambda \leq \mu$ .

Csak a (c) pontot bizonyítjuk. Legyen  $y = R(\lambda, A)x$ . Ekkor az ún. rezolvensegyenlőség miatt (ld. (4.3))

$$y = R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y).$$

Ebből (b) alapján adódik, hogy

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|y\|_\mu,$$

tehát

$$\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu.$$

Ezen tulajdonságokat felhasználva definiálhatunk egy újabb normát mint

$$(2.33) \quad \|x\| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_{\mu},$$

melyre teljesülnek az alábbiak:

$$(f) \quad \|x\| \leq \|x\| \leq M\|x\|;$$

$$(g) \quad \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1 \text{ minden } \lambda > 0\text{-ra.}$$

Tehát az  $(A, D(A))$  operátor teljesíti a (2.20) feltételt az eredetivel ekvivalens  $\|\cdot\|$  normára, így a 2.30. Hille–Yosida-tétel miatt egy  $\|\cdot\|$ -kontraktív  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoportot generál  $X$ -en. Felhasználva (f)-et,  $\|T(t)\| \leq M$  teljesül.  $\square$

Végül nézzük meg, mit mondhatunk az erősen folytonos csoportok generálásáról.

**2.34. Definíció.** A  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  erősen folytonos csoport generátora az az  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  operátor, melyre

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h},$$

minden  $x \in D(A)$  esetén, ahol

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ létezik} \right\}.$$

Ha adva van egy  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  erősen folytonos csoport, melynek generátora  $(A, D(A))$ , akkor definiálhatjuk a  $T_+(t) := T(t)$ ,  $t \geq 0$  és a  $T_-(t) := T(-t)$ ,  $t \geq 0$  operátorcsaládokat, melyekről könnyen látható, hogy erősen folytonos félcsoportokat alkotnak. A definícióból adódik, hogy  $(T_+(t))_{t \geq 0}$  generátora  $(A, D(A))$ ,  $(T_-(t))_{t \geq 0}$  generátora pedig  $(-A, D(A))$ . Tehát, ha  $A$  egy csoport generátora, akkor  $A$  és  $-A$  is generátor. A következő állítás azt mondja ki, hogy ennek a megfordítása is igaz.

**2.35. Tétel** (Csoportok generálása). *Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren,  $w \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$ . Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  erősen folytonos csoportot generál, melyre

$$\|T(t)\| \leq Me^{w|t|}, \quad t \in \mathbb{R};$$

(ii)  $(A, D(A))$  és  $(-A, D(A))$  az erősen folytonos  $(T_+(t))_{t \geq 0}$  ill.  $(T_-(t))_{t \geq 0}$  félcsoporth generátora, melyekre

$$\|T_+(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \|T_-(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0;$$

(iii)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$\|[(|\lambda| - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N};$$

(iv)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált, minden  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Re} \lambda| > w$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$  és

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(|\operatorname{Re} \lambda| - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Bizonyítás.* Nem részletezzük, következik a 2.30. Hille–Yosida és a 2.33. Feller–Miyadera–Phillips-tételekből.  $\square$

**2.36. Állítás.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth az  $X$  Banach-téren. Ha létezik olyan  $t_0 > 0$ , melyre  $T(t_0)$  invertálható, akkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  beágyazható egy  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  erősen folytonos csoportba  $X$ -en.

*Bizonyítás.* Először megmutatjuk, hogy a feltételből következik, hogy a  $T(t)$  operátorok minden  $t \geq 0$  esetén invertálhatók. Ha  $t \in [0, t_0]$ , akkor

$$T(t_0) = T(t_0 - t)T(t) = T(t)T(t_0 - t).$$

Mivel  $T(t_0)$  bijektív, ezért  $T(t)$  is az kell legyen. Ha  $t > t_0$ , akkor írjuk fel  $t$ -t  $t = nt_0 + s$  alakban, ahol  $s \in [0, t_0]$ . Ekkor

$$T(t) = T(nt_0 + s) = T(t_0)^n T(s),$$

tehát  $T(t)$  invertálható operátorok szorzata, így invertálható. Ezután terjesszük ki a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthot  $\mathbb{R}$ -re a

$$T(t) := T(-t)^{-1}, \quad t \leq 0$$

definícióval. Így egy  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  csoportot kapunk, amely erősen folytonos, hiszen a pozitív  $t$ -kre az.  $\square$



### 2.3.2. Disszipatív operátorok és kontrakciófélcsoportok

Ha egy  $(A, D(A))$  lineáris operátorról el akarjuk dönteni, hogy egy (kontrakciófélcsoport) generátora-e, a 2.30 Hille–Yosida- (ill. a 2.33 Feller–Miyadera–Phillips-) tétel feltételeinek ellenőrzéséhez szükségünk van a rezolvens ismeretére. Ebben a fejezetben lineáris operátorok egy olyan típusával ismerkedünk meg, melyek esetében a rezolvens ismerete nélkül igazolható a generátor-tulajdonság.

**2.37. Definíció.** Az  $(A, D(A))$  lineáris operátort az  $X$  Banach-téren *disszipatívnak* mondunk, ha

$$(2.34) \quad \|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

minden  $\lambda > 0$ ,  $x \in D(A)$  esetén.

A 2.40. Állításban a disszipatív operátorok fontos tulajdonságait igazoljuk. Ehhez szükségünk lesz az operátor lezártjának fogalmára.

**2.38. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $(B, D(B))$  operátor az  $(A, D(A))$  operátor *kiterjesztése*, jelölésben  $A \subset B$ , ha  $D(A) \subset D(B)$  és  $Bx = Ax$  minden  $x \in D(A)$  esetén. Az  $A$  legszűkebb zárt kiterjesztését – ha ilyen létezik – az  $A$  operátor *lezártjának* nevezzük, és  $\overline{A}$ -al jelöljük. Ha egy operátornak létezik lezártja, akkor *lezárható*nak mondjuk.

A következő állítás könnyen meggondolható a definíciókból.

**2.39. Állítás.** Az  $(A, D(A))$  operátor pontosan akkor lezárható, ha minden  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ ,  $x_n \rightarrow 0$  sorozat esetén, amelyre  $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergens,  $\lim Ax_n = 0$  teljesül. Ekkor

$$\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)},$$

ahol  $\mathcal{G}$  az adott operátor gráfját jelöli.

**2.40. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  disszipatív operátor. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(a)  $\lambda - A$  injektív minden  $\lambda > 0$  esetén, és

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda} \|z\|,$$

ha  $z \in \text{ran}(\lambda - A) := (\lambda - A)D(A)$ .

- (b)  $\lambda - A$  pontosan akkor szürjektív valamely  $\lambda > 0$  esetén, ha minden  $\lambda > 0$  esetén szürjektív. Ilyenkor  $(0, \infty) \subset \rho(A)$ .
- (c)  $A$  pontosan akkor zárt, ha  $\text{ran}(\lambda - A)$  zárt valamely (azaz összes)  $\lambda > 0$  esetén.
- (d) Ha  $\text{ran}(A) \subset \overline{D(A)}$ , pl. ha  $A$  sűrűn definiált, akkor  $A$  lezárható.  $A$  lezártja,  $\overline{A}$  szintén disszipatív és  $\text{ran}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\text{ran}(\lambda - A)}$ ,  $\lambda > 0$ .

*Bizonyítás.*

- (a)  $A$  (2.34) becslés átfogalmazása.
- (b) Tegyük fel, hogy  $\lambda_0 - A$  szürjektív valamely  $\lambda_0 > 0$  esetén. Ekkor  $\lambda_0 \in \rho(A)$  és  $\|R(\lambda_0, A)\| \leq 1/\lambda_0$ . A rezolvens (2.17) hatványsor-alakjának tulajdonságai alapján ekkor  $(0, 2\lambda_0) \subset \rho(A)$  is teljesül, és  $A$  disszipativitása miatt

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

ha  $0 < \lambda < 2\lambda_0$ . Folytatva az eljárást kapjuk, hogy  $\lambda - A$  szürjektív minden  $\lambda > 0$  esetén, így  $(0, \infty) \subset \rho(A)$ .

- (c) Az  $A$  operátor pontosan akkor zárt, ha  $\lambda - A$  zárt valamely (tehát minden)  $\lambda > 0$  esetén. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy

$$(\lambda - A)^{-1} : \text{ran}(\lambda - A) \rightarrow D(A)$$

zárt. Az (a) pont alapján a fenti operátor korlátos. A 2.8. Zártgráf-tétel miatt ez ekvivalens azzal, hogy  $D((\lambda - A)^{-1}) = \text{ran}(\lambda - A)$  zárt.

- (d) Legyen  $(x_n) \subset D(A)$  olyan sorozat, melyre  $x_n \rightarrow 0$  és  $Ax_n \rightarrow y$ . Be kell látnunk, hogy  $y = 0$ . A (2.34) egyenlőtlenség alapján

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|$$

minden  $w \in D(A)$  és minden  $\lambda > 0$  esetén. Ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor

$$\|-\lambda y + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|w\|, \text{ tehát } \left\| -y + w - \frac{1}{\lambda}Aw \right\| \geq \|w\|.$$

Ha most  $\lambda \rightarrow \infty$ , akkor kapjuk, hogy

$$\| -y + w \| \geq \| w \|.$$

Mivel  $y \in \overline{\text{ran}(A)} \subset \overline{D(A)}$  a feltétel szerint, ezért  $w$ -t tetszőlegesen közel választhatjuk  $y$ -hoz, amiből

$$0 \geq \| y \|,$$

tehát  $y = 0$ .

Igazolandó, hogy  $\overline{A}$  is disszipatív, legyen  $x \in D(\overline{A})$  tetszőleges. Az  $\overline{A}$  definíciója miatt létezik olyan  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  sorozat, melyre  $x_n \rightarrow x$ ,  $Ax_n \rightarrow \overline{A}x$ . Mivel  $A$  disszipatív és a norma folytonos leképezés, ezért  $\|(\lambda - \overline{A})x\| \geq \lambda \|x\|$  minden  $\lambda > 0$  esetén. Tehát  $\overline{A}$  is disszipatív. Végül, vegyük észre, hogy  $\text{ran}(\lambda - A)$  sűrű  $\text{ran}(\lambda - \overline{A})$ -ban. A 3. pont alapján  $\text{ran}(\lambda - \overline{A})$  zárt  $X$ -ben, így  $\text{ran}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\text{ran}(\lambda - A)}$  következik.  $\square$

A 2.30. Hille–Yosida-tétel feltételei között szereplő (2.20) rezolvensbecslésből következik, hogy  $A$  teljesíti a (2.34) tulajdonságot, tehát disszipatív. Az alábbi tétel arról szól, hogy sűrűn definiált, disszipatív operátorok lezártja mikor lesz generátor.

**2.41. Tétel** (Lumer, Phillips, 1961). *Legyen  $(A, D(A))$  sűrűn definiált, disszipatív operátor az  $X$  Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Az  $\overline{A}$  lezárt operátor egy kontrakció-félcsoport generátora  $X$ -en;*

(ii)  *$\text{ran}(\lambda - A)$  sűrű  $X$ -ben valamely (tehát minden)  $\lambda > 0$  esetén.*

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : A 2.30. Hille–Yosida-tétel alapján  $\text{ran}(\lambda - \overline{A}) = X$  minden  $\lambda > 0$  esetén. A 2.40. Állítás (d) pontjából pedig következik, hogy  $\text{ran}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\text{ran}(\lambda - A)} = X$ , tehát (ii) teljesül.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $\text{ran}(\lambda - A)$  sűrűségéből a 2.40. Állítás (d) pontja alapján adódik, hogy  $\lambda - \overline{A}$  szürjektív minden  $\lambda > 0$  esetén. A 2.40. Állítás (b) pontja szerint  $(0, \infty) \subset \rho(\overline{A})$ , és  $\overline{A}$  disszipativitása miatt

$$\|R(\lambda, \overline{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Tehát a 2.30. Hille–Yosida-tételből következik, hogy  $\overline{A}$  egy kontrakció-félcsoport generátora  $X$ -en.  $\square$

Még egyszerűbb feltételt kapunk Hilbert-terekben.

**2.42. Következmény.** *Legyen  $(A, D(A))$  sűrűn definiált operátor a  $H$  Hilbert-téren. Ha  $A$  és  $A^*$  is disszipatív, akkor  $\overline{A}$  kontrakció-félcsoportot generál  $H$ -n.*

*Bizonyítás.* A 2.41. Lumer–Phillips-tétel alapján elég megmutatni, hogy  $\text{ran}(\text{Id} - A)$  sűrű. Indirekt, tegyük fel, hogy  $\overline{\text{ran}(\text{Id} - A)} \neq H$ . Ekkor a Riesz-tétel alapján létezik  $y \neq 0$ , melyre

$$\langle (\text{Id} - A)x, y \rangle = 0, \quad x \in D(A).$$

Ezért  $y \in D(A^*)$  és

$$\langle x, (\text{Id} - A^*)y \rangle = 0, \quad x \in D(A).$$

Mivel  $D(A)$  sűrű  $H$ -ban, ezért  $(\text{Id} - A^*)y = 0$ , ami ellentmond a 2.40. Állítás (a) pontjának.  $\square$

A fenti következmény feltételei teljesülnek például akkor, ha  $(A, D(A))$  disszipatív és önadjungált. Ekkor  $A$  generátor, ugyanis zárt is (az adjungált operátor mindig zárt). Az alábbiakban a disszipativitásnak egy olyan karakterizációját adjuk, amely konkrét példákban (pl.  $C_0(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$ , Hilbert-tér) nagyban megkönnyíti annak eldöntését, hogy egy adott operátor disszipatív-e. Ehhez először bevezetjük a dualitási halmaz fogalmát. Legyen  $X$  Banach-tér,  $X^*$  a duális tere. A Hahn–Banach-tétel miatt minden  $x \in X$  esetén létezik olyan  $\varphi_x \in X^*$  funkcionál, melyre

$$\varphi_x(x) = \|x\|^2 = \|\varphi_x\|^2.$$

Rögzített  $x \in X$  esetén legyen az  $x$  dualitási halmaza

$$(2.35) \quad \mathcal{J}(x) := \left\{ \varphi \in X^* : \varphi(x) = \|x\|^2 = \|\varphi\|^2 \right\}.$$

**2.43. Állítás.** *Az  $(A, D(A))$  operátor pontosan akkor disszipatív, ha minden  $x \in D(A)$  esetén létezik  $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$ , amelyre*

$$(2.36) \quad \text{Re}(\varphi_x(Ax)) \leq 0.$$

*Továbbá, ha  $(A, D(A))$  egy kontrakció-félcsoport generátora  $X$ -en, akkor (2.36) teljesül minden  $x \in D(A)$  és minden  $\varphi \in \mathcal{J}(x)$  esetén.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy (2.36) teljesül minden  $x \in D(A)$ ,  $\|x\| = 1$  esetén valamely  $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$  lineáris funkcionálra. Ekkor

$$\varphi_x(x) = \|\varphi_x\|^2 = 1,$$

és minden  $\lambda > 0$  esetén

$$\|\lambda x - Ax\| \geq |\varphi_x(\lambda x - Ax)| \geq \operatorname{Re} \varphi_x(\lambda x - Ax) \geq \operatorname{Re} \varphi_x(\lambda x) = \lambda \|x\|^2 = \lambda.$$

Tehát  $A$  disszipatív.

Megfordítva, legyen  $x \in D(A)$ ,  $\|x\| = 1$  tetszőleges, és tegyük fel, hogy  $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda$  minden  $\lambda > 0$  esetén. Válasszunk minden  $\lambda > 0$  számhoz egy  $\psi_\lambda \in \mathcal{J}(\lambda x - Ax)$  elemet, és tekintsük a

$$\zeta_\lambda := \frac{\psi_\lambda}{\|\psi_\lambda\|}, \quad \lambda > 0$$

lenormált funkcionálokat. Ekkor minden  $\lambda > 0$  esetén

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \|\lambda x - Ax\| = \zeta_\lambda(\lambda x - Ax) \\ &= \lambda \operatorname{Re} \zeta_\lambda(x) - \operatorname{Re} \zeta_\lambda(Ax) \\ &\leq \min\{\lambda - \operatorname{Re} \zeta_\lambda(Ax), \lambda \operatorname{Re} \zeta_\lambda(x) + \|Ax\|\}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\operatorname{Re} \zeta_\lambda(Ax) \leq 0 \text{ és } 1 - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \leq \operatorname{Re} \zeta_\lambda(x).$$

Legyen  $\zeta$  az  $\{\zeta_\lambda : \lambda > 0\}$  funkcionálcsalád egy torlódási pontja a gyenge-\* topológiában. Ekkor

$$\|\zeta\| \leq 1, \quad \operatorname{Re} \zeta(Ax) \leq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta(x) \geq 1.$$

Ezek alapján  $\zeta \in \mathcal{J}(x)$  teljesül, és kielégíti a (2.36) egyenlőtlenséget.

Végül, tegyük fel, hogy  $A$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoportot generál  $X$ -en. Ekkor minden  $x \in D(A)$  vektorra és  $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$  funkcionálra

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varphi_x(Ax)) &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{\operatorname{Re}(\varphi_x(T(h)x))}{h} - \frac{\operatorname{Re}(\varphi_x(x))}{h} \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \left( \frac{\|T(h)x\| \cdot \|\varphi_x\|}{h} - \frac{\|x\|^2}{h} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\|\varphi_x\| = \|x\|$  és  $\|T(h)\| \leq 1$ . Ebből az állítás következik.  $\square$

## 2.44. Példa.

1. Legyen  $X = H$  Hilbert-tér. Ekkor  $\mathcal{J}(x) = \{x\}$ . Ilyenkor az  $A$  operátor pontosan akkor disszipatív, ha

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad x \in D(A).$$

2. Legyen  $X = C_0(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Ha  $0 \neq f \in X$ , akkor a  $\mathcal{J}(f) \subset X^*$  azon pontmértékek számszorosaiból áll, melyek tartója azon  $s_0 \in \Omega$  pontok, ahol  $f$  eléri a maximumát. Precízebben,

$$\{\overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0} : s_0 \in \Omega \text{ és } |f(s_0)| = \|f\|_\infty\} = \mathcal{J}(f).$$

3. Legyen  $X = L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 \neq f \in X$ . Ekkor

$$\varphi \in \mathcal{J}(f) \subset L^q(\Omega, \mu) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ahol

$$\varphi(s) := \begin{cases} \overline{f(s)} \cdot |f(s)|^{p-2} \cdot \|f\|_p^{2-p}, & \text{ha } f(s) \neq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a reflexív  $L^p$ -tereken – mint minden olyan Banach-téren, amelynek a duálisa szigorúan konvex –  $\mathcal{J}(f)$  egyelemű. Tehát, ha  $1 < p < \infty$ , akkor  $\mathcal{J}(f) = \{\varphi\}$ . Míg ha  $p = 1$ , akkor  $\mathcal{J}(f)$ -nek minden olyan  $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mu)$  eleme, amelyre

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_1, \text{ és } \varphi(s) \cdot |f(s)| = \overline{f(s)} \cdot \|f\|_1, \text{ ha } f(s) \neq 0.$$

**2.45. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy önadjungált operátor a  $H$  Hilbert-téren. Ekkor  $A$  pontosan akkor lesz egy erősen folytonos (önadjungált operátorokból álló) félcsoport generátora, ha  $A$  felülről korlátos, vagyis létezik olyan  $w \in \mathbb{R}$ , amelyre*

$$\langle Ax, x \rangle \leq w\|x\|^2, \quad x \in D(A).$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $A$  felülről korlátos  $w \in \mathbb{R}$  felső korláttal. Ekkor  $A - w = A^* - w$  disszipatív (ld. a 2.44. Példa 1. pontját). Így a 2.42. Következmény szerint  $A - w$  egy kontrakció-félcsoport generátora, tehát  $A$  generátor.

Megfordítva, ha  $A = A^*$  generátor, akkor az általa generált  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $w \in \mathbb{R}$  számok, amelyekre

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Ekkor  $A - w = A^* - w$  egy  $M$  korláttal rendelkező korlátos félcsoporthoz önadjungált generátora. Tegyük fel ezért a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy  $A$  egy  $M$  korlátú félcsoporthoz önadjungált generátora, és azt fogjuk belátni, hogy ekkor  $A$  disszipatív is. Tekintsük most a 2.30. Hille–Yosida-tétel bizonyításában bevezetett

$$A_n := nAR(n, A) = n^2R(n, A) - n \operatorname{Id}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

korlátos operátorokat, és az általuk generált

$$T_n(t) := e^{tA_n}, \quad t \geq 0$$

egyenletesen folytonos félcsoporthoz. A 2.33. Feller–Miyadera–Phillips-tétel szerint minden  $\lambda > 0$  esetén

$$\|[\lambda R(\lambda, A)]^k\| \leq M, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így

$$\begin{aligned} \|T_n(t)\| &= \|e^{tA_n}\| = \|e^{tn^2R(n, A)} \cdot e^{-tn}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k [nR(n, A)]^k}{k!} \right\| \cdot e^{-tn} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k \| [nR(n, A)]^k \|}{k!} \cdot e^{-tn} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k}{k!} \cdot e^{-tn} = M \cdot e^{tn} \cdot e^{-tn} = M. \end{aligned}$$

Tehát  $\|T_n(t)\| \leq M$  teljesül minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $t \geq 0$  esetén. Mivel  $A$  kielégíti a 2.29. Lemma feltételeit  $w = 0$ -ra, ezért az  $(A_n)$  operátorsorozat pontonként tart  $A$ -hoz  $D(A)$ -n, ha  $n \rightarrow \infty$ . Így a 2.30. Tétel bizonyításának menetét követve kapjuk, hogy  $(T_n(t))$  is konvergens minden  $t$ -re pontonként  $X$ -en (az egyenletes korlátosság miatt), és a határértéke éppen az  $A$  által generált félcsoporthoz megfelelő  $T(t)$  eleme. Mivel  $A$  önadjungált, ezért  $R(n, A)$  és ezzel együtt  $A_n$  is önadjungált minden  $n$ -re. Ebből következik, hogy  $T_n(t)$  is önadjungált minden  $n$ -re és  $t \geq 0$ -ra, ezért a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz is önadjungált. Feltehető, hogy  $\omega_0 = 0$  is teljesül (a feltételek szerint  $\omega_0 \leq 0$ , és ha  $\omega_0 < 0$  volna, akkor toljuk el  $A$ -t  $\omega_0$ -al). A 4.18. Állítás szerint ekkor  $r(T(t)) = 1$  minden  $t$ -re, és mivel  $\|T(t)\| = r(T(t))$  az önadjungáltság miatt, ezért  $\|T(t)\| = 1$ . Tehát  $(T(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoporthoz, és így ismét a 2.30. Tétel alapján  $A$  disszipatív.  $\square$

**2.46. Példa** (Elsőrendű differenciáloperátorok). Legyen  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható vektormező, melyre

$$\sup_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(s)\| < \infty,$$

ahol a norma tetszőleges vektornorma  $\mathbb{R}^n$ -en. Ekkor az  $F$ -hez tartozó elsőrendű differenciáloperátor  $C_0(\mathbb{R}^n)$ -en

$$Af(s) := \langle \text{grad } f(s), F(s) \rangle = \sum_{k=1}^n F_k(s) \frac{\partial f}{\partial s_k}(s),$$

ahol  $D(A) = C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Mivel

$$\frac{\partial f}{\partial s_i}(s_0) = 0,$$

ha  $|f(s_0)| = \|f\|$ , azonnal adódik, hogy  $A$  disszipatív.  $\bar{A}$  pedig a következő félcsoportot generálja. Mivel  $F$  globálisan Lipschitz, ezért létezik olyan  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos dinamikai rendszer, melyre  $\Phi(t+r, s) = \Phi(t, \Phi(r, s))$ ,  $\Phi(0, s) = s$ , és

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = F(\Phi(t, s)),$$

minden  $t, r \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor

$$(T(t)f)(s) := f(\Phi(t, s)),$$

$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$  a  $\Phi$  dinamikai rendszer által indukált erősen folytonos csoport  $C_0(\mathbb{R}^n)$ -en.

**2.47. Állítás.**  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  csoport generátora  $C_0(\mathbb{R}^n)$ -en a fenti  $(A, D(A))$  operátor lezártja.

*Bizonyítás.* Jelölje  $(B, D(B))$  a  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  csoport generátorát. Legyen  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , és tekintsük a  $g := f - Af = (\text{Id} - A)f$  függvényt! Ekkor a rezolvens (2.13) integrálrepresentációja alapján

$$\begin{aligned} R(1, B)g(s) &= \int_0^\infty e^{-t} f(\Phi(t, s)) dt - \int_0^\infty e^{-t} \langle \text{grad } f(\Phi(t, s)), F(\Phi(t, s)) \rangle ds \\ &= f(s), \end{aligned}$$

ahol parciálisan integráltunk. Tehát  $C_c^1(\mathbb{R}^n) \subset D(B)$  és  $A \subset B$ . Másrészt,  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$  sűrű  $C_0(\mathbb{R}^n)$ -ben és invariáns a  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  csoportra nézve. Tehát  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$  lényeges része  $B$ -nek, így az állítást beláttuk.  $\square$



**2.48. Példa** (Delay (késleltetett) differenciáloperátor). Legyen  $X := C[-1, 0]$ ,

$$Af := f'$$

$$D(A) := \{f \in C^1[-1, 0] : f'(0) = Lf\},$$

ahol  $L$  egy adott folytonos lineáris funkcionál  $C[-1, 0]$ -n. Ekkor

$$D(A) = \ker \varphi$$

alakban is írható, ahol

$$\varphi(f) := f'(0) - Lf \in \mathbb{C}, \quad f \in C^1[-1, 0]$$

lineáris funkcionál. Mivel  $\varphi$  korlátos  $C^1[-1, 0]$ -en, de nem korlátos a szupremum-normában, ezért kapjuk, hogy  $D(A)$  sűrű  $C[-1, 0]$ -ben és zárt  $C^1[-1, 0]$ -ben. Megmutatjuk, hogy az  $A - \|L\| \cdot \text{Id}$  átskálázott operátor disszipatív. Legyen  $f \in D(A)$ . A 2.44.2. Példa alapján a  $\mathcal{J}(f)$  halmaz olyan  $\overline{f(s_0)}\delta_{s_0}$  lineáris formákat tartalmaz, amelyekre  $|f(s_0)| = \|f\|$  valamely  $s_0 \in [-1, 0]$  esetén. Tehát  $A - \|L\| \cdot \text{Id}$  disszipativitásához az szükséges, hogy

$$\text{Re } \overline{f(s_0)}\delta_{s_0}(f' - \|L\|f) \leq 0, \text{ vagyis } \text{Re } \overline{f(s_0)}f'(s_0) \leq \|L\|\|f\|^2.$$

Ha  $-1 < s_0 < 0$ , akkor  $f'(s_0) = 0$ , így a kívánt egyenlőtlenség teljesül. Ha  $s_0 = -1$ , akkor

$$2 \text{Re } \overline{f(-1)}f'(-1) = (f \cdot \bar{f})'(-1) \leq 0.$$

Legyen most  $s_0 = 0$ . Mivel a feltétel szerint  $f'(0) = Lf$ , ezért

$$\text{Re } \overline{f(0)}f'(0) = \text{Re } \overline{f(0)}Lf \leq \|f\| \cdot \|L\| \cdot \|f\|.$$

**2.49. Állítás.** Legyen  $L \in C[-1, 0]^*$ . Ekkor a fenti  $(A, D(A))$  operátor egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátora, melyre

$$\|T(t)\| \leq e^{\|L\|t}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Az előbbi megfontolás alapján  $A - \|L\| \cdot \text{Id}$  disszipatív. A 2.41. Lumer–Phillips-tétel alapján azt kell megmutatni, hogy  $\lambda - A$  szürjektív valamely  $\lambda > \|L\|$  számra. Legyen  $g \in C[-1, 0]$  tetszőleges. Keresünk olyan  $f \in C^1[-1, 0]$  függvényt, amelyre

$$\lambda f - f' = g \text{ és } f'(0) = Lf, \text{ azaz } f \in D(A).$$

Az első egyenletből

$$\begin{aligned} f(s) &:= c e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\tau)} g(\tau) d\tau \\ &=: c \varepsilon_\lambda(s) - h(s), \quad s \in [-1, 0] \end{aligned}$$

megoldás minden  $c \in \mathbb{C}$  konstansra. Ha  $\lambda > \|L\|$ , akkor ezt a konstanst megválaszthatjuk mint

$$c := \frac{g(0) - Lh}{\lambda - L\varepsilon_\lambda},$$

és így  $f \in D(A)$  teljesül. □

## 2.50. Példa (Másodrendű differenciáloperátorok).

1. Legyen  $X := C[0, 1]$ , és tekintsük az

$$Af := f'', \quad D(A) := \{f \in C^2[0, 1] : f'(0) = f'(1) = 0\}$$

operátort, melyet a 2.27. Állításban már vizsgáltunk. Most ahelyett, hogy felírnánk az általa generált félcsoportot, a 2.41. Lumer–Phillips-tétel feltételeit ellenőrizzük. Könnyen látható, hogy  $(A, D(A))$  sűrűn definiált és zárt. A disszipativitás igazolásához legyen  $f \in D(A)$ ,  $s_0 \in [0, 1]$ , melyre  $|f(s_0)| = \|f\|$ . Ekkor

$$\overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0} \in \mathcal{J}(f).$$

Mivel a  $t \mapsto \operatorname{Re} \overline{f(s_0)} \cdot f(t)$  függvénynek  $s_0$ -ban maximuma van, ezért ha  $s_0 \in (0, 1)$ , akkor

$$\operatorname{Re} \left( \overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0}(f'') \right) = \left( \operatorname{Re} \overline{f(s_0)} f \right)''(s_0) \leq 0.$$

Ha csak  $s_0 = 0$  vagy  $s_0 = 1$  választható, akkor az állítás szintén teljesül az  $f'(0) = f'(1) = 0$  peremfeltételek miatt.

Végül megmutatjuk, hogy  $\lambda^2 - A$  szürjektív, ha  $\lambda > 0$ . Legyen  $g \in C[0, 1]$ , és definiáljuk

$$k(s) := \frac{1}{2\lambda} \left[ e^{\lambda s} \int_s^1 e^{-\lambda \tau} g(\tau) d\tau - e^{-\lambda s} \int_s^1 e^{\lambda \tau} g(\tau) d\tau \right],$$

$s \in [0, 1]$ . Ekkor  $k \in C^2[0, 1]$  és

$$\lambda^2 k - k'' = g.$$

Másrészt, minden  $a, b \in \mathbb{C}$  esetén a

$$h_{a,b}(s) := ae^{\lambda s} + be^{-\lambda s}, \quad s \in [0, 1]$$

függvényre

$$\lambda^2 h_{a,b} - h_{a,b}'' = 0.$$

Így meghatározhatók olyan  $a, b$  konstansok, melyekre  $f := k + h_{a,b}$  esetén

$$\lambda^2 f - f'' = g \text{ és } f'(0) = f'(1) = 0.$$

Ekkor  $f \in D(A)$  és  $\lambda^2 f - f'' = g$ , tehát  $\lambda^2 - A$  szürjektív. Ezért a 2.41. Tétel miatt  $(A, D(A))$  egy kontrakciófélcsoporth generál  $C[0, 1]$ -en.

2. Legyen most  $X = L^2[0, 1]$ ,

$$Af := f'', \quad D(A) := \{f \in C^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Ekkor  $D(A)$  sűrű  $X$ -ben, és  $f \in D(A)$  esetén

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 f'' \bar{f} = [f' \bar{f}]_0^1 - \int_0^1 f' \bar{f}' \leq 0.$$

Így  $A$  disszipatív az  $L^2[0, 1]$  Hilbert-téren. Mint az előző példában, adott  $g \in C^2[0, 1]$  függvény esetén megadható olyan  $f \in C^2[0, 1]$  függvény, melyre  $f(0) = f(1) = 0$  és  $\lambda^2 f - f'' = g$ , tehát  $\text{ran}(\lambda^2 - A)$  sűrű. Ezért  $(\bar{A}, D(\bar{A}))$  egy kontrakciófélcsoporthot generál  $L^2[0, 1]$ -en.

## 2.4. Evolúciós egyenletek

Most azzal foglalkozunk, ami valójában a vizsgálódásaink kiindulópontja volt: differenciálegyenletek megoldásával.

**2.51. Definíció.** Az alábbi kezdetiérték-problémát *absztrakt* (vagyis Banach-tér-értékű) *Cauchy-problémának* hívjuk:

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = Au(t), & t \geq 0; \\ u(0) = x, \end{cases}$$

ahol  $(A, D(A))$  lineáris operátor  $X$ -en,  $x \in X$ .

Az  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  az (ACP) *(klasszikus) megoldása*, ha  $u$  folytonosan differenciálható  $t$  szerint  $\mathbb{R}_+$ -n,  $u(t) \in D(A)$ ,  $t \geq 0$  és  $u$  kielégíti (ACP)-t.

Természetesen klasszikus megoldásról csak akkor beszélhetünk, ha  $x \in D(A)$ . A 2.4. Lemma (b) pontja alapján adódik az alábbi állítás.

**2.52. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Ekkor minden  $x \in D(A)$  esetén az*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

*függvény az (ACP) egyetlen klasszikus megoldása.*

*Bizonyítás.* A 2.4. Lemma (b) pontjában láttuk, hogy  $x \in D(A)$  esetén  $T(t)x \in D(A)$  és

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x,$$

tehát  $u$  valóban klasszikus megoldása (ACP)-nek. Az egyértelműséghez legyen  $t > 0$  és  $s \in (0, t)$ . Ekkor

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)u(s)) = T(t-s)\frac{d}{ds}u(s) - T(t-s)Au(s) = 0.$$

Tehát

$$u(t) = T(t)u(0) = T(t)x.$$

Mivel  $t$  tetszőleges volt, az egyértelműség adódik. □

Ha  $x \notin D(A)$ , akkor is lehetséges az (ACP) ún. enyhe (mild) megoldásáról beszélni. Ilyenkor a megoldás differenciálhatóságát csak  $t > 0$  esetén követeljük meg, vagy ott sem.

**2.53. Definíció.** Az  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  folytonos függvény az (ACP) *enyhe (mild) megoldása*, ha  $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$ ,  $t \geq 0$ , és

$$u(t) = A \int_0^t u(s) ds + x.$$

A 2.4. Lemma (d) pontjából ismét adódik, hogy ha  $A$  generátor, akkor minden  $x \in X$  esetén a félcsoporth enyhe megoldást ad.

**2.54. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Ekkor minden  $x \in X$  esetén az*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

*(pálya)függvény az (ACP) egyetlen enyhe megoldása.*

*Bizonyítás.* Elég az azonosan 0 megoldás egyértelműségét igazolni  $x = 0$  esetén. Tegyük fel, hogy  $u$  enyhe megoldása (ACP)-nek és  $x = 0$ , legyen  $t > 0$  tetszőleges. Ekkor minden  $s \in (0, t)$  esetén

$$\frac{d}{ds} \left( T(t-s) \int_0^s u(r) dr \right) = T(t-s)u(s) - T(t-s)A \int_0^s u(r) dr = 0.$$

Ebből

$$\int_0^t u(r) dr = 0, \text{ tehát } u(t) = u(0) = 0.$$

□

A megoldás következő tulajdonsága karakterizálja az  $(A, D(A))$  operátor generátor-tulajdonságát.

**2.55. Definíció.** Azt mondjuk, hogy (ACP) *korrekt kitűzésű (well-posed)*, ha

- (a)  $D(A)$  sűrű;
- (b) minden  $x \in D(A)$  esetén létezik egyértelmű  $u(\cdot, x)$  klasszikus megoldása (ACP)-nek;
- (c) minden  $(x_n) \subset D(A)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t, x_n) = 0$ , ahol az utóbbi limesz  $[0, t_0]$ -on egyenletes (minden  $t_0 > 0$ -ra).

**2.56. Tétel.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- (i)  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos félcsoporth generátora;
- (ii) Az  $(A, D(A))$  operátorhoz tartozó (ACP) absztrakt Cauchy-probléma korrekt kitűzésű.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : A 2.52. Tételből és a félcsoporthok tulajdonságaiból következik.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Adott  $x \in D(A)$  esetén legyen

$$T(t)x := u(t, x)$$

az egyértelműen létező klasszikus megoldás. Az egyértelműség miatt  $T(t)$  lineáris. Mivel  $D(A)$  sűrű, és a feltétel szerint  $T(t)$  korlátos, ezért  $D(A)$ -ról kiterjeszthető  $X$ -re korlátos módon. Megmutatjuk, hogy

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\| < \infty.$$

Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan  $(t_n) \subset [0, 1]$  sorozat, melyre  $\|T(t_n)\| \rightarrow \infty$ . Ekkor létezik olyan  $(x_n) \subset D(A)$  sorozat, melyre  $\|x_n\| \rightarrow 0$  és  $\|T(t_n)x_n\| = \|u(t_n, x_n)\| \geq 1$ , ami ellentmond (ii)-nek. Tehát  $\|T(t)\|$  egyenletesen korlátos  $[0, 1]$ -en. Mivel  $t \mapsto T(t)x$  folytonos (sőt, folytonosan differenciálható) minden  $x \in D(A)$  esetén,  $D(A)$  sűrű, ezért az 1.52. Állítás (iii) pontja alapján minden  $x \in X$  esetén folytonos.

A megoldás egyértelműségéből adódik, hogy minden  $x \in D(A)$ ,  $t, s \geq 0$  esetén

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x.$$

Tehát,  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport  $X$ -en. Legyen a generátora  $(B, D(B))$ . Ekkor  $A \subset B$ . Mivel a feltétel szerint  $D(A)$  invariáns  $(T(t))_{t \geq 0}$ -re nézve és sűrű, így lényeges része  $B$ -nek. Mivel  $A$  zárt, ezért  $A = B$ .  $\square$

## 2.5. Félcsoportok típusai

Az alábbiakban a félcsoportok különböző regularitási tulajdonságaival ismerkedünk meg.

### 2.5.1. Analitikus félcsoportok

Elöljáróban definiáljuk a komplex számsík egy olyan részhalmazait, amelyeket szektornak fogunk nevezni.

**2.57. Definíció.** Legyen  $0 < \delta \leq \pi/2$  adva. Ekkor a

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$$

halmaz neve  $\delta$  szögű szektor.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az olyan félcsoportok, amelyek a valós jobb fél-egyenes helyett egy (komplex) szektoron vannak értelmezve sok fontos tulajdonsággal rendelkeznek.

**2.58. Definíció.** A  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$  operátorcsaládot  $(\delta$  szögű) *analitikus félcsoportnak* nevezzük, ha

(a)  $T(0) = \text{Id}$ ,  $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$  minden  $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$  esetén;

- (b) a  $z \mapsto T(z)$  leképezés analitikus  $\Sigma_\delta$ -ban;
- (c)  $\lim_{\Sigma_{\delta'} \ni z \rightarrow 0} T(z)x = x$  minden  $x \in X$ ,  $0 < \delta' < \delta$  esetén.

Ha továbbá

- (d)  $\|T(z)\|$  korlátos  $\Sigma_\delta$ -ben minden  $0 < \delta' < \delta$  esetén,

akkor  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ -t *korlátos analitikus félcsoporthatnak* nevezzük.

Ha  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$  egy (korlátos) analitikus félcsoporthat, akkor a  $T(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  megszorításának generátorát az analitikus félcsoporthat *generátorának* nevezzük. Fordítva, ha  $(A, D(A))$  egy olyan félcsoporthat generátora, amelynek létezik  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$  analitikus kiterjesztése, akkor azt mondjuk, hogy az  $A$  által generált félcsoporthat analitikus.

**2.59. Megjegyzés.** Könnyen látható, hogy ha  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$  analitikus félcsoporthat, akkor a

$$T : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

leképezés folytonos (sőt, differenciálható)  $\mathcal{L}(X)$ -ben az operátornormát véve. Ebből az is következik, hogy ha  $\lambda$  elég nagy, akkor a generátor rezolvensét a

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

improprius integrál állítja elő, ahol az integrál az operátornormában is konvergens.

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

**2.60. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$  sűrűn definiált lineáris operátor az  $X$  Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i) *Az  $A$  operátor egy analitikus félcsoporthat generál;*
- (ii) *Valamilyen  $\omega > 0$  számra  $A - \omega$  korlátos analitikus félcsoporthat generál.*

*Bizonyítás.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) : Ha az  $A - \omega$  generátor által generált korlátos analitikus félcsoporthat  $(S(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ , akkor az  $A = (A - \omega) + \omega$  által generált félcsoporthat

$$T(z) := e^{\omega z} S(z), \quad z \in \Sigma_\delta \cup \{0\},$$

ami szintén analitikus.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Legyen  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$  az  $A$  által generált analitikus félcsoporth. Ekkor meggondolható, hogy minden  $\delta' \in (0, \delta)$  esetén létezik olyan  $\omega > 0$  és  $M \geq 1$ , hogy

$$\|T(z)\| \leq M e^{\omega \operatorname{Re} z}, \quad z \in \Sigma_{\delta'}.$$

Definiálj  $S(z) := e^{-\omega z} T(z)$ ,  $z \in \Sigma_{\delta'}$ . Ekkor  $(S(z))_{z \in \Sigma_{\delta'} \cup \{0\}}$  korlátos analitikus félcsoporth lesz, amelynek generátora  $A - \omega$ .  $\square$

A továbbiakban karakterizálni szeretnénk a (korlátos) analitikus félcsoporthok generátorait. Ehhez szükségünk lesz a szektorális operátor fogalmára.

**2.61. Definíció.** Legyen  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált lineáris operátor az  $X$  Banach-téren. Azt mondjuk, hogy  $A$   $\delta$  szögű szektorális operátor, ha létezik olyan  $0 < \delta \leq \pi/2$  szám, amelyre

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta} \subset \rho(A),$$

és minden  $\varepsilon \in (0, \delta)$  esetén létezik  $M_\varepsilon \geq 1$ , amelyre

$$(2.37) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon}$$

(ld. a 2.2. ábrát).

Szektoriális operátorok exponenciálisát a Cauchy-integrálformulával definiálhatjuk.

**2.62. Definíció.** Legyen  $(A, D(A))$   $\delta$  szögű szektorális operátor. Legyen  $T(0) := \operatorname{Id}$ , és  $z \in \Sigma_\delta$  esetén

$$(2.38) \quad T(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} R(\mu, A) d\mu,$$

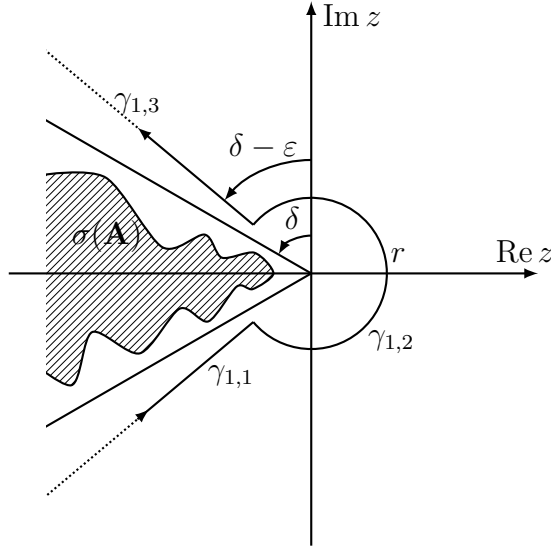
ahol  $\gamma$  tetszőleges szakaszonként sima görbe  $\Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta}$ -ban, amely valamely  $\delta' \in (|\arg z|, \delta)$  esetén  $\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta')}$ -ből halad  $\infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')}$ -ig (ld. a 2.2. ábrát).

2.63. *Megjegyzés.* Ha  $A \in \mathcal{L}(X)$ , tehát  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  kompakt, akkor is definiálható

$$T(t) = e^{tA} := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu t} R(\mu, A) d\mu, \quad t \in \mathbb{C},$$

ahol  $\gamma$  egy pozitív irányítású görbe, ami körüljárja  $\sigma(A)$ -t. Ekkor az így definiált félcsoporth megegyezik az (1.5) exponenciális sor által definiálttal.





2.2. ábra. Analitikus félcsoporthok generátorának spektruma

A következő állítás arról szól, hogy a (2.38) integrálformulával definiált operátorok korlátos analitikus félcsoporthot alkotnak, amelynek generátora éppen  $A$ .

**2.64. Állítás.** *Legyen  $(A, D(A))$   $\delta$  szögű szektorális operátor. Ekkor a (2.38) képlettel definiált  $T(z)$ ,  $z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}$  operátorok  $\mathcal{L}(X)$ -ben vannak, és  $\delta$  szögű korlátos analitikus félcsoporthot alkotnak. Ennek a félcsoporth a generátora az  $(A, D(A))$  szektorális operátor.*

*Bizonyítás.* Csak a generátortulajdonságot bizonyítjuk. Jelölje a (2.38) képlettel definiált  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporth generátorát  $(B, D(B))$ . Az állítás első részéből következik, hogy a félcsoporth korlátos, ezért  $2 \in \rho(B)$  teljesül. Így elegendő megmutatni, hogy

$$R(2, A) = R(2, B).$$

A 2.17. Tétel szerint

$$R(2, B)x = \int_0^\infty e^{-2t} T(t)x \, dt, \quad x \in X.$$

Legyen  $t_0 > 0$  és  $\gamma$  egy olyan görbe, mint a 2.2. ábrán látható,  $r = 1$  sugárral. Ekkor a

Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_0} e^{-2t} T(t)x \, dt &= \int_0^{t_0} e^{-2t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu t} R(\mu, A)x \, d\mu \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_0^{t_0} e^{(\mu-2)t} \, dt R(\mu, A)x \, d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{t_0(\mu-2)} - 1}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu \\
 (2.39) \quad &= R(2, A)x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{t_0(\mu-2)}}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk a Cauchy-integrálformulát, amely szerint

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(\mu, A)}{\mu - 2} x \, d\mu = -R(2, A)x,$$

ami könnyen látható, ha a  $\gamma$  görbét lezárjuk  $\infty$ -be tartó sugarú körökkel. Ekkor  $\mu \in \gamma$  esetén  $\operatorname{Re}(\mu - 2) \leq -1$ ,

$$\left\| \int_{\gamma} \frac{e^{t_0(\mu-2)}}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu \right\| \leq e^{-t_0} \cdot \|x\| \int_{\gamma} \frac{M_{\varepsilon}}{|\mu - 2| \cdot |\mu|} |d\mu|,$$

ahol felhasználtuk a (2.37) becslést. Ha  $t_0 \rightarrow \infty$ , akkor kapjuk, hogy a (2.39) egyenlőség 2. tagja 0-hoz tart, így  $R(2, B) = R(2, A)$  következik.  $\square$

A következő tétel a korlátos analitikus félcsoporthok karakterizációjáról szól.

**2.65. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren. Ekkor ekvivalensek.*

- (i) *A egy korlátos analitikus félcsoporth generátora  $X$ -en;*
- (ii) *Létezik olyan  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ , amelyre az  $e^{\pm i\vartheta} A$  operátorok egy-egy korlátos, erősen folytonos félcsoporth generátorai;*
- (iii) *A szektoriális.*

*Bizonyítás.* (iii)  $\Rightarrow$  (i) : Következik a 2.64. Állításból.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Ha  $(T(z))_{z \in \Sigma_{\delta} \cup \{0\}}$  jelöli az  $A$  által generált  $\delta$  szögű korlátos analitikus félcsoporthot, akkor könnyen látható, hogy  $\vartheta \in (0, \delta)$  esetén az  $e^{\pm i\vartheta} A$  operátorok a  $(T(e^{i\vartheta} t))_{t \geq 0}$  ill.  $(T(e^{i\vartheta} t))_{t \geq 0}$  korlátos, erősen folytonos félcsoporthok generátorai.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Legyen  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Ekkor mivel  $e^{i\vartheta} A$  és  $e^{-i\vartheta} A$  korlátos félcsoporthok

generátorai, ezért könnyen látható, hogy  $\lambda \in \rho(A)$  teljesül. Ha  $M \geq 1$  jelöli a korlátos félcsoporthoz (egy) korlátját, akkor a 2.33. Tétel alapján

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)\| &= \|R(e^{i\vartheta}\lambda, e^{i\vartheta}A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\lambda)} = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda \cos \vartheta - \operatorname{Im}\lambda \sin \vartheta}, \text{ ha } \operatorname{Im}\lambda \leq 0; \\ \|R(\lambda, A)\| &= \|R(e^{-i\vartheta}\lambda, e^{-i\vartheta}A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda)} = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda \cos \vartheta + \operatorname{Im}\lambda \sin \vartheta}, \text{ ha } \operatorname{Im}\lambda > 0.\end{aligned}$$

Egybevetve a fentieket kapjuk, hogy létezik olyan  $\widetilde{M} \geq 1$  konstans, amelyre

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M'}{\operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\lambda|} \leq \frac{\widetilde{M}}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Így  $\delta = 0$ -ra teljesülnek a feltételek  $A$ -ra a szektorális operátor definíciójából. A nagyobb szektorra vonatkozó bizonyítást itt nem részletezzük.  $\square$

A tétel következményeként belátható az alábbi állítás Hilbert-téren.

**2.66. Következmény.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy Hilbert-téren értelmezett önadjungált, felfőlről korlátos operátor (ld. a 2.45. Állítást). Ekkor az általa generált félcsoporthoz egy  $\pi/2$  szögű, analitikus félcsoporthoz.*<sup>1</sup>

**2.67. Példa.** A 2.50. Példa 2. pontjában meggondoltuk, hogy a

$$Af := f'', \quad D(A) := \{f \in C^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

operátor lezártja egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos kontrakciófélcsoportot generál az  $X = L^2[0, 1]$  Hilbert-téren. Könnyen meggondolható, hogy

$$\overline{A}f := f'', \quad D(\overline{A}) := \{f \in H^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

operátor önadjungált. Ugyanis legyen  $f, g \in D(\overline{A})$ , ekkor

$$\begin{aligned}\langle \overline{A}f, g \rangle &= \int_0^1 f''g = [f'g]_0^1 - \int_0^1 f'g' \\ &= 0 - [f\overline{g}']_0^1 + \int_0^1 f\overline{g}'' = 0 + \int_0^1 f\overline{g}'' = \langle f, \overline{A}g \rangle.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Egy félcsoporthoz analitikusnak fogunk nevezni akkor is, ha létezik analitikus kiterjesztése egy megfelelő szektorra.

Tehát  $\overline{A}$  szimmetrikus, így  $\overline{A} \subset \overline{A}^*$ . Mivel definíció szerint az  $\overline{A}$  operátornak nem létezik valódi zárt kiterjesztése, az önadjungáltság következik. Ezek alapján azt is beláttuk, hogy

$$\langle \overline{A}f, f \rangle = - \int_0^1 f' \overline{f'} = -\|f'\|^2 \leq 0,$$

tehát  $\overline{A}$  felülről korlátos. Így  $(T(t))_{t \geq 0}$  analitikus is.

Szintén a 2.65. Tételből igazolható az alábbi.

**2.68. Következmény.** *Legyen  $A$  egy erősen folytonos csoport generátora. Ekkor  $A^2$  egy  $\pi/2$  szögű, analitikus félcsoporthat generál.*

**2.69. Példa.** Véve az eltoláscsoportot  $C_0(\mathbb{R})$ -en vagy  $L^p(\mathbb{R})$ -en,  $1 \leq p < \infty$ , a generátora  $Af = f'$ , a megfelelő értelmezési tartománnyal (ld. a 2.25. Állítást). Ekkor ezen operátor négyzete

$$A^2f = f'',$$

amely tehát egy korlátos analitikus félcsoporthat generál. A gondolatmenetet több dimenzióra is általánosíthatjuk (ennek meggondolása nem könnyű, itt nem részletezzük), így kapjuk, hogy az

$$Af := \Delta f$$

$\mathbb{R}^n$  (megfelelő értelmezési tartománnyal)  $\pi/2$  szögű, analitikus félcsoporthat generál.

## 2.5.2. Differenciálható félcsoporthat

A terminológiából következik, hogy egy erősen folytonos félcsoporthat esetén a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x$$

pálya pontosan akkor differenciálható minden  $t \geq 0$ -ra, ha  $x \in D(A)$ . Továbbá, pontosan akkor lesz minden pálya differenciálható, ha  $D(A) = X$ , vagyis ha  $A$  korlátos. A következő definícióban minden  $x \in X$  esetén megkívánjuk  $\xi_x$  differenciálhatóságát, viszont nem minden  $t \geq 0$ -ra.

**2.70. Definíció.** Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat *differenciálhatónak* mondunk, ha létezik olyan  $t_0 \geq 0$ , amelyre a  $\xi_x : t \mapsto T(t)x$  pálya differenciálható  $(t_0, \infty)$ -n minden  $x \in X$  esetén. A félcsoporthat *azonnal differenciálható*, ha  $t_0 = 0$  választható.

**2.71. Tétel.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport, amelyre  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$  teljesül, és legyen  $(A, D(A))$  a generátora. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  differenciálható;

(ii) Léteznek  $a > 0$ ,  $b > 0$  és  $C > 0$  konstansok, amelyekre

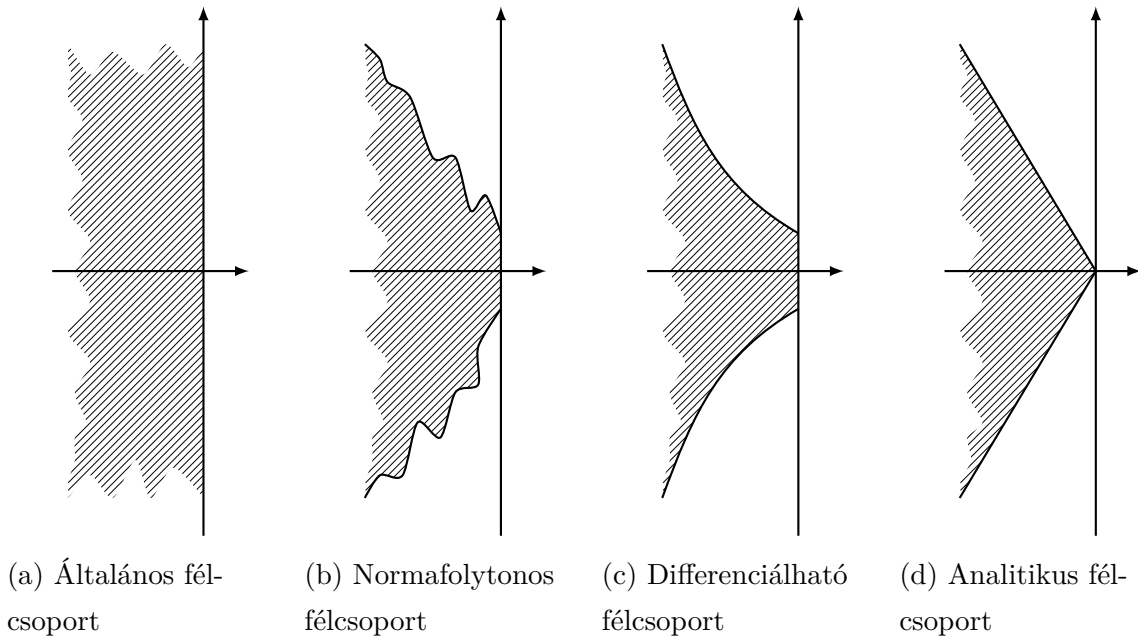
$$\Theta := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : ae^{-b \operatorname{Re} \lambda} \leq |\operatorname{Im} \lambda| \right\} \subset \rho(A)$$

és

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\operatorname{Im} \lambda|$$

minden  $\lambda \in \Theta$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \leq w$  esetén.

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □



2.3. ábra. Félcsoportok generátorainak spektruma

### 2.5.3. Normafolytonos félcsoporthok

Korábban (ld. az 1.3. alfejezetet) foglalkoztunk olyan félcsoporthokkal, amelyekre a  $t \mapsto T(t)$  leképezés  $[0, \infty)$ -n folytonos az operátornormára nézve. Most olyan félcsoporthokról lesz szó, amelyekre a folytonosság csak egy későbbi,  $s_0 > 0$  időponttól kezdve igaz. Az (FE) tulajdonság miatt a

$$\lim_{t \downarrow s_0} \|T(t) - T(s_0)\| = 0$$

feltételből már következik a  $t \mapsto T(t)$  leképezés folytonossága az egész  $[s_0, \infty)$  intervallumon.

**2.72. Definíció.** Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthot *normafolytonosnak* mondunk, ha létezik olyan  $t_0 \geq 0$ , amelyre a  $t \mapsto T(t)$  leképezés folytonos  $(t_0, \infty)$ -ből  $\mathcal{L}(X)$ -be. A félcsoporth *azonnal normafolytonos*, ha  $t_0 = 0$  választható.

**2.73. Megjegyzés.** Fontos hangsúlyoznunk, hogy egy azonnal normafolytonos félcsoporth nem feltétlenül egyenletesen folytonos.

**2.74. Tétel.** Legyen  $(A, D(A))$  egy *azonnal normafolytonos félcsoporth generátora*. Ekkor minden  $b \in \mathbb{R}$  esetén a

$$\{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq b\}$$

halmaz korlátos.

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

**2.75. Következmény.** Legyen  $(A, D(A))$  egy *azonnal normafolytonos félcsoporth generátora*. Ekkor minden  $a > \omega_0$  esetén

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \|R(a + ir, A)\| = 0.$$

### 2.5.4. Kompakt félcsoporthok

Ebben a fejezetben az eddigiekkel ellentétben nem a  $t \mapsto T(t)$  leképezések tulajdonságáról, hanem a  $T(t)$  operátor(ok) tulajdonságáról lesz szó. A definíciót az alábbi lemmával készítjük elő.

**2.76. Lemma.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren. Ha  $T(t_0)$  kompakt valamely  $t_0 > 0$ -ra, akkor  $T(t)$  kompakt minden  $t \geq t_0$  esetén, és a  $t \mapsto T(t)$  leképezés normafolytonos  $[t_0, \infty)$ -en.

*Bizonyítás.* Az első állítás rögtön következik az (FE) tulajdonságból. Az 1.51. Lemma (ii) pontjából belátható, hogy  $\lim_{h \rightarrow 0} T(s+h)x = T(s)x$  minden  $s \geq 0$  és  $K \subset X$  kompakt halmaz esetén egyenletesen teljesül. Legyen  $U \subset X$  a zárt egységgömb. Mivel  $T(t_0)$  kompakt, ezért  $K := \overline{T(t_0)U}$  kompakt. Tehát  $t \geq t_0$  esetén

$$\lim_{s \downarrow t} (T(t)x - T(s)x) = \lim_{s \downarrow t} (T(t - t_0) - T(s - t_0)) T(t_0)x = 0$$

$x \in U$ -ban egyenletesen. Ebből adódik, hogy  $\lim_{s \downarrow t} (\|T(t) - T(s)\|) = 0$ .  $\square$

**2.77. Definíció.** Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportról azt mondjuk, hogy *azonnal kompakt*, ha  $T(t)$  kompakt minden  $t > 0$  esetén, és *kompakt*, ha létezik olyan  $t_0 > 0$ , hogy  $T(t_0)$  kompakt.

A 2.76. Lemmából következik, hogy egy (azonnal) kompakt félcsoport (azonnal) normafolytonos is. Az alábbiakból kiderül az is, hogy a félcsoport kompaktsága a rezolvens kompaktságával van összefüggésben. Előzetesen megjegyezzük, hogy ún. rezolvens egyenlőség miatt (ld. (4.3))  $R(\lambda, A)$  pontosan akkor kompakt valamely  $\lambda \in \rho(A)$  esetén, ha minden  $\lambda \in \rho(A)$  esetén kompakt.

**2.78. Definíció.** Egy  $A$  lineáris operátorról, melyre  $\rho(A) \neq \emptyset$  azt mondjuk, hogy *kompakt rezolvensű*, ha  $R(\lambda, A)$  kompakt valamely (minden)  $\lambda \in \rho(A)$  esetén.

Ha egy operátor egy végtelen dimenziós Banach-téren kompakt rezolvensű, akkor szükségképpen nemkorlátos. Konkrét operátorok esetén a következő karakterizáció igazolható.

**2.79. Állítás.** Legyen  $(A, D(A))$  lineáris operátor, amelyre  $\rho(A) \neq \emptyset$ , és definiálja  $X_1^A := (D(A), \|\cdot\|_A)$  (ld. a 2.5. Definíció (iii) pontját). Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

(i) Az  $A$  operátor kompakt rezolvensű;

(ii) Az  $i : X_1^A \hookrightarrow X$  kanonikus beágyazás kompakt.

*Bizonyítás.* Meggondolható, hogy tetszőleges  $\lambda \in \rho(A)$  esetén a  $\|\cdot\|_A$  gráf-norma ekvivalens a

$$\|x\|_\lambda := \|(\lambda - A)x\|$$

normával. Most csak a  $\lambda = 0$  esetre bizonyítjuk, a  $\lambda \neq 0$  hasonlóan belátható. Ekkor  $\|x\|_0 = \|Ax\|$ , és azt kell megmutatni, hogy ez ekvivalens  $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ -val. Mivel  $A^{-1}$  létezik és korlátos, ezért

$$\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|A^{-1}Ax\| + \|Ax\| \leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|Ax\|,$$

amiből az állítás adódik. Így a

$$R(\lambda, A) : X \rightarrow (X_1^A, \|\cdot\|_\lambda)$$

operátor izomorfizmus, hiszen  $\|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\| = \|x\|$ , amelynek korlátos inverze  $\lambda - A$ . Ebből az állítás a 2.4. ábrán látható faktorizáció alapján következik.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{R(\lambda, A)} & X \\ \uparrow \scriptstyle R(\lambda, A) & \nearrow \scriptstyle i & \\ X_1^A & & \end{array}$$

$\lambda - A$

2.4. ábra. Az  $X_1^A$  tér

□

## 2.80. Példa.

1. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartomány,  $X := C_0(\Omega)$ . Legyen  $(A, D(A))$  olyan operátor, amelynek értelmezési tartománya,  $D(A)$  folytonosan beágyazható a

$$C_0^1(\Omega) := \{f \in C_0(\Omega) : f \text{ differenciálható, és } f' \in C_0(\Omega)\}$$

Banach-térbe. Az Arzelà–Ascoli-tétel miatt az  $i : C_0^1(\Omega) \hookrightarrow C_0(\Omega)$  beágyazás kompakt, tehát  $A$  kompakt rezolvensű, ha  $\rho(A) \neq \emptyset$ .



2. Legyen  $X := L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartomány,  $\partial\Omega$  sima. Ekkor a Rellich-Kondracsov-féle beágyazási tételből következik, hogy ha  $(A, D(A))$  olyan operátor, amelyre  $\rho(A) \neq \emptyset$  és  $D(A) \subset W^{1,p}(\Omega)$  folytonos beágyazással, akkor  $A$  kompakt rezolvensű.

**2.81. Tétel.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  azonnal kompakt;

(ii)  $(T(t))_{t \geq 0}$  azonnal normafolytonos és a generátora kompakt rezolvensű.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : A 2.76. Lemmából következik, hogy egy azonnal kompakt félcsoport azonnal normafolytonos is. Ezért a rezolvens (2.13) integrálreprezentációjában szereplő integrál a normatopológiában létezik, így  $R(\lambda, A)$  kompakt.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Legyen  $\lambda \in \rho(A)$  tetszőleges. Jelölje rögzített  $t > 0$ ,  $x \in X$  esetén

$$V(t)x := \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds.$$

A (2.11) egyenlet alapján

$$e^{-\lambda t} T(t)x - x = (A - \lambda)V(t)x, \quad x \in X,$$

tehát

$$V(t) = R(\lambda, A) \left( \text{Id} - e^{-\lambda t} T(t) \right).$$

Mivel a feltétel szerint  $R(\lambda, A)$  kompakt, ezért  $V(t)$  is kompakt minden  $t > 0$ -ra. Másrészt, a félcsoport normafolytonossága miatt a

$$T(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (V(t+h) - V(t))$$

határérték operátornormában létezik. Így  $T(t)$  kompakt is minden  $t > 0$  esetén. □

A félcsoportok tulajdonságai közötti összefüggéseket az alábbi diagram szemlélteti.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{analitikus} & \implies & \text{azonnal differenciálható} \implies \text{differenciálható} \\
 & \Downarrow & \Downarrow \\
 (2.40) \quad & \text{azonnal normafolytonos} \implies \text{normafolytonos} & \\
 & \Uparrow & \Uparrow \\
 & \text{azonnal kompakt} \implies \text{kompakt} &
 \end{array}$$

## 2.5.5. Példák

### Nilpotens félcsoportok

A

$$T(t)f(s) := \begin{cases} f(s+t), & \text{ha } s+t \leq 1, \\ 0, & \text{ha } s+t > 1, \end{cases}$$

nilpotens félcsoport  $C_0[0, 1]$ -en (vagy  $L^p[0, 1]$ -en) tipikus példa olyan félcsoportra, ami „jó” tulajdonságokkal rendelkezik  $t > 1$  esetén,  $t < 1$  esetén viszont nem. Pontosabban,  $t > 1$ -re normafolytonos, differenciálható és kompakt, de nem azonnal differenciálható, nem azonnal normafolytonos és nem azonnal kompakt.

### Szorásfélcsoport

Az 1.34. Definíciónak megfelelően legyen

$$M_q : f \mapsto q \cdot f$$

szorzásoperátor a  $X = C_0(\Omega)$  (vagy  $X = L^p(\Omega)$ ) téren valamely  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos függvényre. Ha  $\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$ , akkor

$$T_q(t)f := e^{tq} \cdot f, \quad t \geq 0$$

egy erősen folytonos félcsoportot definiál (ld. az 1.35. Állítást), amelyre a következő teljesül (ld. a 2.65., a 2.71. és a 2.74. Tételeket).

**2.82. Tétel.** *Legyen  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  az  $M_q$  szorzásoperátor által generált szorásfélcsoport  $X$ -en. Ekkor*

(a)  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor  $\delta$  szögű korlátos analitikus félcsoport, ha

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{q(\Omega)} = \rho(M_q).$$

(b)  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor (azonnal) differenciálható  $t > t_0$  esetén, ha létezik  $c > 0$ , amelyre

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : ce^{-t_0 \operatorname{Re} \lambda} < |\operatorname{Im} \lambda|\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{q(\Omega)} = \rho(M_q).$$

(c)  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor (azonnal) normafolytonos, ha

$$\overline{q(\Omega)} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq b\}$$

korlátos minden  $b \in \mathbb{R}$  esetén.

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

A tételből kiderül, hogy a szorzásfélcsoportok esetén a spektrum elhelyezkedése karakterizálja a félcsoport regularitási tulajdonságait, a rezolvens becslésére nincs is szükség. Mivel a generátor spektruma a  $q$  függvény képhalmazának lezártja, ezért a  $q$  függvény tulajdonságai közvetlenül megfelelnek az  $M_q$  operátor, és ezzel együtt a  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  félcsoport tulajdonságainak.

## 2.6. Feladatok

**2.1. Feladat.** Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , és  $D$  az  $\Omega$ -n értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények tere. Igazoljuk, hogy ha  $M_q$  egy  $C_0(\Omega)$ -n értelmezett szorzásoperátor, akkor  $D$  ennek lényeges része (core-ja)!

**2.2. Feladat.** Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X := C_0(\Omega)$ . Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport  $X$ -en, amelynek generátora  $(A, D(A))$ . Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek!

(i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  algebra-homomorfizmusokból áll, vagyis

$$T(t)(f \cdot g) = T(t)f \cdot T(t)g, \quad f, g \in X, t \geq 0;$$

(ii)  $(A, D(A))$  deriválás, vagyis  $D(A)$  az  $X$  részalgebrája, és

$$A(f \cdot g) = Af \cdot g + f \cdot Ag, \quad f, g \in D(A).$$

(Segítség: a (ii)  $\Rightarrow$  (i) irányhoz tekintsük az  $s \mapsto T(t-s)[T(s)f \cdot T(s)g]$ ,  $0 \leq s \leq t$  leképezést!)

**2.3. Feladat.** Legyen  $M_q$  szorzásoperátor  $X = C_0(\mathbb{R}_+)$ -on, és definiáljuk az

$$A := \begin{pmatrix} M_q & M_q \\ 0 & M_q \end{pmatrix}$$

operátort  $D(A) = D(M_q) \times D(M_q)$  értelmezési tartománnyal  $X \times X$ -en.

(a) Igazoljuk, hogy ha  $q(s) = is$ ,  $s \geq 0$ , akkor  $\|R(\lambda, A)\| \leq 2/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , de  $(A, D(A))$  nem generátor!

(b) Adjunk meg olyan  $q$  nemkorlátos függvényt  $\mathbb{R}_+$ -on, amelyre  $A$  generátor!

(c) Keressünk szükséges és elégséges feltételt  $q$ -ra, hogy  $A$  generátor legyen!

**2.4. Feladat.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan  $t_0 > 0$ , amelyre  $\text{Id} - T(t_0)$  kompakt, akkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  beágyazható egy  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  csoportba! (Segítség: elég megmutatni, hogy a 0 nem sajátértéke  $T(t_0)$ -nak.)

## 3. fejezet

# Félcsoportok perturbációja és approximációja

**Probléma:** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos operátorfélcsoport generátora, és legyen  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  egy másik operátor. Keressünk feltételeket  $B$ -re, hogy az  $A + B$  összeg egy  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos operátorfélcsoport generátora legyen.

**3.1. Példa.** Legyen  $(A, D(A))$  egy nemkorlátos generátor, tehát  $D(A) \subset X$  valódi sűrű altér, és  $B := -A$ . Ekkor  $A + B$  az azonosan 0 operátor, egy valódi sűrű altéren definiálva, amely így nem zárt, tehát nem lehet generátor. Legyen most  $B := -2A$ . Ekkor  $A + B = -A$ ,  $D(A + B) = D(A)$ , amely pontosan akkor generátor, ha  $A$  egy csoport generátora. Előfordulhat az is, hogy  $B$  is generátor, de  $D(A) \cap D(B) = \{0\}$ .

### 3.1. Korlátos perturbációk

**3.2. Tétel** (Korlátos perturbáció). *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora az  $X$  Banach-téren, amelyre*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

*Ha  $B \in \mathcal{L}(X)$ , akkor*

$$C := A + B, \quad D(C) = D(A)$$

is egy  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora, amelyre

$$\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Első lépésben tegyük fel, hogy  $w = 0$ ,  $M = 1$ . Ekkor minden  $\lambda > 0$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$ , és

$$\lambda - C = \lambda - A - B = (\text{Id} - BR(\lambda, A))(\lambda - A).$$

Mivel  $\lambda - A$  bijektív, ezért  $\lambda - C$  pontosan akkor lesz bijektív (azaz pontosan akkor lesz  $\lambda \in \rho(C)$ ), ha  $\text{Id} - BR(\lambda, A)$  invertálható. Ha ez teljesül, akkor

$$(3.1) \quad R(\lambda, C) = R(\lambda, A)[\text{Id} - BR(\lambda, A)]^{-1}.$$

Legyen most  $\text{Re } \lambda > \|B\|$ . Ekkor a 2.30. Hille–Yosida-tétel alapján

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq \|B\|/\text{Re } \lambda < 1,$$

tehát  $\lambda \in \rho(C)$ , és

$$(3.2) \quad R(\lambda, C) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n.$$

A  $C$  rezolvensének normáját az alábbi módon becsülhetjük:

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \frac{1}{\text{Re } \lambda} \cdot \frac{1}{1 - \|B\|/\text{Re } \lambda} = \frac{1}{\text{Re } \lambda - \|B\|},$$

ha  $\text{Re } \lambda > \|B\|$ . Így a 2.31. Következmény alapján  $C$  egy  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre

$$\|S(t)\| \leq e^{\|B\|t}, \quad t \geq 0.$$

Általános  $w \in \mathbb{R}$  és  $M \geq 1$  esetén először átskálázzuk a félcsoportot (ld. a 2.2.1. alpontot) úgy, hogy  $w = 0$  legyen, tehát  $\|T(t)\| \leq M$ . Vezessük be a

$$\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|$$

normát  $X$ -en! Ez a norma ekvivalens az eredetivel, és

$$\|x\| \leq \|x\| \leq M\|x\|.$$

Tehát a  $\|\cdot\|$  normára nézve  $(T(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoport lesz, továbbá

$$\|Bx\| \leq M\|B\| \cdot \|x\| \leq M\|B\| \cdot \|x\|$$

minden  $x \in X$  esetén. A bizonyítás első része alapján így  $C$  egy  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre

$$\|S(t)\| \leq e^{\|B\|t} \leq e^{M\|B\|t}.$$

Tehát

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x\| \leq e^{M\|B\|t} \cdot \|x\| \leq Me^{M\|B\|t} \cdot \|x\|$$

minden  $t \geq 0$  esetén, ami éppen a kívánt becslés  $w = 0$ -ra.  $\square$

Vegyük észre, hogy a perturbált operátor rezolvensére kaptunk egy (3.2) végtelen sorelőállítást, míg a generált félcsoportnak csak a létezését bizonyítottuk. Célunk, hogy a félcsoportot is állítsuk elő valamilyen módon az eredetiből.

**3.3. Következmény.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport, amelynek generátora  $(A, D(A))$ , legyen  $B \in \mathcal{L}(X)$  és  $(S(t))_{t \geq 0}$  a  $C := A + B$  által generált erősen folytonos félcsoport. Ekkor minden  $x \in X$  és  $t \geq 0$  esetén

$$(IE) \quad S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x \, ds.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $x \in D(A)$ , és tekintsük a

$$[0, t] \ni s \mapsto \xi_x(s) := T(t-s)S(s)x \in X$$

függvényt! Mivel  $D(A) = D(C)$  invariáns mindkét félcsoportra nézve, ezért

$$\frac{d}{ds} \xi_x(s) = T(t-s)CS(s)x - T(t-s)AS(s)x = T(t-s)BS(s)x.$$

Ebből

$$S(t)x - T(t)x = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t \xi'_x(s) \, ds = \int_0^t T(t-s)BS(s)x \, ds.$$

Mivel  $D(A)$  sűrű és a szereplő operátorok korlátosak, az egyenlet adódik minden  $x \in X$ -re.  $\square$

Vegyük észre, hogy ha a fenti  $\xi_x$  függvényt a

$$\xi_x(s) := S(s)T(t-s)x$$

függvénnyel helyettesítjük, akkor egy hasonló

$$(IE^*) \quad S(t)x = T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)x \, ds$$

integrálegyenlethez jutunk. Az (IE) és (IE\*) egyenleteket szokás *konstansvariációs formuláknak* is hívni.

Ahhoz, hogy az (IE) egyenletet megoldjuk, operátoregyenletté fogjuk átírni a

$$(3.3) \quad \mathcal{X}_{t_0} := C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$$

függvénytéren, amely azokat az  $F : [0, t_0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvényeket tartalmazza, amelyekre a  $t \mapsto F(t)x$  leképezés minden  $x \in X$  esetén folytonos  $[0, t_0]$ -on. Az  $\mathcal{X}_{t_0}$  tér Banach-tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s \in [0, t_0]} \|F(s)\|$$

normával.

**3.4. Definíció.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{L}(X)$ . Ekkor tetszőleges  $t_0 > 0$  esetén a  $V = V_{t_0} : \mathcal{X}_{t_0} \rightarrow \mathcal{X}_{t_0}$ ,

$$(3.4) \quad (VF)(t)x := \int_0^t T(t-s)BF(s)x \, ds,$$

( $x \in X$ ,  $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ ) képlettel definiált operátor a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoportához és a  $B$  operátorhoz tartozó *absztrakt Volterra-operátor*.

**3.5. Lemma.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{L}(X)$ , és  $V$  a hozzájuk tartozó absztrakt Volterra-operátor. Ekkor  $V$  korlátos lineáris operátor az  $\mathcal{X}_{t_0}$  Banach-téren, és

$$\|V^n\| \leq \frac{(M\|B\|t_0)^n}{n!}$$

minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén, ahol  $M := \sup_{s \in [0, t_0]} \|T(s)\|$ . Következésképpen, a spektrálsugárra

$$r(V) = 0.$$



*Bizonyítás.* Következik a skalár értékű Volterra-operátorra vonatkozó megfelelő állításból, így nem részletezzük.  $\square$

A legutóbbi állításból következik, hogy  $1 \in \rho(V)$ , és az

$$R(1, V) = (\text{Id} - V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n$$

Neumann-féle sorelőállítás érvényes. Az (IE) integrálegyenletet a Volterra-operátor segítségével

$$T(\cdot) = (\text{Id} - V)S(\cdot)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $T(\cdot), S(\cdot) \in \mathcal{X}_{t_0}$ . Így kapjuk, hogy

$$(3.5) \quad S(\cdot) = R(1, V)T(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n T(\cdot),$$

ahol a sor az  $\mathcal{X}_{t_0}$  térben konvergál. Átírva a (3.5) végtelen sort tetszőleges  $t \in [0, t_0]$ -ra az  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz egy előállítását kapjuk. A kapott végtelen sort szokás *Dyson–Phillips-sornak* nevezni.

**3.6. Tétel.** *Legyen  $(S(t))_{t \geq 0}$  az  $A+B$  operátor által generált félcsoporthoz, ahol  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz generátora az  $X$  Banach-téren, és legyen  $B \in \mathcal{L}(X)$ . Ekkor*

$$(3.6) \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t),$$

ahol  $S_0(t) = T(t)$ ,

$$(3.7) \quad S_{n+1}(t) := V S_n(t) = \int_0^t T(t-s) B S_n(s) ds.$$

A (3.6) Dyson–Phillips-sor az  $\mathcal{L}(X)$  operátornormájában konvergens, és mivel a 3.5. Lemmában  $t_0$ -t tetszőlegesen nagynak választhatjuk, a konvergencia  $\mathbb{R}_+$  kompakt intervallumain egyenletes. Másrészt, a (3.7) definícióban az integrál pontonként, azaz az erős topológiában értendő.

A Dyson–Phillips-sor és az (IE) integrálegyenlet lehetővé teszi az eredeti és a perturbált félcsoporthoz kvalitatív tulajdonságainak összehasonlítását.

**3.7. Következmény.** Legyenek  $(T(t))_{t \geq 0}$  és  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthok, ahol  $(S(t))_{t \geq 0}$  generátora a  $(T(t))_{t \geq 0}$  generátorának egy korlátos perturbációja. Ekkor létezik olyan  $M \geq 0$  konstans, hogy

$$(3.8) \quad \|T(t) - S(t)\| \leq tM,$$

ha  $t \in [0, 1]$ .

*Bizonyítás.* Az (IE) integrálegyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|T(t)x - S(t)x\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)BS(s)x\| ds \\ &\leq t \sup_{r \in [0,1]} \|T(r)\| \sup_{s \in [0,1]} \|S(s)\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

ha  $x \in X$ ,  $t \in [0, 1]$ . □

Most vizsgáljuk meg, hogy a 2.5. alfejezetben tárgyalt regularitási tulajdonságok közül melyek őrződnek meg a perturbált félcsoporthra.

**3.8. Állítás.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth az  $X$  Banach-téren, amelynek generátora  $(A, D(A))$ , és legyen  $B \in \mathcal{L}(X)$ . Ekkor

(a) Ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  analitikus, akkor az  $A + B$  által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoporth is az.

(b) Ha  $A$  kompakt rezolvensű, akkor  $A + B$  is az.

*Bizonyítás.*

(a) A 2.65. Tételhez hasonlóan meggondolható, hogy ha  $A$  analitikus félcsoporthot generál, akkor valamely  $\vartheta \in (0, \pi/2)$  számra az  $e^{\pm i\vartheta}A$  operátorok egy-egy erősen folytonos félcsoporth generátorai. Ha  $B \in \mathcal{L}(X)$ , akkor a 3.2. Tétel szerint  $e^{\pm i\vartheta}(A + B)$  is félcsoporthot generál. Ekkor létezik olyan  $\omega > 0$ , hogy az  $e^{\pm i\vartheta}(A + B - \omega)$  operátorok korlátos félcsoporthot generálnak. A 2.65. Tétel alapján ez ekvivalens azzal, hogy  $A + B - \omega$  korlátos analitikus félcsoporthot generál. A 2.60. Állításból pedig következik, hogy ekkor  $A + B$  egy analitikus félcsoporth generátora.

(b) Az állítás következik abból, hogy a (3.1) egyenlőség alapján  $R(\lambda, A + B)$  a kompakt  $R(\lambda, A)$  és a korlátos  $[\text{Id} - BR(\lambda, A)]^{-1}$  operátorok szorzata. □

Az alábbi két állítás a konvolúció és a Dyson–Phillips-sor tulajdonságaiból adódik, a bizonyításokat itt nem részletezzük.

**3.9. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  normafolytonos (vagy kompakt) félcsoport az  $X$  Banach-téren, amelynek generátora  $(A, D(A))$ , és legyen  $B$  kompakt operátor. Ekkor az  $A + B$  által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoport is normafolytonos (illetve kompakt).*

**3.10. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  azonnal normafolytonos (vagy azonnal kompakt) félcsoport az  $X$  Banach-téren, amelynek generátora  $(A, D(A))$ , és legyen  $B \in \mathcal{L}(X)$ . Ekkor az  $A + B$  által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoport is azonnal normafolytonos (illetve azonnal kompakt).*

## 3.2. Kontraktív és analitikus félcsoportok perturbációi

Ha  $D(A) \cap D(B)$  túl kicsi (a lezártja nem sűrű altér  $X$ -ben), akkor nem reménykedhetünk benne, hogy  $A + B$  (alkalmas kiterjesztése) generátor lesz. Az alábbiakban nem a korlátosságot tesszük fel  $B$ -ről, hanem csak annyit, hogy „elég közel van” az  $A$  operátorhoz.

**3.11. Definíció.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  lineáris operátor az  $X$  Banach-téren. Azt mondjuk, hogy a  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  operátor *(relatív)  $A$ -korlátos*, ha  $D(A) \subset D(B)$ , és léteznek olyan  $a, b > 0$  konstansok, amelyekre minden  $x \in D(A)$  esetén

$$(3.9) \quad \|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|.$$

A  $B$  operátor  *$A$ -korlátja*

$$a_0 := \inf\{a \geq 0 : \text{létezik olyan } b > 0, \text{ amelyre (3.9) fennáll}\}.$$

A következőkben bizonyítás nélkül mondunk ki két tételt  $A$ -korlátos perturbációkról.

**3.12. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy kontrakció-félcsoport generátora, és tegyük fel, hogy  $a$   $(B, D(B))$  operátor disszipatív, és  $A$ -korlátos  $a_0 < 1$   $A$ -korláttal. Ekkor  $(A + B, D(A))$  is kontrakció-félcsoportot generál.*

**3.13. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy analitikus félcsoporth generátora. Ekkor létezik olyan  $\alpha > 0$  szám, hogy minden olyan  $B$   $A$ -korlátos operátor esetén, amelynek  $A$ -korlátja  $a_0 < \alpha$ , az  $(A + B, D(A))$  operátor is analitikus félcsoporthot generál.*

A következő definíció olyan  $B$  operátorokról szól, amelyek kompaktak  $X_1^A$ -n.

**3.14. Definíció.** *Legyen  $(A, D(A))$  zárt operátor az  $X$  Banach-téren. Azt mondjuk, hogy a  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  operátor (relatív)  $A$ -kompakt, ha  $D(A) \subset D(B)$ , és  $B : X_1 \rightarrow X$  kompakt, ahol  $X_1^A = (D(A), \|\cdot\|_A)$  a gráf-normával ellátott  $D(A)$  Banach-tér.*

**3.15. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren, és tegyük fel, hogy a  $B$  operátor  $A$ -kompakt. Ha  $X$  reflexív vagy  $B$  lezárható, akkor az alábbiak teljesülnek.*

- (a) *Ha  $A$  és  $B$  disszipatív is, akkor  $(A + cB, D(A))$  kontrakció-félcsoporthot generál  $X$ -en minden  $c > 0$  esetén.*
- (b) *Ha az  $A$  által generált félcsoporth analitikus, akkor  $(A + cB, D(A))$  analitikus félcsoporthot generál  $X$ -en minden  $c \in \mathbb{C}$  esetén.*

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

### 3.3. További perturbációk

Az eddigi perturbációs tételek  $A + B$  rezolvensének explicit alakján (ld. a (3.1) egyenlőséget) és a Hille–Yosida-tételen múltak. Ez a megközelítés azonban csak nagyon speciális perturbációk esetén működik (ha a perturbáló operátor korlátos, vagy a perturbálandó félcsoporth kontraktív ill. analitikus). A továbbiakban néhány olyan perturbációs tételt mondunk ki, amelyek az (IE) ill. (IE\*) integrálegyenleteken alapulnak, és ezáltal különféle nemkorlátos perturbációk esetén is jól használhatók. Mielőtt ezekre rátérnénk, szükségünk lesz bizonyos Szoboljev-terek ismeretére.

#### 3.3.1. Kis kitérő a Szoboljev-tornyok felé

Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren. Átskálázás után feltehető, hogy  $\omega_0 < 0$ , tehát  $A$  invertálható, azaz létezik  $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ . Az alábbiakban minden  $n$ -re bevezetünk egy új normát  $D(A^n)$ -en.

**3.16. Definíció.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in D(A^n)$ . Ekkor definiálja

$$\|x\|_n := \|A^n x\|,$$

és legyen

$$X_n = X_n^A := (D(A^n), \|\cdot\|_n)$$

a  $(T(t))_{t \geq 0}$ -hez tartozó  $n$ -edik Szoboljev-tér. A  $T(t)$  operátorok megszorítását jelölje

$$T_n(t) := T(t)|_{X_n}.$$

Kiderül, hogy a  $T_n(t)$  operátorok nagyon jól viselkednek  $X_n$ -en.

**3.17. Állítás.** A 3.16. Definícióban szereplő terekre és operátorokra az alábbiak teljesülnek.

(a) Minden  $n$ -re  $X_n$  Banach-tér.

(b) A  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  egy erősen folytonos félcsoport  $X_n$ -en.

(c) A  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoport  $A_n$  generátora az  $A$  operátor része  $X_n$ -en, vagyis

$$\begin{aligned} D(A_n) &= \{x \in X_n : Ax \in X_n\} = D(A^{n+1}) = X_{n+1}, \\ A_n x &= Ax, \quad x \in D(A_n). \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Az állítást elegendő  $n = 1$ -re megmutatni, utána indukcióval következik.

(a) Mivel  $A$  zárt operátor, ezért az  $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$  gráf-normával  $(D(A), \|\cdot\|_A)$  Banach-tér. Megmutatjuk, hogy  $\|\cdot\|_1$  ekvivalens  $\|\cdot\|_A$ -val, amiből az állítás következik. Nyilván:

$$\begin{aligned} \|x\|_A &= \|x\| + \|Ax\| = \|A^{-1}Ax\| + \|Ax\| \leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|x\|_1 \\ &\leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|x\|_A, \end{aligned}$$

ha  $x \in X_1 = D(A)$ .

(b) A 2.4. Lemma (b) pontja alapján  $T(t)$  önmagába képezi  $X_1$ -et. Másrészt,  $T_1(t)$  korlátos operátor  $X_1$ -en, hiszen

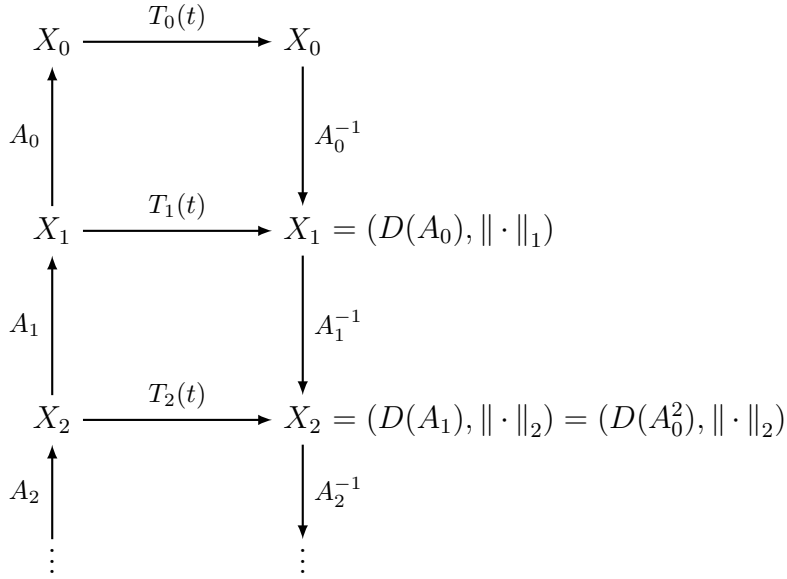
$$\|T_1(t)x\|_1 = \|AT(t)x\| = \|T(t)Ax\| \leq \|T(t)\| \cdot \|x\|_1, \quad x \in X_1,$$

tehát  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoportot alkot  $X_1$ -en. Az erős folytonosság következik abból, hogy

$$\|T_1(t)x - x\|_1 = \|T(t)Ax - Ax\| \rightarrow 0, \quad t \downarrow 0, \quad x \in X_1.$$

(c) A 2.2.1. alpontból következik.  $\square$

A fenti tereket és félcsoporthoz tartozó  $n$ -edrendű Szoboljev-terek a 3.1. ábra szemlélteti. Ehhez gondoljuk meg, hogy  $A_n$  izometria is  $X_{n+1}$ -ből  $X_n$ -be. Vezessük be az  $X_0 := X$ ,  $T_0(t) := T(t)$  és  $A_0 := A$  jelöléseket.



3.1. ábra. A  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz tartozó  $n$ -edrendű Szoboljev-terek,  $n \geq 0$

Vegyük észre, hogy  $X_{n+1} \subset X_n$  sűrű altér, másrészt  $X_{n+1}$  izometrikusan izomorf  $X_n$ -el az  $A_n$  operátor által. Hasonlóan, a  $(T_{n+1}(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz egyrészt a  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz megszorítása, másrészt hasonló hozzá.

**3.18. Következmény.** Az összes  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz hasonló egymáshoz. Pontosabban,

$$T_{n+1}(t) = A_n^{-1} T_n(t) A_n = T_n(t)|_{X_n}, \quad n \geq 0.$$

Emiatt a  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz tartozó spektrumai, spektrálkorlátjai, növekedési korlátjai, stb. mind megegyeznek.

A fenti konstrukció során az  $n + 1$ -edik Szoboljev-teret az  $n$ -edik Szoboljev-térből definiáltuk. Mivel  $X_{n+1}$  sűrű  $X_n$ -ben, ezért az eljárást megfordíthatjuk azáltal, hogy  $X_n$ -et  $X_{n+1}$ -ből nyerjük az

$$\|x\|_n := \|A_{n+1}^{-1} x\|_{n+1}$$

norma teljessé tételével. Ezt továbbgondolva a fenti diagramot egy két  r nyban végtelen diagramm  bővíthetjük, az *extrapolációs* vagy negatív rendű Szoboljev-terek bevezetésével.

**3.19. Definíció.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Tegyük fel, hogy az  $(X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n+1})$  teret és a rajta értelmezett  $(T_{-n+1}(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot már definiáltuk. Legyen  $A_{-n+1}$  a  $(T_{-n+1}(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátora. Ekkor legyen egy  $x \in X_{-n+1}$  vektor esetén

$$\|x\|_{-n} := \|A_{-n+1}^{-1}x\|_{-n+1},$$

 s legyen az

$$X_{-n} := (X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n})^\sim$$

teljessé tétel a  $(T(t))_{t \geq 0}$ -hez tartozó  $-n$ -edrendű Szoboljev-t r. Legyen továbbá  $(T_{-n}(t))_{t \geq 0}$  a  $(T_{-n+1}(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport  $X_{-n}$ -re váló folytonos kiterjesztése,  $A_{-n}$  pedig a  $(T_{-n}(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátora.

Vegyük észre, hogy a  $T_{-n}(t)$  operátorok hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a 3.17.  ll tásban, ezért az ott elmondottak érvényesek minden  $n \in \mathbb{Z}$  esetén is.

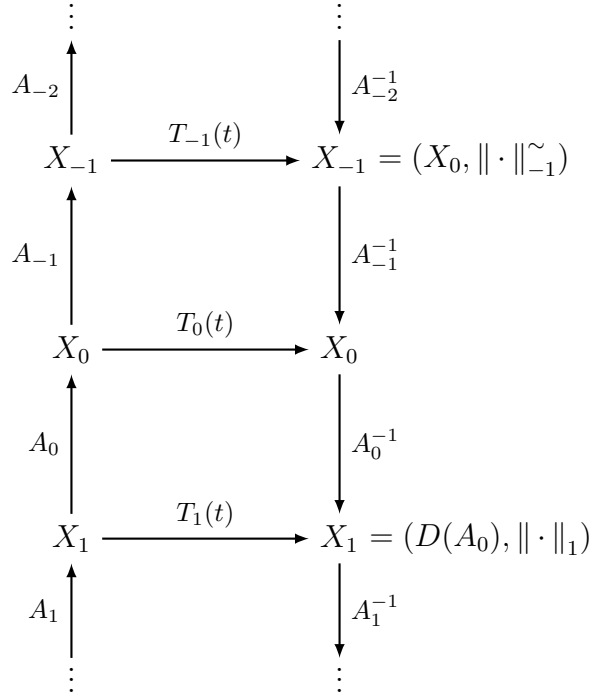
**3.20. Tétel.** A fenti definícióban szereplő terekre és operátorokra az alábbiak teljesülnek minden  $m \geq n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  esetén.

- (a)  $X_n$  Banach-tér, amely  $X_m$ -et sűrű alt rk nt tartalmazza.
- (b) A  $T_n(t)$  operátorok egy  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot alkotnak  $X_n$ -en.
- (c) A  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoport  $A_n$  generátorának értelmezési tartománya  $D(A_n) = X_{n+1}$  és  $A_n$  az  $A_m : X_{m+1} \rightarrow X_m$  operátor egyértelmű f lytonos kiterjesztése  $X_{n+1}$ -r l  $X_n$ -re.

*Bizonyítás.* Nem bizony jtjuk, hasonlóan megy, mint a 3.17.  ll t s bizonyítása.  $\square$

Így tehát Banach terek és rajtuk értelmezett félcsoportok k t  r nyban végtelen sorozatát hoztuk létre, amelyet a következő 3.2.  bra szemléltet. Ezt a konstrukciót *Szoboljev-torony*nak is szokás nevezni. Vegyük észre, hogy a torony bármely  $k \in \mathbb{Z}$  szintjéről indulva ugyanazt a Banach-tér- ill. félcsoport-sorozatot nyerjük. Továbbá, tetszőleges  $X_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) térre igaz, hogy – izomorfizmust l eltekintve – az  $X_m$  altérnek teljessé tétele,  $m \geq n$  esetén.

Szor sf lcsoportok esetén az összes Szoboljev-t r könnyen azonosítható egy-egy konkrét f ggv nyt rrel.



3.2. ábra. A  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz tartozó  $n$ -edrendű Szoboljev-terek,  $n \in \mathbb{Z}$

**3.21. Példa.** Legyen  $X_0 := C_0(\Omega)$ , a  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olyan folytonos függvény, amelyre  $\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < 0$ . Ahogy az 1.4.1. alponban bevezettük, definiálja

$$M_q f := q \cdot f$$

a  $q$ -val való szorzásoperátort, és

$$T_q(t)f := e^{qt} \cdot f, \quad t \geq 0, f \in X_0$$

a megfelelő szorzásfélcsoportot. Ekkor az  $X_0 = C_0(\Omega)$  és  $X_n$  Szoboljev-terek minden  $n \in \mathbb{Z}$  esetén az

$$X_n = \{q^{-n} \cdot f : f \in X_0\} = \{g \in C(\Omega) : q^n \cdot g \in X_0\}$$

módon adhatók meg.

Hasonló állítás igaz, ha az

$$X_0 = L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty$$



térből indulunk, és olyan  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető függvényt tekintünk, amelyre  $\sup \operatorname{Re} q < 0$ , ld. az 1.4.2. alpontot. Ekkor a megfelelő módon definiálva a szorzásfélcsoportot, kapjuk, hogy

$$X_n = L^p(\Omega, |q|^{np} \cdot \mu), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### 3.3.2. Desch–Schappacher-perturbáció

Ebben az alpontban olyan perturbációkkal foglalkozunk, amelyek a 3.3. Következményben szereplő (IE) kontansvariációs formula általánosításán alapulnak.

Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren, és tekintsük a 3.3.1. alpontban bevezetett  $(T_{-1}(t))_{t \geq 0}$  extrapolált félcsoportot az  $X_{-1}$  Banach-téren. Ahogy a (3.3) egyenletben, definiáljuk az

$$\mathcal{X}_{t_0} := C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$$

függvényteret, amely olyan  $F : [0, t_0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvényeket tartalmaz, amelyekre a  $t \mapsto F(t)x$  leképezés minden  $x \in X$  esetén folytonos. Az  $\mathcal{X}_{t_0}$  tér Banach-tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s \in [0, t_0]} \|F(s)\|$$

normával. Ezen a téren definiáljuk egy adott  $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$  operátor esetén a  $V_B$  *absztrakt Volterra-operátort* (ld. a 3.4. Definíciót) mint  $V_B : \mathcal{X}_{t_0} \rightarrow \mathcal{X}_{t_0}$  operátort, amelyre

$$(V_B F)(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)BF(s) \, ds \in \mathcal{L}(X, X_{-1}),$$

$F \in \mathcal{X}_{t_0}$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , és az integrál erős értelemben (pontonként) konvergál  $X_{-1}$ -en. Tegyük fel, hogy minden  $F \in \mathcal{X}_{t_0}$  esetén

1.  $\operatorname{ran}((V_B F)(t)) \subset X$ ,  $t \in [0, t_0]$ ,
2. a  $[0, t_0] \ni t \mapsto (V_B F)(t)x$  leképezés folytonos minden  $x \in X$  esetén,
3.  $V_B$  korlátos operátor  $\mathcal{X}_{t_0}$ -on, és  $\|V_B\| < 1$ .

**3.22. Definíció.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport az  $X$  Banach-téren, és legyen  $(A, D(A))$  a generátora. Ekkor definiálja

$$\mathcal{S}_{t_0}^{DS} := \{B \in \mathcal{L}(X, X_{-1}) : V_B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \|V_B\| < 1\},$$

vagyis olyan operátorok halmazát, amelyek kielégítik a fenti 1 – 3. feltételeket. Ekkor  $\mathcal{S}_{t_0}^{DS}$  az  $A$  Desch–Schappacher-perturbációit tartalmazza.

**3.23. Tétel.** *Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora az  $X$  Banach-téren. Ha  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$  valamely  $t_0 > 0$  esetén, akkor az*

$$(A_{-1} + B)|_X, \quad D((A_{-1} + B)|_X) := \{x \in X : A_{-1}x + Bx \in X\}$$

*egy erősen folytonos félcsoport generátora  $X$ -en.*

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

A perturbált operátor által generált félcsoportra hasonló reprezentációk érvényesek, mint a korlátos perturbációk esetében.

**3.24. Következmény.** *Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$  valamely  $t_0 > 0$  esetén. Ekkor az  $(A_{-1} + B)|_X$  operátor által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoportra teljesül*

*(a) a konstansvariációs formula, vagyis*

$$(3.10) \quad S(t) = T(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s)BS(s) \, ds, \quad t \geq 0,$$

*ahol az integrál pontonként értendő az  $x \in X$  vektorokra;*

*(b) a Dyson–Phillips-sorelőállítás, vagyis*

$$(3.11) \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \quad t \in [0, t_0]$$

*ahol  $S_0(t) = T(t)$ ,*

$$(3.12) \quad S_{n+1}(t) := V_B S_n(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)BS_n(s) \, ds.$$

*Itt a (3.11) sor  $\mathcal{L}(X)$ -ben konvergencia, míg a (3.12) integrál az  $X$  erős topológiájában van értelmezve.*

A következőkben kimondunk két állítást bizonyítás nélkül, amelyek arról szólnak, hogy a  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$  feltételt hogyan lehet ellenőrizni konkrét esetekben.

**3.25. Következmény.** Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren, és legyen  $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ . Továbbá, tegyük fel, hogy léteznek  $t_0 > 0$  és  $q \in [0, 1)$  számok, amelyekre

1.  $\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s)Bf(s) \, ds \in X$  és
2.  $\left\| \int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s)Bf(s) \, ds \right\| \leq q \|f\|_\infty$

minden  $f \in C([0, t_0], X)$  esetén. Ekkor  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ , következésképp  $(A_{-1} + B)|_X$  egy erősen folytonos félcsoporth generátora  $X$ -en.

**3.26. Következmény.** Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ . Továbbá, tegyük fel, hogy léteznek  $t_0 > 0$  és  $p \in [1, \infty)$  számok, amelyekre

$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s)Bf(s) \, ds \in X$$

minden  $f \in L^p([0, t_0], X)$  esetén. Ekkor  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ , így  $(A_{-1} + B)|_X$  egy erősen folytonos félcsoporth generátora  $X$ -en.

### 3.3.3. Miyadera–Voigt-perturbáció

Ebben az alponthban olyan perturbációkkal foglalkozunk, amelyek a 3.3. Következmény után szereplő (IE\*) kontansvariációs formula általánosításán alapulnak, tehát valamilyen értelemben a Desch–Schappacher-féle perturbációk duálisai.

Kiindulási pontunk ismét a

$$\mathcal{X}_{t_0} := C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$$

függvénytér, amely olyan  $F : [0, t_0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvényeket tartalmaz, amelyekre a  $t \mapsto F(t)x$  leképezés minden  $x \in X$  esetén folytonos, és a tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s \in [0, t_0]} \|F(s)\|$$

normával Banach-tér. Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth az  $X$  Banach-téren, és tekintsünk most egy  $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$  operátort. Definíáljuk a  $V_B^*$  absztrakt Volterra-operátort (ld. a 3.4. Definíciót) mint  $V_B^* : \mathcal{X}_{t_0} \rightarrow \mathcal{X}_{t_0}$  operátort, amelyre

$$(V_B^*F)(t) := \int_0^t F(s)BT(t-s) \, ds \in \mathcal{L}(X_1, X),$$

$F \in \mathcal{X}_{t_0}$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , és az integrál erős értelemben (pontonként) konvergál  $X_1$ -en. Tegyük fel, hogy minden  $F \in \mathcal{X}_{t_0}$  esetén

1. az  $(V_B^*F)(t) : X_1 \subset X \rightarrow X$  operátor kiterjeszthető egy  $\overline{(V_B^*F)(t)} : X \rightarrow X$  korlátos operátorra,
2. a  $[0, t_0] \ni t \mapsto \overline{(V_B^*F)(t)}$  leképezés erősen folytonos  $X$ -en, tehát  $V_B^* : \mathcal{X}_{t_0} \rightarrow \mathcal{X}_{t_0}$ ,
3.  $\overline{V_B^*}$  korlátos operátor  $\mathcal{X}_{t_0}$ -on, és  $\|\overline{V_B^*}\| < 1$ .

**3.27. Definíció.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz az  $X$  Banach-téren, és legyen  $(A, D(A))$  a generátora. Ekkor definiáljuk

$$\mathcal{S}_{t_0}^{MV} := \{B \in \mathcal{L}(X_1, X) : \overline{V_B^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \|\overline{V_B^*}\| < 1\}$$

az olyan operátorok halmazát, amelyek kielégítik a fenti 1 – 3. feltételeket. Ekkor  $\mathcal{S}_{t_0}^{MV}$  az  $A$  Miyadera–Voigt-perturbációit tartalmazza.

Az alábbi perturbációs tétel a 3.23. Tétel analogonja.

**3.28. Tétel.** Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz generátora az  $X$  Banach-téren. Ha  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$  valamely  $t_0 > 0$  esetén, akkor az

$$A + B, \quad D(A + B) = D(A)$$

operátor egy erősen folytonos félcsoporthoz generátora  $X$ -en.

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

A Miyadera–Voigt-perturbációkra is érvényesek a korábban látott reprezentációk.

**3.29. Következmény.** Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz generátora az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$  valamely  $t_0 > 0$  esetén. Ekkor az  $A + B$  operátor által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz teljesül

(a) a konstansvariációs formula, vagyis

$$(3.13) \quad S(t)x = T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)x \, ds, \quad t \geq 0, \quad x \in D(A),$$

(b) a Dyson–Phillips-sorelóállítás, vagyis

$$(3.14) \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (V^n T)(t), \quad t \in [0, t_0],$$

ahol  $V := \overline{V_B^*}$ .

A következő állítás a konkrét példákban ellenőrizhető ún. Miyadera–Voigt-feltételről szól, amelyből következik, hogy  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$ , tehát  $A + B$  generátor.

**3.30. Állítás.** *Legyen  $A$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren,  $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$ , amelyre valamely  $q \in [0, 1)$  esetén*

$$\int_0^{t_0} \|BT(s)x\| \, ds \leq q\|x\|, \quad x \in D(A).$$

*Ekkor  $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$ , így  $A + B$  egy erősen folytonos félcsoporth generátora  $X$ -en.*

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

## 3.4. Félcsoporthok approximációja

Ha egy bonyolultabb operátort és az általa generált félcsoporthot akarunk vizsgálni, akkor a perturbáció mellett a félcsoporthok approximációjához nyúlhatunk. A 2.30. Hille–Yosida-tételben definiáltuk a korlátos operátorokból álló Yosida-approximációt mint az

$$A_n := nAR(n, A), \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokból álló sorozatot, amelyek az  $(e^{tA_n})_{t \geq 0}$  egyenletesen folytonos félcsoporthokat generálják. Felhasználva, hogy  $A_n \rightarrow A$  pontonként  $D(A)$ -n (ld. a 2.29. Lemma (ii) pontját) kapjuk, hogy a félcsoporthok is konvergálnak, tehát

$$e^{tA_n} \rightarrow T(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ebben a fejezetben szisztematikusan fogjuk megvizsgálni, hogy hogyan függ össze a félcsoporthok, generátoraik, ill. azok rezolvensseinek konvergenciája. A következő példák mutatják, hogy a kérdésfelvetés korántsem triviális.

**3.31. Példa.** Legyen  $X = c_0$  a nullsorozatok tere, és tekintsük az

$$A(x_k) := (ikx_k)$$

szorzásoperátort

$$D(A) := \{(x_k) \in c_0 : (ikx_k) \in c_0\}$$

értelmezési tartománnyal. Az 1.35. Állítás alapján ismeretes, hogy  $(A, D(A))$  egy erősen folytonos  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthat generál, amelyre

$$T(t)(x_k) = (e^{ikt}x_k), \quad t \geq 0.$$

Ha  $A$ -t perturbáljuk a

$$P_n(x_k) := (0, \dots, 0, nx_n, 0, \dots)$$

korlátos operátorokkal, akkor az

$$A_n := A + P_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokat kapjuk. Ezek a 3.2. Tétel alapján egy-egy erősen folytonos  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthat generálnak, és minden  $x = (x_k) \in D(A)$  elem esetén

$$\|A_n x - Ax\| = \|P_n x\| = n|x_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Azonban a  $(T_n(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthat nem konvergálnak, hiszen

$$T_n(t)(x_k) = (e^{it}x_1, e^{i2t}x_2, \dots, e^{(in+n)t}x_n, e^{i(n+1)t}x_{n+1}, \dots),$$

tehát

$$\|T_n(t)\| \geq e^{nt}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0.$$

Ezért az egyenletes korlátosság tétele miatt létezik olyan  $x \in X$ , amelyre  $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$  nem konvergál.

**3.32. Példa.** Legyen  $A_n := -n \cdot \text{Id}$ , egy  $X \neq \{0\}$  Banach-téren. Ekkor az

$$R(\lambda, A_n) := \frac{1}{\lambda + n} \cdot \text{Id}, \quad n \in \mathbb{N}$$

rezolvensoperátoroknak létezik limesze,

$$R(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A_n),$$

amelyre  $R(\lambda) \equiv 0$ , tehát a limesz nem lehet rezolvensoperátor.

### 3.4.1. Pszeudorezolvenssek

Ebben az alponban operátorok olyan családjait vizsgáljuk, amelyek teljesítik a (4.3) rezolvens egyenlőséget.

**3.33. Definíció.** Legyen  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  számhalmaz, és tekintsünk egy  $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  operátorcsaládot. Azt mondjuk, hogy a  $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  operátorcsalád *pszeudorezolvens*, ha

$$(3.15) \quad \mathcal{R}(\lambda) - \mathcal{R}(\mu) = (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\mu), \quad \lambda, \mu \in \Lambda.$$

A 3.32. Példában szereplő  $\{R(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$  limeszoperátorok (triviális) pszeudorezolvenst alkotnak, de mivel nem injektívek, ezért nem lehetnek rezolvensoperátorok. A következő állításban egy fontos példát látunk pszeudorezolvensre.

**3.34. Állítás.** *Legyenek az  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  operátorok kontrakció-félcsoportok generátorai  $X$ -en, és tegyük fel, hogy valamely  $\lambda_0 > 0$  esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_0, A_n)x$$

*létezik minden  $x \in X$  elemre. Ekkor*

$$R(\lambda)x := \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A_n)x, \quad x \in X$$

*egy  $\{R(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$  pszeudorezolvenst definiál a jobb félsíkon.*

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

Célunk – amely majd a félcsoport-approximációs tételek bizonyításában lényeges elem lesz –, hogy feltételeket találjunk arra, mikor lesz egy pszeudorezolvens valamely zárt operátor rezolvensoperátoraival egyenlő. Mielőtt azonban erre rátérnénk, a pszeudorezolvensnek néhány fontos tulajdonságával ismerkedünk meg.

**3.35. Lemma.** *Legyen  $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  pszeudorezolvens  $X$ -en. Ekkor minden  $\lambda, \mu \in \Lambda$  esetén*

(a)  $\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}(\mu)\mathcal{R}(\lambda)$ , *vagyis az operátorok felcserélhetők;*

(b)  $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \ker \mathcal{R}(\mu)$ ;

(c)  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda) = \text{ran } \mathcal{R}(\mu)$ .

*Bizonyítás.* (a) Következik a (3.15) egyenletből.

(b) és

(c) Átírva a (3.15) egyenletet kapjuk, hogy

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\mu) [\text{Id} + (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)] = [\text{Id} + (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)] \mathcal{R}(\mu).$$

Ebből adódik, hogy  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda) \subset \text{ran } \mathcal{R}(\mu)$  és  $\ker \mathcal{R}(\mu) \subset \ker \mathcal{R}(\lambda)$ . A szimmetria miatt a fordított tartalmazások is teljesülnek.  $\square$

Tehát ha megköveteljük, hogy valamely  $\lambda \in \Lambda$  esetén  $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$  és  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda)$  sűrű legyen, akkor ez a pszeudorezolvens minden elemére igaz lesz. Az alábbi állítás azt mondja, hogy ilyen esetben az operátorcsalád valamely zárt, sűrűn definiált operátor rezolvensoperátorainak részhalmaza.

**3.36. Állítás.** *Legyen  $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  pszeudorezolvens  $X$ -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik egy  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált operátor, amelyre  $\Lambda \subset \rho(A)$  és  $\mathcal{R}(\lambda) = R(\lambda, A)$  minden  $\lambda \in \Lambda$  esetén.*

(ii)  *$\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$  és  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda)$  sűrű  $X$ -ben valamely/minden  $\lambda \in \Lambda$  esetén.*

*Bizonyítás.* Elég megmutatni a (ii)  $\Rightarrow$  (i) irányt. Mivel  $\mathcal{R}(\lambda)$  injektív, ezért definiálhatjuk valamely  $\lambda_0 \in \Lambda$  esetén az

$$A := \lambda_0 - \mathcal{R}(\lambda_0)^{-1}$$

operátort, amely zárt lesz, és  $D(A) = \text{ran } \mathcal{R}(\lambda_0)$  sűrű. Ekkor

$$(\lambda_0 - A)\mathcal{R}(\lambda_0) = \text{Id}$$

és

$$\mathcal{R}(\lambda_0)(\lambda_0 - A)x = x \quad \text{minden } x \in D(A) \text{ esetén.}$$



Tehát  $\mathcal{R}(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$ . Ha  $\lambda \in \Lambda$  tetszőleges, akkor a (3.15) egyenlet alapján

$$\begin{aligned} (\lambda - A)\mathcal{R}(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]\mathcal{R}(\lambda) \\ &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]\mathcal{R}(\lambda_0)[\text{Id} - (\lambda - \lambda_0)\mathcal{R}(\lambda)] \\ &= \text{Id} + (\lambda - \lambda_0)[\mathcal{R}(\lambda_0) - \mathcal{R}(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\lambda_0)] \\ &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Hasonlóan látható, hogy  $\mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A)x = x$  is teljesül minden  $x \in D(A)$  esetén. Ebből következik, hogy  $\mathcal{R}(\lambda) = R(\lambda, A)$  minden  $\lambda \in \Lambda$  esetén, és adódik az is, hogy  $A$  definíciója nem függ  $\lambda_0$  választásától.  $\square$

Az alábbiakban egy hasznos elégséges feltételt adunk arra, hogy mikor teljesül a fenti állítás (ii) pontja.

**3.37. Következmény.** *Legyen  $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  pseudorezolvens  $X$ -en, és tegyük fel, hogy  $\Lambda$  tartalmaz egy  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nemkorlátos sorozatot. Ha*

$$(3.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = x \quad \text{minden } x \in X\text{-re,}$$

*akkor  $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  egy zárt, sűrűn definiált operátor rezolvensoperátoraiból áll. A (3.16) feltétel fennáll például akkor, ha  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda)$  sűrű  $X$ -ben és létezik olyan  $M > 0$  konstans, hogy*

$$(3.17) \quad \|\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)\| \leq M \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a (3.16) feltétel teljesül. Ekkor a 3.35. Lemma (c) pontja szerint tetszőleges  $\lambda \in \Lambda$  esetén

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{ran } \mathcal{R}(\lambda_n)} = \overline{\text{ran } \mathcal{R}(\lambda)},$$

tehát  $\text{ran } \mathcal{R}(\lambda)$  sűrű. Másrészt, ha  $x \in \ker \mathcal{R}(\lambda)$ , akkor

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = 0,$$

vagyis  $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$  is igaz. Így az első állítás a 3.36. Állítás (ii) pontjából következik. A (3.17) becslés alapján

$$\|\mathcal{R}(\lambda_n)\| \leq \frac{M}{|\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tehát  $\|\mathcal{R}(\lambda_n)\| \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . A (3.15) egyenlőség miatt tetszőleges  $\mu \in \Lambda$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n) - \text{Id})\mathcal{R}(\mu)\| = 0,$$

vagyis ha  $x \in \text{ran } \mathcal{R}(\mu)$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = x.$$

Mivel  $\text{ran } \mathcal{R}(\mu)$  sűrű a feltétel szerint, a (3.17) alapján pedig a  $\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  operátorok egyenletesen korlátosak, ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt (3.16) következik.  $\square$

### 3.4.2. Approximációs tételek

Ebben az alponban félcsoporthok, generátoraik és azok rezolvensének pontonkénti konvergenciájával foglalkozunk.

Az első eredmény arról az esetről szól, amikor tudjuk, hogy a generátorok limesze is generátor.

**3.38. Tétel** (Első Trotter–Kato approximációs tétel, 1958–59). *Legyenek  $(T(t))_{t \geq 0}$  és  $(T_n(t))_{t \geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  erősen folytonos félcsoporthok  $X$ -en, amelyek generátorai  $A$  ill.  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tegyük fel, hogy léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $w \in \mathbb{R}$  számok, amelyekre*

$$\|T(t)\|, \|T_n(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Legyen  $D$  az  $A$  lényeges része, és tekintsük az alábbi állításokat.*

(a)  *$D \subset D(A_n)$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén, és  $A_n x \rightarrow A x$ ,  $x \in D$ .*

(b) *Minden  $x \in D$  esetén létezik olyan  $x_n \in D(A_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sorozat, amelyre*

$$x_n \rightarrow x, \quad \text{és} \quad A_n x_n \rightarrow A x.$$

(c)  *$R(\lambda, A_n)x \rightarrow R(\lambda, A)x$ ,  $n \rightarrow \infty$  minden  $x \in X$  és valamely/minden  $\lambda > w$  esetén.*

(d)  *$T_n(t)x \rightarrow T(t)x$ ,  $n \rightarrow \infty$  minden  $x \in X$  esetén, kompakt intervallumokon  $t$ -ben egyenletesen.*

*Ekkor*

$$(a) \implies (b) \iff (c) \iff (d),$$

*(b)-ből általában nem következik (a).*

*Bizonyítás.* A bizonyítás elején átskálázás után feltesszük, hogy

$$\|T(t)\|, \|T_n(t)\| \leq M, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a)  $\Rightarrow$  (b) : Rögtön adódik, hiszen  $x_n := x$ ,  $n \in \mathbb{N}$  választható.

(b)  $\Rightarrow$  (c) : Legyen  $\lambda > 0$ . Mivel a 2.30. Hille–Yosida-tétel szerint

$$\|R(\lambda, A_n)\| \leq \frac{M}{\lambda}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ezért elég megmutatni, hogy

$$R(\lambda, A_n)y \rightarrow R(\lambda, A)y,$$

ha  $y$  eleme a  $(\lambda - A)D$  sűrű altérnek. Legyen  $x \in D$ , és legyen  $y := (\lambda - A)x$ . A (b) feltétel szerint létezik olyan  $x_n \in D(A_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sorozat, amelyre

$$x_n \rightarrow x, \quad \text{és} \quad A_n x_n \rightarrow Ax,$$

tehát

$$y_n := (\lambda - A_n)x_n \rightarrow y.$$

Így

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A)y\| &\leq \|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A_n)y_n\| + \|R(\lambda, A_n)y_n - R(\lambda, A)y\| \\ &\leq \|R(\lambda, A_n)\| \cdot \|y - y_n\| + \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(c)  $\Rightarrow$  (b) : Legyen  $x \in D$  tetszőleges és  $\lambda > 0$  rögzített. Ekkor  $x = R(\lambda, A)y$  alakú valamely  $y \in X$  elemre, legyen  $x_n := R(\lambda, A_n)y$ . Így

$$A_n x_n = A_n R(\lambda, A_n)y = \lambda R(\lambda, A_n)y - y,$$

és

$$Ax = \lambda R(\lambda, A)y - y,$$

tehát  $A_n x_n \rightarrow Ax$ .

(d)  $\Rightarrow$  (c) : A 2.17. Tétel szerint minden  $\lambda > 0$  és  $x \in X$  esetén

$$\|R(\lambda, A)x - R(\lambda, A_n)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x - T_n(t)x\| dt.$$

Az állítás a Lebesgue-féle dominált konvergenciátételből adódik.

(c)  $\Rightarrow$  (d) : Meglehetősen hosszadalmas, technikai bizonyítás, amely a pszeudorezolvens elméletét használja. Nem részletezzük.

Arra, hogy (b)-ből nem következik (a), létezik ellenpélda. □

A fenti tételben fel kellett tennünk, hogy az  $A$  limeszoperátor létezik és generátor. Az alkalmazásokban azonban leggyakrabban valamilyen módon közelíteni akarjuk  $A$ -t, és a közelítés tulajdonságaiból szeretnénk következtetni arra, hogy  $A$  generátor. Hasonlóan, az  $A$  által generált félcsoporthoz mint az  $A_n$  közelítő generátorok által generált félcsoporthoz limeszét szeretnénk megkapni. A következő tétel erről szól.

**3.39. Tétel** (Második Trotter–Kato approximációs tétel, 1958–59.). *Legyenek  $(T_n(t))_{t \geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  erősen folytonos félcsoporthoz  $X$ -en, amelyek generátorai  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tegyük fel, hogy léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $w \in \mathbb{R}$  számok, amelyekre*

$$\|T_n(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Legyen  $\lambda_0 > w$ , és tekintsük az alábbi állításokat.*

- (a) *Létezik egy  $(A, D(A))$  sűrűn definiált operátor, amelyre  $A_n x \rightarrow Ax$  minden  $x \in D$  esetén, ahol  $D$  az  $A$  lényeges része. Továbbá,  $(\lambda_0 - A)D$  sűrű  $X$ -ben.*
- (b) *Az  $R(\lambda_0, A_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  operátorok pontonként tartanak egy  $R \in \mathcal{L}(X)$  operátorhoz, amelyre  $\text{ran } R$  sűrű  $X$ -ben.*
- (c) *A  $(T_n(t))_{t \geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  félcsoporthoz pontonként (kompakt intervallumokon  $t$ -ben egyenletesen) konvergálnak egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz, amelynek generátora  $B$ , és  $R = R(\lambda_0, B)$  (ahol  $R$  a (b)-beli operátor).*

*Ekkor*

$$(a) \Rightarrow (b) \iff (c),$$

*és ha (a) fennáll, akkor  $B = \overline{A}$ .*

*Bizonyítás.* A bizonyítás elején átskálázás után feltesszük, hogy

$$\|T_n(t)\| \leq M, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a)  $\implies$  (b) : Mint a fenti bizonyításban, elegendő a konvergenciát  $(R(\lambda_0, A_n)y)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatokra bizonyítani, ahol  $y = (\lambda_0 - A)x$ ,  $x \in D$ . Ez pedig azért teljesül, mert

$$\begin{aligned} R(\lambda_0, A_n)y &= R(\lambda_0, A_n)[(\lambda_0 - A_n)x - (\lambda_0 - A_n)x + (\lambda_0 - A)x] \\ &= x + R(\lambda_0, A_n)(A_n x - Ax) \rightarrow x = Ry, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Továbbá,  $\text{ran } R$  tartalmazza  $D$ -t, tehát sűrű  $X$ -ben.

(b)  $\Rightarrow$  (c) : A 3.34. Állítás miatt a feltételből következik, hogy az

$$R(\lambda)x := \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A_n)x, \quad x \in X$$

módon definiált  $\{R(\lambda) : \lambda > 0\}$  operátorok léteznek, és pszeudorezolvenst alkotnak.

Továbbá, a 2.30. Hille–Yosida-tétel miatt  $\|\lambda R(\lambda, A_n)\| \leq M$ ,  $\lambda > 0$ , ezért

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq M, \quad \lambda > 0.$$

Mivel  $R(\lambda)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A_n)^k$  minden  $k \in \mathbb{N}$  természetes számra, ezért

$$\|\lambda^k R(\lambda)^k\| \leq M, \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

is teljesül. A feltétel szerint  $\text{ran } R(\lambda) = \text{ran } R(\lambda_0) = \text{ran } R$ , így  $\text{ran } R(\lambda)$  sűrű  $X$ -ben (minden  $\lambda > 0$  esetén). Tehát a 3.37. Következményből adódik, hogy létezik egy  $(B, D(B))$  zárt, sűrűn definiált operátor, amelyre  $R(\lambda) = R(\lambda, B)$ ,  $\lambda > 0$ . Az eddigiek alapján  $B$ -re teljesül a 2.30. Hille–Yosida-tétel feltételeinek megfelelő

$$\|\lambda^k R(\lambda, B)^k\| \leq M, \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

becslés, ezért  $B$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál  $X$ -en. Így alkalmazhatjuk a 3.38. Első Trotter–Kato-tétel (c)  $\Rightarrow$  (d) következtetését, miszerint a  $(T_n(t))_{t \geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  félcsoportok a kívánt módon tartanak  $(T(t))_{t \geq 0}$ -hez.

(c)  $\Rightarrow$  (b) : A 3.38. Első Trotter–Kato-tétel alapján adódik.

Végül megmutatjuk, hogy ha (a) fennáll, akkor  $B = \overline{A}$ . Mivel  $R(\lambda_0, B) = R$ , ezért

$$R(\lambda_0, B)(\lambda_0 - A)x = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_0, A_n)(\lambda_0 - A_n)x = x, \quad x \in D.$$

Mivel  $D$  az  $\overline{A}$ -nak is lényeges része, ezért

$$R(\lambda_0, B)(\lambda_0 - \overline{A})x = x, \quad x \in D(\overline{A})$$

is teljesül. Ebből következik, hogy  $\lambda_0$  nem approximatív sajátértéke  $\overline{A}$ -nak (ld. a 4.6. Definíciót). Továbbá, mivel  $\text{ran}(\lambda_0 - A)$  sűrű  $X$ -ben, ezért  $\lambda_0$  nem lehet reziduális spektrumpontja sem  $\overline{A}$ -nak (ld. a 4.9. Definíciót). Így szükségképpen  $\lambda_0 \in \rho(\overline{A})$  (ld. a (4.7) egyenlőséget), és  $R(\lambda_0, B) = R(\lambda_0, \overline{A})$ , tehát  $B = \overline{A}$  következik.  $\square$

A Második Trotter–Kato-tétel különösen nagy jelentőségű az alkalmazásokban: alapját képezi számos numerikus és operátorelméleti approximációs sémának. A következő alponban néhány ilyen példát nézünk meg.

### 3.4.3. Példák

A Trotter–Kato-tételek bizonyításának egyik fő eszköze a Hille–Yosida-tétel volt. Megfordítva, a Hille–Yosida-tételt egy approximációs séma segítségével bizonyítottuk.

**3.40. Példa** (Yosida-approximáció). Legyen  $(A, D(A))$  egy olyan operátor, amely a 2.30. Hille–Yosida-tétel (kontrakciós eset) (ii) feltételeit kielégíti. Ekkor minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén definiálhatjuk az

$$A_n := nAR(n, A) \in \mathcal{L}(X)$$

*Yosida-approximációt.* A 2.29. Lemma alapján az  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat  $D(A)$ -n pontonként tart  $A$ -hoz. Mivel a feltétel szerint  $\lambda - A$  szűrjejtív, ezért alkalmazhatjuk a 3.39. Második Trotter–Kato-tételt, és kapjuk, hogy létezik egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz, amelyre

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n}x, \quad x \in X,$$

és a félcsoporthoz generátora  $A$ . Ez természetesen egy „farkába harapó kígyó” érvelés.

A következő példában egy klasszikus tétel bizonyítunk újra.

**3.41. Példa** (Weierstrass approximációs tétel). Tekintsük az  $X := C_0(\mathbb{R})$  vagy  $X = C_{\text{ub}}(\mathbb{R})$  teret, és a rajta értelmezett baleltolás-félcsoporthoz:

$$(T(t)f)(s) := f(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ennek generátora

$$Af = f', \quad D(A) = \{f \in X : f' \in X\},$$

ld. a 2.2.2. alpontot. Definiálja az  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  korlátos operátorokat

$$A_n := \frac{T(1/n) - \text{Id}}{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor az  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  operátorokra az alábbiak teljesülnek:

1. kommutálnak a  $T(t)$  operátorokkal;
2. kontrakció-félcsoporthoz generálnak, hiszen

$$\|e^{tA_n}\| = \|e^{nt(T(1/n) - \text{Id})}\| \leq e^{-nt} e^{nt\|T(1/n)\|} = 1;$$

3. a derivált definíciója alapján

$$A_n f \rightarrow A f, \quad f \in D(A).$$

Így a 3.38. Első Trotter–Kato-tétel alapján

$$f(s+t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(s)$$

minden  $f \in X$  esetén, az  $s \in \mathbb{R}$  és  $t \in [0, 1]$  számokra egyenletesen. Legyen most  $s = 0$ . Egy alkalmasan választott részsorozatra való áttérés után feltehető, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0) - f(t) \right| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül minden  $t \in [0, 1]$  számra. Most válasszuk meg az  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  természetes számokból álló sorozatot úgy, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0) \right| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

legyen minden  $t \in [0, 1]$  pontban. Ez megtehető, hiszen a hatványfüggvényekből képezett végtelen sor is egyenletesen konvergens a  $[0, 1]$  intervallumon. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

polinomokból álló sorozatra

$$\left| \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0) - f(t) \right| < \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül minden  $t \in [0, 1]$  esetén, így következményként a jól ismert Weierstrass approximációs tételt kapjuk.

**3.42. Állítás.** Minden  $f \in X$  esetén létezik egy  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  természetes számokból álló sorozat, amelyre

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!} (A_n^k f)(0),$$

ahol a limesz  $[0, 1]$ -en egyenletes.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan kaphatunk többé-kevésbé explicit formulákat az approximált félcsoportra. Ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára.

**3.43. Lemma.** *Legyen  $S \in \mathcal{L}(X)$ , amelyre  $\|S^m\| \leq M$  teljesül valamely  $M \geq 1$  és minden  $m \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor*

$$(3.18) \quad \|e^{n(S-\text{Id})}x - S^n x\| \leq \sqrt{n}M\|Sx - x\|, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $n \in \mathbb{N}$  rögzítve. Ekkor

$$e^{n(S-\text{Id})} - S^n = e^{-n}(e^{nS} - e^n S^n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (S^k - S^n).$$

Legyen  $k > n$ , ekkor

$$S^k - S^n = \sum_{j=n}^{k-1} (S^{j+1} - S^j) = \sum_{j=n}^{k-1} S^j (S - \text{Id}),$$

és hasonló teleszkópikus összeg írható fel  $k < n$  esetén is. Így, mivel  $\|S^m\| \leq M$ , kapjuk, hogy

$$\|S^k x - S^n x\| \leq |n - k| \cdot M \|Sx - x\|, \quad k \in \mathbb{N}, x \in X.$$

Ennek segítségével az alábbi becsléssorozatot nyerjük

$$\begin{aligned} \|e^{n(S-\text{Id})}x - S^n x\| &\leq e^{-n}M\|Sx - x\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} |n - k| \\ &\leq e^{-n}M\|Sx - x\| \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (n - k)^2\right)^{1/2} \\ &= e^{-n}M\|Sx - x\| \cdot (e^n)^{1/2} (ne^n)^{1/2} \\ &= \sqrt{n}M\|Sx - x\|. \end{aligned}$$

A 2. sorban felhasználtuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, a 3-dikban pedig, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (n - k)^2 = ne^n.$$

□

A fent igazolt lemma és a Második Trotter–Kato-tétel segítségével kapjuk az alfejezet egyik legfontosabb eredményét.



**3.44. Tétel** (Chernoff-szorzatformula). *Tekintsünk egy*

$$V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

*függvényt, amelyre  $V(0) = \text{Id}$ , és amelyhez létezik olyan  $M \geq 1$  konstans, hogy*

$$\|[V(t)]^m\| \leq M$$

*minden  $t \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  esetén. Tegyük fel, hogy az*

$$Ax := \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(h)x - x}{h}$$

*limesz létezik minden  $x \in D \subset X$  elemre, ahol  $D$  és  $(\lambda_0 - A)D$  sűrű alterek  $X$ -ben valamely  $\lambda_0 > 0$  esetén. Ekkor  $\bar{A}$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat generál, amelyre*

$$(3.19) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} [V(t/n)]^n x, \quad x \in X,$$

*és a limesz  $[0, t_0]$ -on egyenletes.*

*Bizonyítás.* Minden  $s > 0$  számra definiáljuk a

$$A_s := \frac{V(s) - \text{Id}}{s} \in \mathcal{L}(X)$$

operátort. Ekkor  $A_s x \rightarrow Ax$  minden  $x \in D$  esetén, ha  $s \downarrow 0$ . Továbbá, az  $(e^{tA_s})_{t \geq 0}$  félcsoporthatokra

$$(3.20) \quad \|e^{tA_s}\| \leq e^{-t/s} \|e^{tV(s)/s}\| \leq e^{-t/s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \| [V(s)]^m \|}{s^m m!} \leq M, \quad t \geq 0.$$

Ezek alapján a 3.39. Második Trotter–Kato-tétel feltételei teljesülnek (ha a folytonos  $s > 0$  paraméter helyett  $n \in \mathbb{N}$  diszkrét paraméterre térünk át). Tehát  $\bar{A}$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat generál, amelyre

$$\|T(t)x - e^{tA_s}x\| \rightarrow 0, \quad x \in X, \text{ ha } s \downarrow 0$$

$[0, t_0]$ -on egyenletesen. Ezért

$$(3.21) \quad \|T(t)x - e^{tA_{t/n}}x\| \rightarrow 0, \quad x \in X, \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

$[0, t_0]$ -on egyenletesen. Másrészt, a 3.43. Lemma szerint

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad \left\| e^{tA_{t/n}}x - [V(t/n)]^n x \right\| &= \left\| e^{n(V(t/n) - \text{Id})}x - [V(t/n)]^n x \right\| \\
 &\leq \sqrt{n}M \|V(t/n)x - x\| \\
 &= \frac{tM}{\sqrt{n}} \|A_{t/n}x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

ha  $x \in D$ ,  $(0, t_0]$ -on egyenletesen. Mivel  $D$  sűrű és a (3.20) becslés, valamint feltétel szerint

$$\left\| e^{tA_{t/n}} - [V(t/n)]^n \right\| \leq 2M,$$

így az 1.51. Lemma (ii) pontja alapján a (3.22) konvergencia minden  $x \in X$  esetén fennáll. Ezért a (3.21) és a (3.22) határátmenetek felhasználásával

$$(3.23) \quad \|T(t)x - [V(t/n)]^n x\| \leq \|T(t)x - e^{tA_{t/n}}x\| + \|e^{tA_{t/n}}x - [V(t/n)]^n x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ha  $x \in X$ ,  $[0, t_0]$ -on egyenletesen. □

Átskálázással bizonyíthatjuk a Chernoff-szorzatformulát nemkorlátos esetre is.

**3.45. Következmény.** *Tekintsünk egy*

$$V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

*függvényt, amelyre  $V(0) = \text{Id}$ , és léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $w \in \mathbb{R}$  konstansok, hogy*

$$\|[V(t)]^k\| \leq M e^{kwt}, \quad t \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

*Tegyük fel, hogy az*

$$Ax := \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(h)x - x}{h}$$

*limesz létezik minden  $x \in D \subset X$  elemre, ahol  $D$  és  $(\lambda_0 - A)D$  sűrű alterek  $X$ -ben valamely  $\lambda_0 > w$  esetén. Ekkor  $\bar{A}$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthat generál, amelyre*

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} [V(t/n)]^n x, \quad x \in X,$$

*és a limesz  $[0, t_0]$ -on egyenletes. Továbbá,*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* A  $V(\cdot)$  függvény helyett tekintsük a

$$\tilde{V}(t) := e^{-wt}V(t)$$

függvényt, amelyre

$$\|[\tilde{V}(t)]^k\| \leq M, \quad t \geq 0, k \in \mathbb{N}$$

teljesül. Ennek 0-beli deriváltja  $A - w$ , így az állítás következik a 3.44. Tételből.  $\square$

A Chernoff-szorzatformula következő alkalmazásával explicit formulát nyerünk a félcsoporthoz a rezolvenssel való kifejezésére. Így teljessé válik a 2.1. ábra, megkapjuk a hiányzó nyilat, továbbá, megismerjük Hille eredeti bizonyítását a 2.30. Tételre.

**3.46. Következmény** (Post–Widder inverziós formula). *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz  $X$ -en, amelynek generátora  $(A, D(A))$ . Ekkor*

$$(3.24) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right) \right]^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \text{Id} - \frac{t}{n} A \right]^{-n} x, \quad x \in X$$

*kompakt intervallumokon  $t$ -ben egyenletesen. A fenti előállítást Post–Widder inverziós formulának hívjuk.*

*Bizonyítás.* Legyen  $M \geq 1$ ,  $w > 0$  olyan, hogy  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ ,  $t \geq 0$ . Definiáljuk valamely  $\delta \in (0, 1/w)$  pozitív számra

$$V(t) := \begin{cases} \text{Id}, & t = 0, \\ \frac{1}{t} R\left(\frac{1}{t}, A\right), & t \in (0, \delta), \\ 0, & t \geq \delta. \end{cases}$$

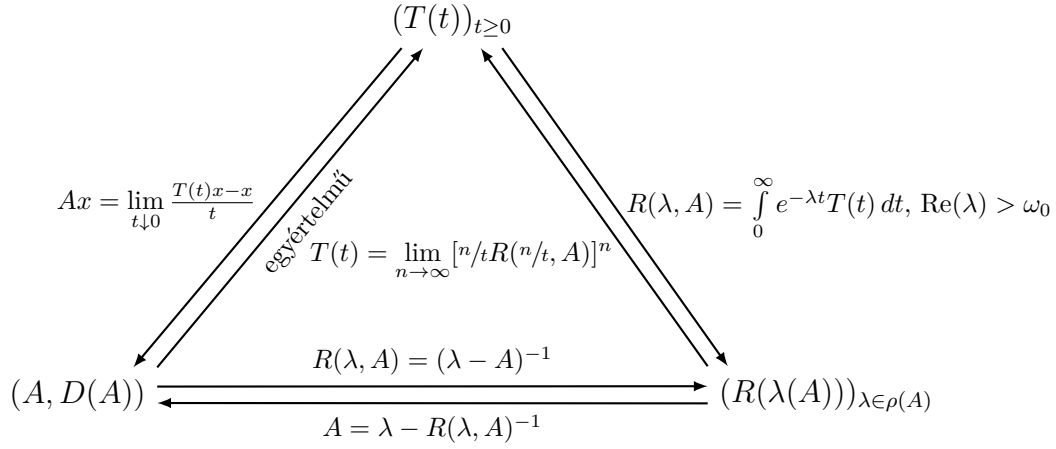
A kapott  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  függvényre a 2.33. Tétel alapján

$$\|V(t)^k\| \leq 1/t^k \|R(1/t, A)^k\| \leq \frac{M}{t^k(1/t - w)^k} = \frac{M}{(1 - wt)^k} \leq Me^{k(w+1)t},$$

ha  $t \in (0, \frac{1}{w+w^2})$ . Továbbá, a 2.29. Lemma szerint

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{V(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} 1/t R(1/t, A)Ax = Ax, \quad x \in D(A).$$

Így a 3.45. Következmény alkalmazásával éppen a kívánt formulát kapjuk.  $\square$



3.3. ábra. Félcsoport, generátor, rezolvens

Ezzel az eredménnyel tehát kiegészíthetjük a korábbi diagramot, és megkapjuk az összes összefüggést a félcsoport, a generátora és annak rezolvensei között, ld. a 3.3. ábrát.

Szintén a Chernoff-szorzatformula alkalmazásával juthatunk a perturbált félcsoport egy limeszelőállításához.

**3.47. Következmény** (Trotter-szorzatformula). *Legyenek  $(T(t))_{t \geq 0}$  és  $(S(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportok  $X$ -en, amelyeknek generátorai  $(A, D(A))$  ill.  $(B, D(B))$ . Tegyük fel, hogy a félcsoportok kielégítik a*

$$\|[T(t/n)S(t/n)]^n\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

*stabilitási feltételt valamely  $M \geq 1$ ,  $w \in \mathbb{R}$  számokra. Legyenek  $D := D(A) \cap D(B)$  és  $(\lambda_0 - A - B)D$  sűrű alterek valamely  $\lambda_0 > w$  esetén. Ekkor  $C := \overline{A + B}$  egy  $(U(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál  $X$ -en, amely a Trotter-szorzatformulával adható meg:*

$$U(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} [T(t/n)S(t/n)]^n x, \quad x \in X,$$

*ahol a konvergencia kompakt intervallumokon  $t$ -ben egyenletes.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$V(t) := T(t)S(t), \quad t \geq 0,$$

és vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{t \downarrow 0} \frac{V(t)y - y}{t} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)S(t)y - y}{t} = \lim_{t \downarrow 0} T(t) \frac{S(t)y - y}{t} + \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)y - y}{t} \\ &= By + Ay,\end{aligned}$$

ha  $y \in D$ . Ezért  $V$ -re és  $A + B$ -re alkalmazható a 3.45. Következmény, így a kívánt formulát kapjuk.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a Trotter–Kato- és a Chernoff-tételeknek még számos fontos alkalmazása létezik, például igazolható a  $[0, 1]$ -en értelmezett folytonos függvények közelítése az ún. Bernstein-polinomokkal.

## 3.5. Feladatok

**3.1. Feladat.** Legyen  $A$  egy zárt lineáris operátor az  $X$  Banach-téren, amelynek  $\rho(A)$  rezolvenshalmaza nem üres. Legyen  $B : D(A) \rightarrow X$  lineáris operátor, ekkor bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

- (a)  $B$  pontosan akkor  $A$ -korlátos, ha  $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$ , ami pontosan akkor teljesül, ha  $BR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$  valamely/minden  $\lambda \in \rho(A)$  esetén.
- (b)  $B$  pontosan akkor  $A$ -kompakt, ha  $BR(\lambda, A)$  kompakt valamely/minden  $\lambda \in \rho(A)$  esetén.

**3.2. Feladat.** Legyen  $Af := f''$  és  $Bf := f'$  az  $X = C_0(\mathbb{R})$  téren értelmezve, ahol  $D(A)$  és  $D(B)$  maximális értelmezési tartományok. Mutassuk meg, hogy  $A + \alpha B - \beta$  kontrakció-félcsoportot generál, ha  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \geq 0$ . Lehet  $\alpha$  és  $\beta$  helyére függvényeket írni?

**3.3. Feladat.** Legyen  $B$  olyan zárt lineáris operátor az  $X$  Banach-téren, amelyhez létezik  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \rho(B)$  sorozat, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, B)\| = 0$ . Igazoljuk, hogy  $B A = B^2$ -korlátos, és  $A$ -korlátja  $a_0 = 0$ ! (Segítség: Számítsuk ki  $B^2 R(\lambda, B)$ -t a  $BR(\lambda, B) = \lambda R(\lambda, B) - \text{Id}$  egyenlőség segítségével!)

**3.4. Feladat.** Tekintsük az  $Af := f''$  operátort az  $X = C_0(\mathbb{R})$  téren, maximális értelmezési tartománnyal. Definíáljuk  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$A_n f(s) := n^2 [f(s + 1/n) - 2f(s) + f(s - 1/n)], \quad s \in \mathbb{R}, f \in X.$$

Igazoljuk az alábbiakat!

- (a)  $(A, D(A))$  zárt, sűrűn definiált operátor;
- (b)  $\|e^{tA_n}\| \leq 1$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén, és  $A_n f \rightarrow Af$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ha  $f \in D(A)$ ;
- (c) Minden  $g \in X$  függvényhez létezik egyetlen  $f \in D(A)$ , amelyre  $f - f'' = g$ ;
- (d)  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportot generál  $X$ -en, amelyre

$$T(t)f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n^2 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} f(s + (k - 2\ell)/n),$$

$$s \in \mathbb{R}, f \in X.$$

**3.5. Feladat.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport  $X$ -en, amelynek generátora  $(A, D(A))$ . Bizonyítsuk be, hogy ha  $B \in \mathcal{L}(X)$ , akkor az  $A + B$  által generált  $(S(t))_{t \geq 0}$  félcsoportot a következő Trotter-szorzatformula adja meg:

$$S(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ T(t/n) e^{tB/n} \right]^n x, \quad t \geq 0, x \in X.$$

(Segítség: Átskálázás után feltehető, hogy  $(T(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoport.)

## 4. fejezet

# Félcsoportok és generátorok spektrálelmélete

### 4.1. Zárt operátorok spektrálelmélete

Felidézzük, amit korábban zárt operátorok rezolvenséről tanultunk (ld. a 2.13. Definíciót és a 2.14. Állítást). Az alábbiakban  $(A, D(A))$  mindig egy tetszőleges zárt operátort jelöl.

**4.1. Definíció.** Legyen

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektív}\}$$

az  $A$  operátor *rezolvenshalmaza*, a komplementere pedig  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  az  $A$  *spektruma*. Ha  $\lambda \in \rho(A)$ , akkor

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$$

a Zártgráf-tétel (ld. a 2.8. Tételt) miatt korlátos  $X$ -en, és  $A$  *rezolvensének* nevezzük a  $\lambda$  pontban.

A definícióból rögtön adódik, hogy

$$(4.1) \quad AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - \text{Id}$$

egyenlőség fennáll. A következő egyenlőség a rezolvensoperátorok és a

$$(4.2) \quad \rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$



rezolvensleképezés sok fontos tulajdonságának alapja.

**4.2. Tétel** (Rezolvens egyenlőség). *Legyen  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ . Ekkor*

$$(4.3) \quad R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

*Bizonyítás.* A rezolvens definíciójából adódik, hogy

$$\begin{aligned} [\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]R(\mu, A) &= R(\mu, A) \\ R(\lambda, A)[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)] &= R(\lambda, A). \end{aligned}$$

Kivonva egymásból a két egyenlőséget, és felhasználva, hogy a rezolvensoperátorok kommutálnak, kapjuk a kívánt állítást.  $\square$

A következő állításban a rezolvenshalmaz és a rezolvensleképezés alapvető tulajdonságait foglaljuk össze.

**4.3. Állítás.** *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

(a) *A rezolvenshalmaz nyílt  $\mathbb{C}$ -ben, és ha  $\mu \in \rho(A)$ , akkor minden  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$  esetén  $\lambda \in \rho(A)$ , továbbá*

$$(4.4) \quad R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}.$$

(b) *A  $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$  rezolvensleképezés lokálisan analitikus, és*

$$(4.5) \quad \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) *Legyen  $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ . Ekkor  $\lambda_0 \in \sigma(A)$  pontosan akkor teljesül, ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty.$$

*Bizonyítás.* (a) és

(b) A 2.19. Következményben bizonyítottuk.

(c) Az (a) pontból következik, hogy minden  $\mu \in \rho(A)$  esetén

$$(4.6) \quad \|R(\mu, A)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(\mu, \sigma(A))}.$$

Ha tehát  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ , akkor

$$\frac{1}{\|R(\lambda_n, A)\|} \leq |\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0,$$

tehát  $\|R(\lambda_n, A)\| \rightarrow \infty$  következik. A másik irány bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Ekkor a  $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$  kompakt halmazon a folytonos rezolvensleképezés korlátos. Ez ellentmond annak, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$ , tehát  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ .  $\square$

A következőkben a  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  zárt halmaz szerkezetét vizsgáljuk meg közelebbről.

**4.4. Definíció.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor, ekkor a

$$P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem injektív}\}$$

halmaz az  $A$  *pontspektruma*. A  $\lambda \in P\sigma(A)$  szám neve *sajátérték*, és egy  $0 \neq x \in D(A)$ ,  $(\lambda - A)x = 0$  tulajdonságú vektort a  $\lambda$ -hoz tartozó *sajátvektornak* hívunk.

**4.5. Példa.** Legyen  $\Omega \subset \mathbb{C}$  nem üres, zárt részhalmaz. Tekintsük az  $X := C_0(\Omega)$  téren az

$$Mf(\lambda) := \lambda \cdot f(\lambda), \quad \lambda \in \Omega, f \in X$$

szorzásoperátort. Ekkor az 1.33. Állítás (d) pontja alapján

$$\sigma(M) = \Omega.$$

Másrészt, meggondolható, hogy

$$P\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ izolált } \Omega\text{-ban}\}.$$

A következő definíció a spektrumnak egy, a sajátértékeknél bővebb részhalmazáról szól.

**4.6. Definíció.** Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor, ekkor az

$$A\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem injektív vagy } \text{ran}(\lambda - A) \text{ nem zárt } X\text{-ben}\}$$

halmaz neve:  $A$  *approximatív pontspektruma* vagy *approximatív sajátértékei*.

A definíciókból adódik, hogy

$$P\sigma(A) \subset A\sigma(A).$$

Az alábbi lemma magyarázatot ad az „approximatív pontspektrum” elnevezésre.

**4.7. Lemma.** *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ekkor  $\lambda \in A\sigma(A)$  pontosan akkor teljesül, ha létezik egy  $(x_n) \subset D(A)$  sorozat, amelyre*

$$\|x_n\| = 1, n \in \mathbb{N} \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0.$$

*Egy ilyen  $(x_n)$  sorozatot a  $(\lambda$ -hoz tartozó) approximatív sajátvektornak nevezünk.*

*Bizonyítás.* Ha  $\lambda - A$  nem injektív, akkor  $x_n = \frac{x}{\|x\|}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) választás jó, ahol  $x$  a  $\lambda$ -hoz tartozó tetszőleges sajátvektor. Ezért elég azt az esetet meggondolni, amikor  $\lambda - A$  injektív. Ekkor

$$\lambda \in A\sigma(A) \iff \text{ran}(\lambda - A) \text{ nem zárt.}$$

Az utóbbi feltétel a 2.8. Zártgráf-tétel alapján ekvivalens azzal, hogy

$$(\lambda - A)^{-1} : X \rightarrow X \text{ nem korlátos,}$$

ami pedig épp a lemma állításában szereplő sorozat létezését jelenti. □

Míg a pontspektrum lehet üres halmaz, az approximatív pontspektrum sosem az, kivéve, ha  $\sigma(A) = \emptyset$  vagy  $\sigma(A) = \mathbb{C}$ .

**4.8. Állítás.** *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor. Ekkor a  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  halmaz topológiai határa*

$$\partial\sigma(A) \subset A\sigma(A).$$

*Bizonyítás.* Legyen  $\lambda_0 \in \partial\sigma(A) \subset \sigma(A)$ . Ekkor létezik olyan  $(\lambda_n) \subset \rho(A)$  sorozat, amelyre  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ . A 4.3. Állítás (c) pontja és az egyenletes korlátosság tétele szerint létezik olyan  $x \in X$  vektor, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)x\| = \infty.$$

Legyen

$$y_n := \frac{R(\lambda_n, A)x}{\|R(\lambda_n, A)x\|} \in D(A).$$

Ekkor  $\|y_n\| = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és

$$(\lambda_0 - A)y_n = (\lambda_0 - \lambda_n)y_n + (\lambda_n - A)y_n \rightarrow 0$$

miatt az  $(y_n)$  sorozat egy  $\lambda_0$ -hoz tartozó approximatív sajátvektora  $A$ -nak. így az állítás következik.  $\square$

A következő definíció a spektrum „maradék” részéről szól.

**4.9. Definíció.** Az

$$R\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ran}(\lambda - A) \text{ nem sűrű } X\text{-ben}\}$$

halmaz neve:  $A$  *reziduális spektruma*.

Mivel a 4.6. és a 4.9. Definíciókban minden lehetőséget számba vettünk, amikor  $\lambda - A$  nem bijektív, ezért könnyen látható, hogy

$$(4.7) \quad \sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti unió nem szükségképpen diszjunkt.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a zárt (nem feltétlenül korlátos)  $A$  operátor és a korlátos rezolvensoperátor spektrumai között szép összefüggés áll fenn, amelyet spektrálleképezés-tételnek is szoktak hívni.

**4.10. Tétel** (Spektrálleképezés-tétel a rezolvensre). *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor,  $\rho(A) \neq \emptyset$ . Ekkor*

(a) *minden  $\lambda_0 \in \rho(A)$  esetén*

$$(4.8) \quad \sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = (\lambda_0 - \sigma(A))^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \mu} : \mu \in \sigma(A) \right\}.$$

(b) *Hasonló állítás igaz a pont-, approximatív pont- és reziduális spektrumokra is.*

*Bizonyítás.* Legyen  $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} (\mu - R(\lambda_0, A))x &= \mu \left[ \left( \lambda_0 - \frac{1}{\mu} \right) - A \right] R(\lambda_0, A)x, \quad x \in X \\ &= \mu R(\lambda_0, A) \left[ \left( \lambda_0 - \frac{1}{\mu} \right) - A \right] x, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

A fenti egyenlőségek alapján

$$\ker(\mu - R(\lambda_0, A)) = \ker\left[\left(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\right) - A\right]$$

és

$$\operatorname{ran}(\mu - R(\lambda_0, A)) = \operatorname{ran}\left[\left(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\right) - A\right].$$

A 4.4., a 4.6. és a 4.9. Definíciók alapján

$$\mu \in P\sigma(R(\lambda_0, A)) \iff \lambda_0 - \frac{1}{\mu} \in P\sigma(A),$$

továbbá analóg állítások igazak az approximatív pontspektrumra és a reziduális spektrumra is. Így a (b) állítás teljesül, ezzel együtt pedig (a) is.  $\square$

Az  $A$  és  $R(\lambda_0, A)$  spektruma közötti fenti reláció meghatározza  $R(\lambda_0, A)$  spektrálsugarát. Így a (4.8) egyenlőség és a (4.6) egyenlőtlenség alapján kapjuk az alábbi állítást.

**4.11. Következmény.** Legyen  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Ekkor

$$\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) = \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Most egy kis kitérőt teszünk *spektrálfelbontás* témakörben, ami a spektrálelmélet egyik legfontosabb területe. Először korlátos operátorokat vizsgálunk.

**4.12. Definíció.** Legyen  $T \in \mathcal{L}(X)$  korlátos operátor, és tegyük fel, hogy a  $\sigma(T)$  (kompakt) halmaz előáll mint

$$\sigma(T) = \sigma_c \cup \sigma_u,$$

ahol  $\sigma_c$  és  $\sigma_u$  zárt (tehát kompakt) és diszjunkt halmazok. Legyen

$$(4.9) \quad P := P_c := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, T) d\lambda$$

az ún. *spektrálprojekció*, ahol  $\gamma \subset (\mathbb{C} \setminus \sigma_u)$  egy tetszőleges Jordan-görbe, amely pozitív irányban körüljárja  $\sigma_c$ -t. Ez az operátor valóban projekció, és kommutál  $T$ -vel, továbbá az

$$X = X_c \oplus X_u$$

*spektrálfelbontást* definiálja, ahol

$$X_c = \operatorname{ran} P, \quad X_u = \ker P$$

$T$ -invariáns alterek. A  $T$  operátor megfelelő alterekre való leszűkítéseire  $T_c \in \mathcal{L}(X_c)$  és  $T_u \in \mathcal{L}(X_u)$ , továbbá

$$\sigma(T_c) = \sigma_c, \quad \sigma(T_u) = \sigma_u.$$

Ezen tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az  $X$  és  $T$  fenti felbontását.

Ha  $A$  nemkorlátos operátor, akkor spektrum zárt halmazokra való felbontása nem minden esetben eredményez spektrálfelbontást. Azonban, ha a felbontásban szereplő halmazok egyike kompakt, akkor a rezolvensre vonatkozó spektrálleképezés-tétel felhasználásával a korlátos operátorhoz hasonló eredményre jutunk. Ennek igazolásához szükségünk lesz a következő lemmára.

**4.13. Lemma.** *Legyenek  $Y \subset X$  Banach terek, ahol az*

$$i : Y \rightarrow X$$

*kanonikus beágyazás folytonos. Ha  $(A, D(A))$  zárt operátor  $X$ -en,*

$$\lambda \in \rho(A), \text{ és } R(\lambda, A)Y \subset Y,$$

*akkor*

$$\lambda \in \rho(A|_Y), \text{ és } R(\lambda, A|_Y) = R(\lambda, A)|_Y,$$

*ahol  $A|_Y$  az  $A$  operátor részét jelöli  $Y$ -ban, vagyis*

$$A|_Y y = Ay, \quad D(A|_Y) = \{y \in D(A) \cap Y : Ay \in Y\}.$$

*Bizonyítás.* A feltételek szerint  $R(\lambda, A)|_Y$  az  $Y$ -t  $D(A|_Y)$ -be képezi, ezért

$$R(\lambda, A)|_Y = (\lambda - A|_Y)^{-1}.$$

Továbbá, ez az inverz korlátos, mivel egy mindenütt definiált zárt operátor. □

**4.14. Állítás.** *Legyen  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zárt operátor, és tegyük fel, hogy a spektruma felbomlik diszjunkt zárt halmazok uniójára, vagyis*

$$(4.10) \quad \sigma(A) = \sigma_c \cup \sigma_u.$$

*Ha  $\sigma_c$  kompakt, akkor  $A$ -nak létezik*

$$X = X_c \oplus X_u$$

*spektrálfelbontása a következő értelemben:*

(a) Az  $A_c := A|_{X_c}$  operátor korlátos  $X_c$ -n;

(b)

$$X_1^A = X_c \oplus (X_u)_1^{A_u},$$

ahol  $A_u := A|_{X_u}$  (itt  $X_1^A$  az  $A$ -hoz tartozó, a 2.5. Definíció (iii) pontjában definiált Banach-teret jelöli);

(c)  $A = A_c \oplus A_u$ ;

(d)  $\sigma(A_c) = \sigma_c$ ,  $\sigma(A_u) = \sigma_u$ .

*Bizonyítás.* Ha  $A$  korlátos, akkor a bizonyítás a (4.9) formulán alapul. Ezért most tegyük fel, hogy  $A$  nemkorlátos, és legyen  $\lambda \in \rho(A)$  rögzítve.

(a) Az  $A$  nemkorlátossága miatt tudjuk, hogy  $0 \in \sigma(R(\lambda, A))$ . Tehát, a 4.10. Tétel szerint

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \sigma(R(\lambda, A)) &= (\lambda - \sigma_c)^{-1} \bigcup ((\lambda - \sigma_u)^{-1} \cup \{0\}) \\ &:= \tau_c \cup \tau_u, \end{aligned}$$

ahol  $\tau_c, \tau_u \subset \mathbb{C}$  diszjunkt, kompakt halmazok. Legyen most  $P$  az  $R(\lambda, A)$  (korlátos) operátor (4.11) felbontáshoz tartozó spektrálprojekciója, és legyen

$$X_c := \text{ran } P, \quad X_u := \ker P.$$

Mivel  $R(\lambda, A)$  és  $P$  felcserélhetők, ezért  $R(\lambda, A)X_c \subset X_c$ , és a 4.13. Lemma alapján

$$(4.12) \quad \lambda \in \rho(A_c), \text{ és } R(\lambda, A_c) = R(\lambda, A)|_{X_c}.$$

Továbbá,  $\sigma(R(\lambda, A_c)) = \tau_c \not\ni 0$ . Így az

$$A_c = \lambda - (R(\lambda, A_c))^{-1}$$

operátor korlátos  $X_c$ -n, ebből kapjuk (a)-t.

(b) Az előző ponthoz hasonló érvelés alapján

$$(4.13) \quad \lambda \in \rho(A_u), \text{ és } R(\lambda, A_u) = R(\lambda, A)|_{X_u}.$$

Ezt összevetve a (4.12) tulajdonsággal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X_c + D(A_u) &= R(\lambda, A_c)X_c + R(\lambda, A_u)X_u \\ &\subset D(A) = R(\lambda, A)(X_c + X_u) \\ &\subset R(\lambda, A_c)X_c + R(\lambda, A_u)X_u \\ &= X_c + D(A_u), \end{aligned}$$

vagyis  $X_1^A = X_c + D(A_u)$ . Mivel  $P \in \mathcal{L}(X)$ , ezért

$$P|_{X_1^A} : X_1^A \rightarrow X_1^A$$

zárt (ahogy az a definícióból könnyen meggondolható), és a Zártgráf-tétel miatt korlátos. Így a (b) állítás adódik.

(c) Következik (a)-ból és (b)-ből.

(d) Következik a 4.10. Tételből és a (4.11), a (4.12) és a (4.13) tulajdonságokból.  $\square$

**4.15. Példa** (Izolált szingularitások). Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a (4.10) felbontásban  $\sigma_c = \{\mu\}$ , vagyis a kompakt  $\sigma_c$  halmaz egy pontból áll. Ez azt jelenti, hogy  $\mu \in \sigma(A)$  izolált pont, ezért a  $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$  holomorf függvény Laurent-sorba fejthető

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \mu)^n U_n,$$

ha  $0 < |\lambda - \mu| < \delta$  valamely elég kicsi  $\delta$ -ra. Az  $U_n$  együtthatók korlátos operátorok, amelyeket a

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(\lambda, A)}{(\lambda - \mu)^{n+1}} d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

képletek definiálnak, ahol  $\gamma$  például a pozitív irányítású,  $\mu$  középpontú,  $\delta/2$  sugarú körvonal. Az  $U_{-1}$  operátor éppen a

$$\sigma(A) = \{\mu\} \cup (\sigma(A) \setminus \{\mu\})$$

felbontáshoz tartozó  $P$  spektrálprojekciója  $A$ -nak. Ezt szokás az  $R(\cdot, A)$  reziduumának is hívni  $\mu$ -ben. Ha  $k > 0$ ,  $U_{-k} \neq 0$ , de  $U_{-n} = 0$ ,  $n > k$  esetén, akkor  $\mu$   $k$ -adrendű pólusa



$R(\cdot, A)$ -nak.

A  $\text{ran } P$  spektrális altér dimenziója a  $\mu$   $m_a$ -val jelölt *algebrai multiplicitása*, míg az

$$m_g := \dim \ker(\mu - A)$$

az ún. *geometriai multiplicitás*. Ha  $m_a = 1$ , akkor  $\mu$  *algebrailag egyszerű* vagy *elsőrendű pólus*. Belátható az alábbi összefüggés:

$$m_g + k - 1 \leq m_a \leq m_g \cdot k,$$

ahol a  $\infty \cdot 0 := \infty$  koncepcióval élünk. Ebből következik, hogy

(a)  $m_a < \infty$  pontosan akkor teljesül, ha  $\mu$  pólus és  $m_g < \infty$ ;

(b) ha  $\mu$   $k$ -adrendű pólus, akkor  $\mu \in P\sigma(A)$  és  $\text{ran } P = \ker(\mu - A)^k$ .

Az alábbiakban bizonyítás nélkül kimondunk egy állítást az  $A$  és az  $R(\lambda, A)$  operátorok izolált spektrumpontjai közötti összefüggésről.

**4.16. Állítás.** *Legyen  $A$  zárt lineáris operátor, és legyen  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Ekkor  $\mu \in \mathbb{C}$  pontosan akkor izolált pontja  $\sigma(A)$ -nak, ha  $(\lambda_0 - \mu)^{-1}$  izolált pontja  $\sigma(R(\lambda, A))$ -nak. Ebben az esetben az  $R(\cdot, A)$  operátor  $\mu$  pontbeli reziduuma és a  $\mu$  pólus rendje megegyezik az  $R(\cdot, R(\lambda_0, A))$  operátor  $(\lambda_0 - \mu)^{-1}$  pontbeli reziduumával és pólusának rendjével.*

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

Ha  $A$  kompakt rezolvensű, akkor a fenti eredményeket összevetve a kompakt operátorokra vonatkozó Riesz–Schauder-féle elmélettel, a következő állítást kapjuk.

**4.17. Következmény.** *Ha az  $A$  operátor kompakt rezolvensű, akkor  $\sigma(A)$  minden eleme véges algebrai multiplicitású pólus. Így*

$$\sigma(A) = P\sigma(A).$$

## 4.2. Félcsoportok és generátoraik spektruma

A 2.21. Definícióban már bevezettük az  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  (zárt) lineáris operátor *spektrálkorlátjának* fogalmát mint

$$s(A) := \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\},$$

az (1.12) definícióban pedig a  $T = (T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport *növekedési korlátjának* fogalmát mint

$$\omega_0 = \omega_0(T) := \inf \left\{ w \in \mathbb{R} : \exists M_w \geq 1, \text{ melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot e^{wt}, t \geq 0 \right\}.$$

A 2.30 Hille–Yosida-tételtől következik, hogy ha  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátora, akkor spektruma egy megfelelő félsíkban fekszik, és

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < +\infty,$$

ld. a 2.22. Következmenyt. Az alábbi állításban a félcsoport ezen jellemzőinek további tulajdonságairól lesz szó.

**4.18. Állítás.** *Legyen a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora  $(A, D(A))$ . Ekkor*

$$(4.14) \quad \begin{aligned} -\infty \leq s(A) \leq \omega_0 &= \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0)) < \infty \end{aligned}$$

*minden  $t_0 > 0$  esetén. Vagyis,*

$$(4.15) \quad r(T(t)) = e^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Elemi úton igazolható, hogy

$$\inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| =: v.$$

Ebből következik, hogy

$$e^{vt} \leq \|T(t)\|$$

minden  $t \geq 0$  esetén, tehát  $v \leq \omega_0$ . Legyen most  $w > v$ . Ekkor van olyan  $t_0 > 0$ , amelyre

$$\frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \leq w$$

minden  $t \geq t_0$  esetén, tehát

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq t_0.$$

Mivel  $\|T(t)\|$  korlátos  $[0, t_0]$ -on, ezért található olyan  $M \geq 1$  szám, amelyre

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Így  $\omega_0 \leq w$ , tehát  $v = \omega_0$ .

A spektrálsugár Hadamard-féle definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} r(T(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(nt)\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t \frac{1}{nt} \ln \|T(nt)\|} \\ &= e^{t \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{nt} \ln \|T(nt)\|)} = e^{t\omega_0}. \end{aligned}$$

A többi egyenlőtlenséget már bizonyítottuk a 2.22. Következményben.  $\square$

Most a fenti állításnak egy nagyon fontos és szép következményét igazoljuk.

**4.19. Következmény.** *Egy egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén*

$$(4.16) \quad s(A) = \omega_0.$$

*Bizonyítás.* Az egyenletesen folytonos félcsoportokra vonatkozó 1.30. Spektrálleképezés-tétel alapján

$$r(T(t)) = e^{s(A)t},$$

így az  $s(A) = \omega_0$  egyenlőség a 4.18. Állításból következik.  $\square$

**4.20. Következmény.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora, amelyre  $\omega_0 = -\infty$  (ez fennáll pl. ha a félcsoport nilpotens). Ekkor*

$$r(T(t)) = 0, \quad t > 0 \text{ és } \sigma(A) = \emptyset.$$

**4.21. Példa** (Félcsoportok spektrumára). Ebben a példában (bal)eltolás-félcsoportokat vizsgálunk különböző függvénytereken (ld. az 1.4.3. és a 2.2.2. alpontokat), és látni fogjuk, hogy a spektrum nagymértékben múlik a Banach-tér megválasztásán, amelyen a félcsoport hat. Először vegyük észre, hogy a

$$\varepsilon_\lambda(s) := e^{\lambda s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

exponenciális függvényekre

$$\frac{d}{ds} \varepsilon_\lambda = \lambda \varepsilon_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

teljesül. Mivel az eltolás-félcsoport  $A$  generátora a megfelelő értelmezési tartományon definiált első derivált (ld. a 2.25. Állítást), ezért  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke  $A$ -nak, ha  $\varepsilon_\lambda \in D(A)$ .

1. Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  a baleltolás-félcsoport az  $X := C_0(\mathbb{R}_+)$  Banach-téren. Ekkor a generátora

$$Af = f'$$

$$D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+) : f' \in C_0(\mathbb{R}_+)\}.$$

Ezért  $\varepsilon_\lambda \in D(A)$  pontosan akkor teljesül, ha  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Így

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Mivel  $(T(t))_{t \geq 0}$  kontrakció-félcsoport, ezért  $s(A) \leq \omega_0 \leq 0$ . Ebből, valamint abból, hogy a spektrum zárt, következik, hogy

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}.$$

Az  $\varepsilon_\lambda$  függvények egyben a  $T(t)$  operátorok sajátfüggvényei is  $e^{\lambda t}$  sajátértékkel, így kapjuk, hogy

$$P\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

és

$$\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \text{ ha } t > 0.$$

2. Legyen most  $(T(t))_{t \geq 0}$  a bal eltolás félcsoport az  $X := C_0(\mathbb{R})$  Banach-téren. Ekkor  $P\sigma(A) = \emptyset$ , mivel egyetlen  $\varepsilon_\lambda$  függvény sincs benne  $D(A)$ -ban. Másrészt, minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén az

$$f_n(s) := e^{i\alpha s} \cdot e^{-\frac{s^2}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

függvényekből álló sorozat approximatív sajátvektora  $A$ -nak  $i\alpha$  approximatív sajátértékkel. Ebből következik, hogy

$$A\sigma(A) = \sigma(A) = i\mathbb{R},$$

és hasonlóan

$$\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

3. Legyen most  $(T(t))_{t \geq 0}$  a nilpotens baleltolás-félcsoport az  $X := C_0(0, 1]$  Banach-téren. Ekkor a 4.20. Következményből adódik, hogy

$$\sigma(T(t)) = \{0\}, \quad \sigma(A) = \emptyset.$$

Továbbá, minden  $\lambda \in \mathbb{C}$  esetén

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad s \in (0, 1], \quad f \in X.$$

4. Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  a periodikus eltoláscsoport pl. az  $X := C_{2\pi}(\mathbb{R})$  Banach-téren (ld. az 1.4.3. alpontot). Ekkor  $\varepsilon_\lambda \in D(A)$  pontosan akkor teljesül, ha  $\lambda \in i\mathbb{Z}$ . Mivel  $A$  kompakt rezolvensű (ld. a 2.80. Példát), ezért a 4.17. Következmény alapján

$$\sigma(A) = P\sigma(A) = i\mathbb{Z}.$$

A  $T(t)$  operátorok spektruma minden  $t$ -re része a

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

egységkörvonalnak, és tartalmazza az  $e^{kit}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sajátértékeket. Mivel  $\sigma(T(t))$  zárt, ezért a 4.42. Tételből következik, hogy

$$\sigma(T(t)) = \begin{cases} \Gamma, & \frac{t}{2\pi} \notin \mathbb{Q}, \\ \Gamma_q, & \frac{t}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ ahol } p, q \text{ prímek, } (p, q) = 1. \end{cases}$$

Itt  $\Gamma_q = \{z \in \mathbb{C} : z^q = 1\}$ .

**4.22. Példa** ( $s(A) < \omega_0$ ). Tekintsük az

$$X := C_0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, e^s ds)$$

Banach teret, amely azon  $\mathbb{R}_+$ -on folytonos, végtelenben eltűnő függvényekből áll, amelyek integrálhatóak  $e^s$ -el megszorozva. A norma legyen

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f\|_1 = \sup_{s \geq 0} |f(s)| + \int_0^\infty |f(s)| e^s ds.$$

A baleltolások egy erősen folytonos operátorfélcsoportot definiálnak  $X$ -nek, amelynek generátora

$$Af = f', \\ D(A) = \{f \in X : f \in C^1(\mathbb{R}_+), f' \in X\}.$$

Mivel  $\|T(t)\| = 1$  minden  $t \geq 0$  esetén, ezért  $\omega_0 = 0$ . Másrészt,  $\varepsilon_\lambda \in D(A)$  akkor teljesül, ha  $\operatorname{Re} \lambda < -1$ , így

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < -1\},$$

tehát  $s(A) \geq -1$ . Megmutatjuk, hogy ha  $\operatorname{Re} \lambda > -1$ , akkor  $\lambda \in \rho(A)$ . Legyen  $f \in X$ . A 2.17. Tétel (a) pontja alapján be kell látnunk, hogy

$$\|\cdot\|_1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) f \, ds \quad \text{és} \quad \|\cdot\|_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) f \, ds$$

határértékek léteznek. Mivel

$$\|T(s)f\|_1 = \int_0^\infty e^u |f(s+u)| \, du = e^{-s} \int_s^\infty e^u |f(u)| \, du \leq e^{-s} \|f\|_1,$$

ezért

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) f \, ds \right\|_1 \leq \int_0^t e^{-\lambda s} \|T(s)f\|_1 \, ds \leq \int_0^t e^{-s(\operatorname{Re} \lambda + 1)} \|f\|_1 \, ds,$$

ami konvergens, hiszen  $\operatorname{Re} \lambda + 1 > 0$ . Legyen most  $u \in [0, \infty)$  tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{-\lambda s} (T(s)f)(u) \, ds \right| &\leq e^{-u} \int_0^t e^{-s(\operatorname{Re} \lambda + 1)} e^{s+u} |f(s+u)| \, ds \\ &\leq \int_0^t 1 \cdot e^s |f(s)| \, ds, \end{aligned}$$

ami szintén konvergens, hiszen  $f \in X$ . Így

$$g := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) f \, ds$$

létezik  $X$ -ben minden  $f \in X$  esetén, és  $(\lambda - A)g = f$ . Tehát

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -1\}, \quad \text{tehát } s(A) = -1.$$

**4.23. Példa** (Delay (késleltetett) félcsoporth). Idézzük fel a 2.48. Példában bevezetett delay (vagyis késleltetett) differenciáloperátort! Legyen  $X := C[-1, 0]$ ,

$$\begin{aligned} Af &:= f', \\ D(A) &:= \{f \in C^1[-1, 0] : f'(0) = Lf\}, \end{aligned}$$

ahol  $L$  egy folytonos lineáris funkcionál  $C[-1, 0]$ -n. Láttuk, hogy ez az operátor generátor. Számítsuk ki  $A$  pontspektrumát,  $P\sigma(A)$ -t! Ahogy az előbbi eltolás-félcsoporthok esetén,  $f \in C[-1, 0]$  pontosan akkor sajátfüggvénye  $A$ -nak, ha  $f = c\varepsilon_\lambda$  ( $c \neq 0$ ), ahol

$$\varepsilon_\lambda(s) = e^{\lambda s}, \quad s \in [-1, 0]$$

valamely  $\lambda \in \mathbb{C}$  esetén. Másrészt,  $\varepsilon_\lambda \in D(A)$  pontosan akkor teljesül, ha  $\varepsilon_\lambda$  kielégíti a

$$\varepsilon'_\lambda(0) = L\varepsilon_\lambda$$

peremfeltételt, vagyis

$$\lambda = L\varepsilon_\lambda.$$

Definiáljuk a

$$\xi(\lambda) := \lambda - L\varepsilon_\lambda$$

függvényt! Ekkor az  $A$  operátor pontspektrumára

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi(\lambda) = 0\}.$$

Mivel  $\xi(\cdot)$  analitikus függvény  $\mathbb{C}$ -n, ezért a gyökei izolált pontok, tehát  $P\sigma(A)$  diszkrét részhalmaza  $\mathbb{C}$ -nek.

Ha a teljes  $\sigma(A)$  spektrumot akarjuk meghatározni, akkor vegyük észre, hogy

$$X_1^A = (D(A), \|\cdot\|_A)$$

zárt altere  $C^1[-1, 0]$ -nak, továbbá az

$$i : C^1[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]$$

kanonikus beágyazás az Arzelà–Ascoli-tétel alapján kompakt. Így a 2.79. Állításból következik, hogy  $A$  kompakt rezolvensű, és a 4.17. Következmény szerint

$$\sigma(A) = P\sigma(A).$$

**4.24. Definíció.** Ahogy láttuk, a delay differenciáloperátor spektruma izolált sajátértékekből áll. Pontosabban, a

$$\lambda \mapsto \xi(\lambda) = \lambda - L\varepsilon_\lambda$$

ún. *karakterisztikus függvénnyel* a spektrum

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi(\lambda) = 0\}$$

alakú, azaz a  $\xi(\lambda) = 0$  *karakterisztikus egyenlet gyökei* tartalmazza.

A következőkben kis kitérőt teszünk *periodikus félcsoporthok* spektrálméletébe. Ez a terület önmagában is érdekes, hiszen ezen félcsoporthokat spektrális tulajdonságaik alapján lehet karakterizálni. Másrészt, a soron következő alfejezet egyik legfontosabb tételének, a pont- és reziduális spektrumra vonatkozó spektrálleképezés-tételnek a bizonyítása is az ilyen tulajdonságú félcsoporthok spektrumán alapszik.

Kezdjük először a periodikus félcsoporth definíciójával.

**4.25. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth *periodikus*, ha létezik olyan  $t_0 > 0$ , hogy  $T(t_0) = \text{Id}$ . Ekkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  *periódusa*

$$\tau := \inf\{t_0 > 0 : T(t_0) = \text{Id}\}.$$

Az alábbi állításban összefoglaljuk a periodikus félcsoporthok néhány fontos tulajdonságát, amelyek könnyen adódnak a definícióból.

**4.26. Állítás.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  periodikus félcsoporth,  $\tau$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  periódusa. Ekkor

(a)  $(T(t))_{t \geq 0}$  csoporth is, és

$$T(t)^{-1} = T(n\tau - t), \quad 0 \leq t \leq n\tau;$$

(b)  $(T(t))_{t \geq 0}$  korlátos, tehát  $\omega_0 = 0$  és  $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ .

*Bizonyítás.* (a) Következik abból, hogy  $T(n\tau) = \text{Id}$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

(b)  $T$  korlátos, hiszen  $\sup_{t \in [0, \tau]} \|T(t)\| < \infty$ . A többi állítás következik a 2.35. Tételből.  $\square$

Ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  periodikus mátrix-csoport  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -ben, akkor a Jordan-normálalak felhasználásával kapjuk, hogy az  $A$  generátor hasonló egy  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , a  $T(t)$  operátorok pedig egy-egy  $\text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$  alakú mátrixhoz, ahol  $\lambda_i \in \frac{2\pi i}{\tau} \cdot \mathbb{Z}$ . Végtelen dimenzióban hasonló karakterizációt fogunk bizonyítani.

**4.27. Lemma.** Legyen  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren. Tegyük fel, hogy

1.  $P\sigma(A) \subset 2\pi i\alpha\mathbb{Z}$  valamely  $\alpha > 0$  esetén;
2. a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki  $X$ -ben.



Ekkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  periodikus.

*Bizonyítás.* Legyen  $0 \neq x \in D(A)$ , amelyre  $Ax = (2\pi i \alpha n)x$  valamely  $n \in \mathbb{N}$  természetes számra. Legyen

$$\xi(s) := e^{2\pi i \alpha n(t-s)} T(s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Ekkor

$$\xi(0) = e^{2\pi i \alpha n t} x, \quad \xi(t) = T(t)x,$$

és a feltételből következik, hogy  $\xi'(s) = 0$  minden  $0 \leq s \leq t$  esetén. Mivel  $t$  tetszőleges volt, ezért

$$T(t)x = e^{2\pi i \alpha n t} x, \quad t \geq 0,$$

ha  $x$  az  $A$  sajátvektora. Mivel ezek a feltétel szerint sűrű alteret alkotnak, ezért  $(T(t))_{t \geq 0}$  periodikus  $\tau < \frac{1}{\alpha}$  periódussal.  $\square$

Az alábbiakban kiderül, hogy a lemma feltételei valójában szükségesek is a félcsoporth periodikusságához. Ehhez először egy újabb lemmát bizonyítunk.

**4.28. Lemma.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  egy periodikus erősen folytonos félcsoporth  $\tau > 0$  periódussal és  $A$  generátorral. Ekkor*

$$\sigma(A) \subset \frac{2\pi i}{\tau} \mathbb{Z},$$

és ha  $\mu \notin \frac{2\pi i}{\tau} \mathbb{Z}$ , akkor

$$(4.17) \quad R(\mu, A) = \frac{1}{1 - e^{-\mu\tau}} \int_0^\tau e^{-\mu s} T(s) ds$$

az erős topológiában.

*Bizonyítás.* A (2.11) és a (2.12) egyenlőségekből következik  $t = \tau$  választással, hogy ha  $\mu \neq \frac{2\pi i n}{\tau}$  valamely  $n \in \mathbb{Z}$  esetén, akkor  $\mu - A$ -nak van kétoldali inverze, és ez (4.17) alakú.  $\square$

**4.29. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora az  $X$  Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  periodikus;

(ii)  $\sigma(A) = P\sigma(A) \subset 2\pi i \alpha \mathbb{Z}$  valamely  $\alpha > 0$  esetén, és a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki  $X$ -ben.

*Bizonyítás.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) : A 4.27. Lemmából adódik.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : A 4.28. Lemmában láttuk, hogy ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  periódusa  $\tau$ , akkor  $A$  rezolvensére a (4.17) előállítás érvényes. Ebből következik, hogy  $R(\mu, A)$  meromorf függvény, amelynek pólusai  $\mu_n = \frac{2\pi i n}{\tau}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  alakúak. Továbbá, némi számolással adódik, hogy

$$(4.18) \quad P_n := \lim_{\mu \rightarrow \mu_n} (\mu - \mu_n) R(\mu, A) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-\mu_n s} T(s) ds \in \mathcal{L}(X).$$

A 4.15. Példában meggondoltak alapján  $P_n$  éppen a  $\mu_n$ -hez tartozó spektrálprojekció, és ran  $P_n = \ker(\mu_n - A)$ . Ebből és a 4.28. Lemmából már adódik, hogy

$$\sigma(A) = P\sigma(A) \subset \frac{2\pi i}{\tau} \cdot \mathbb{Z}.$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki  $X$ -ben, vagyis

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n X} = X.$$

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan  $0 \neq \varphi \in X^*$ , amelyre  $P_n X \subset \ker \varphi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Másrészt,  $P_n$  (4.18) definíciójából látszik, hogy  $P_n$  valójában az  $s \mapsto T(s)$   $\tau$  szerint periodikus függvény  $n$ -edik Fourier-együtthatója. Így  $\varphi(P_n x)$  a  $s \mapsto \varphi(T(s)x)$  függvény  $n$ -edik Fourier-együtthatója minden  $x \in X$  vektorra. Tehát, ha  $\varphi(P_n x) = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  teljesül minden  $x \in X$  esetén, akkor az  $s \mapsto \varphi(T(s)x)$  függvény azonosan 0 kellene legyen. Másrészt, ha  $x \in X$  olyan, amelyre  $\varphi(x) \neq 0$ , akkor ez nem állhat fenn, így ellentmondásra jutottunk.  $\square$

### 4.3. Spektrálleképezés-tételek

Ha  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora, akkor a  $T(t)$  operátorok – az egyenletesen folytonos félcsoporthok analógiájára – valamiképpen az „ $e^{tA}$ ” exponenciális általánosításai. Ezt az összefüggést most a spektrumok esetén vizsgáljuk meg, vagyis azt a kérdést járjuk körbe, hogy mikor lesz

$$\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)} = \{e^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**4.30. Példa.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  olyan félcsoporth, amely nem terjeszthető ki csoporttá. Például, tekintsük a baleltolás-félcsoporthot  $C_0(\mathbb{R}_+)$ -on. Ekkor  $0 \in \sigma(T(t))$  teljesül minden  $t > 0$  esetén, viszont  $0 \notin e^{t\sigma(A)}$ .

Ezért az „elvárható” összefüggés a félcsoporthoz és a generátor spektrumához között az ún. *spektrálleképezés-tétel*:

$$(SLT) \quad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

**4.31. Példa.** Ha egy félcsoporthoz

$$s(A) < \omega_0$$

teljesül, akkor

$$e^{t\sigma(A)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq e^{ts(A)}\}$$

és

$$r(T(t)) = e^{t\omega_0} > e^{ts(A)}$$

miatt a félcsoporthoz nem teljesítheti (SLT)-t.

**4.32. Példa.** Legyen  $1 < p < q < \infty$ , és definiálja az

$$X := L^p[1, \infty) \cap L^q[1, \infty)$$

téren a normát

$$\|f\| := \|f\|_p + \|f\|_q.$$

Ekkor  $(X, \|\cdot\|)$  Banach-tér. Legyen

$$(T(t)f)(s) := f(se^t),$$

$s \geq 1, t \geq 0, f \in X$ . Ekkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporthoz, generátora pedig

$$(Af)(s) = sf'(s), \quad s \geq 1,$$

ahol

$$D(A) = \{f \in X : f \text{ abszolút folytonos és } s \mapsto sf'(s) \in X\}.$$

Ekkor belátható, hogy

$$s(A) = -\frac{1}{p} < -\frac{1}{q} = \omega_0.$$

Lássuk most, hogy milyen reláció az, amit minden erősen folytonos félcsoporthoz kielégít.

**4.33. Tétel** (Spektráltartalmazás). *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos fél-csoport generátora. Ekkor az alábbi tartalmazások állnak fenn.*

$$(4.19) \quad \sigma(T(t)) \supset e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0,$$

továbbá minden  $t \geq 0$  esetén

$$(4.20) \quad P\sigma(T(t)) \supset e^{tP\sigma(A)},$$

$$(4.21) \quad A\sigma(T(t)) \supset e^{tA\sigma(A)},$$

$$(4.22) \quad R\sigma(T(t)) \supset e^{tR\sigma(A)}.$$

*Bizonyítás.* Idézzük fel a (2.11) és a (2.12) egyenlőségeket!

$$(4.23) \quad \begin{aligned} e^{\lambda t}x - T(t)x &= (\lambda - A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds, \quad \text{ha } x \in X, \\ &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x \, ds, \quad \text{ha } x \in D(A). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy ha  $\lambda - A$  nem bijektív, akkor  $e^{\lambda t} - T(t)$  sem bijektív. Így beláttuk a (4.19) tartalmazást.

Most belátjuk a (4.21) tartalmazást, ezzel egyben a (4.20) tartalmazást is. Legyen  $\lambda \in A\sigma(A)$ , és egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor az  $(x_n) \subset D(A)$  sorozat. Defináljunk egy új sorozatot mint

$$y_n := e^{\lambda t}x_n - T(t)x_n = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x_n \, ds.$$

Ekkor létezik olyan  $c > 0$  konstans, amelyre

$$\|y_n\| \leq \int_0^t \|e^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x_n\| \, ds \leq c\|(\lambda - A)x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tehát  $e^{\lambda t}$  approximatív sajátértéke  $T(t)$ -nek (minden  $t \geq 0$  esetén), és  $(x_n)$  egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor.

Legyen most egy  $\lambda \in R\sigma(A)$ . Ekkor a (4.23) alapján

$$\text{ran}(e^{\lambda t} - T(t)) \subset \text{ran}(\lambda - A),$$

tehát  $\text{ran}(e^{\lambda t} - T(t))$  nem sűrű  $X$ -ben. Tehát (4.22) fennáll.  $\square$

A fenti ellenpéldákból következik, hogy a spektráltartalmazás fordított iránya nem mindig áll fenn. A következő tételből kiderül, hogy ezért az approximatív pontspektrum a felelős.

**4.34. Tétel** (Spektrálleképezés a pont- és reziduális spektrumra). *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbi egyenlőségek állnak fenn minden  $t \geq 0$  esetén*

$$(4.24) \quad P\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{tP\sigma(A)},$$

$$(4.25) \quad R\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{tR\sigma(A)}.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $t_0 > 0$  és  $0 \neq \lambda \in P\sigma(T(t_0))$ . Átskálázás után (ld. az 1.5.2. és a 2.2.1. alpontokat) áttérhetünk az

$$(S(t))_{t \geq 0} = (e^{-t \ln \lambda} T(t_0 t))_{t \geq 0}$$

félcsoportra, amelynek generátora

$$B = t_0 A - \ln \lambda.$$

Mivel  $S(1)$ -nek az 1 sajátértéke, ezért tegyük fel az elejétől, hogy  $t_0 = 1$  és  $\lambda = 1$ . Tekintsük most az

$$Y := \{y \in X : T(1)y = y\}$$

sajátalteret. Ez zárt altér,  $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariáns és a feltétel szerint nemtriviális. Másrészt, az  $Y$ -ra megszorított  $(T(t)|_Y)_{t \geq 0}$  félcsoport periodikus  $\tau \in \mathbb{N}^{-1}$  periódussal. A periodikus félcsoportok karakterizációjáról szóló 4.29. Tétel alapján létezik olyan  $n \in \mathbb{Z}$  szám, hogy

$$\mu := 2\pi i n \in P\sigma(A|_Y).$$

Mivel  $P\sigma(A|_Y) \subset P\sigma(A)$ , ezért kapjuk, hogy

$$1 \in e^{P\sigma(A)}.$$

Ebből és a (4.20) tartalmazásból következik (4.24).

A reziduális spektrumra vonatkozó (4.25) egyenlőség hasonlóan adódik az ún. duális félcsoportra vonatkozó megfontolásból, itt nem részletezzük.  $\square$

Mivel a pont- és reziduális spektrumra teljesül a spektrálleképezés-tétel, ezért ha a teljes spektrumra szeretnénk spektrálleképezés-tételt bizonyítani, akkor ezt például olyan félcsoporthoz tehetjük meg, amelyekre

$$\sigma(T(t)) = P\sigma(T(t)) \cup R\sigma(T(t))$$

teljesül. Ilyenek például a kompakt félcsoporthoz.

Kereshetünk azonban olyan további félcsoporthoz-tulajdonságo(ka)t, amely(ek) biztosítják, hogy

$$(4.26) \quad A\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{tA\sigma(A)}$$

fennálljon. Az alábbiakban ki fog derülni, hogy a normafolytonosság a legáltalánosabb alkalmas tulajdonság. Mielőtt azonban ezt bizonyítanánk, karakterizáljuk azokat az approximatív sajátértékeket, amelyek nem okoznak problémát a spektrálleképezés-tételben.

**4.35. Lemma.** *Legyen  $\mu \neq 0$  a  $T(t_0)$  operátor egy approximatív sajátértéke. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik egy olyan  $(x_n) \subset X$  sorozat, amelyre  $\|x_n\| = 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t_0)x_n - \mu x_n\| = 0, \quad \lim_{t \downarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| = 0.$$

(ii) *Létezik  $\lambda \in A\sigma(A)$  szám, amelyre  $\mu = e^{\lambda t_0}$ .*

*Bizonyítás.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) : A (4.23) egyenlőségből belátható, hogy a  $\lambda \in A\sigma(A)$  számhoz tartozó tetszőleges  $(x_n) \subset D(A)$  approximatív sajátvektor teljesíti az (i) feltételt. Ugyanis,  $\|x_n\| = 1$  teljesül, továbbá,

$$\|T(t_0)x_n - \mu x_n\| \leq \int_0^{t_0} \|e^{\lambda(t_0-s)}T(s)(\lambda - A)x_n\| ds \leq c\|(\lambda - A)x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

A második limeszhez írjuk fel a (4.23) egyenlőséget  $\lambda = 0$ -ra, és használjuk ki, hogy a feltétel szerint

$$\|Ax_n\| \rightarrow 0,$$

tehát az  $Ax_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  vektorok korlátosak! Így létezik olyan  $L > 0$  konstans

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| \leq \int_0^t \|T(s)Ax_n\| ds \leq t \cdot L, \quad t \in [0, 1].$$

Ebből

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| = 0$$

következik.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Átskálázással feltehető, hogy  $t_0 = 1$  és  $\mu = 1$ . Legyen  $(x_n) \subset X$  az (i) pont alapján létező approximatív sajátvektor. A  $(T(t))_{t \geq 0}$  operátorok  $(x_n)$ -en való egyenletes folytonosságból következik, hogy a

$$[0, 1] \ni t \mapsto T(t)x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

leképezések ekvifolytonosak. Legyenek  $\varphi_n \in X^*$ ,  $\|\varphi_n\| \leq 1$  olyan duális térbeli elemek, amelyekre

$$\varphi_n(x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Ekkor a

$$[0, 1] \ni s \mapsto \xi_n(s) := \varphi_n(T(s)x_n)$$

függvények egyenletesen korlátosak és ekvifolytonosak. Tehát, az Arzelà–Ascoli-tétel alapján a  $(\xi_n) \subset C[0, 1]$  függvénysorozatnak létezik (egyenletesen) konvergens részsorozata – jelölje ezt is  $(\xi_n)$ . Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n =: \xi \in C[0, 1].$$

Mivel

$$\xi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(0) \geq \frac{1}{2},$$

ezért  $\xi \neq 0$ . Így a  $\xi$  függvény Fourier-együtthatói közül valamelyik nem 0, vagyis létezik olyan  $\lambda_m := 2\pi im$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  szám, amelyre

$$\int_0^1 e^{-\lambda_m s} \xi(s) \, ds \neq 0.$$

Legyen

$$z_n := \int_0^1 e^{-\lambda_m s} T(s)x_n \, ds.$$

Ekkor a 2.4. Lemma (c) pontja alapján  $z_n \in D(A)$ . Továbbá,

$$(\lambda_m - A)z_n = x_n - e^{-\lambda_m} T(1)x_n = x_n - T(1)x_n \rightarrow 0$$

az (i) feltétel szerint. Másrészt,

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| &\geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z_n) \\ &\geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 e^{-\lambda_m s} \varphi_n(T(s)x_n) \, ds \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 e^{-\lambda_m s} \xi(s) \, ds \right| > 0.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az  $A$  generátornak a  $\lambda_m = 2\pi im$  szám approximatív sajátértéke, egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor pedig a

$$\left( \frac{z_n}{\|z_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sorozat. □

**4.36. Tétel** (Spektrálleképezés normafolytonos félcsoporthoz). *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  normafolytonos félcsoporthoz generátora. Ekkor*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* A 4.33. és a 4.34. Tételek miatt, valamint átskálázás után elegendő az alábbi megmutatni:

Ha  $1 \in A\sigma(T(1))$ , akkor létezik olyan  $m \in \mathbb{Z}$  egész, hogy  $\lambda_m := 2\pi im \in A\sigma(A)$ .

Ennek bizonyításához vegyünk a  $T(1)$  operátornak egy 1-hez tartozó approximatív sajátvektorát, vagyis legyen

$$\|x_n\| = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \|T(1)x_n - x_n\| \rightarrow 0.$$

Továbbá, tegyük fel, hogy  $t \mapsto T(t)$  normafolytonos  $t \geq t_0$  esetén. Legyen  $k \in \mathbb{N}$  olyan, amelyre  $t_0 < k$ . Ekkor

$$\begin{aligned}\|T(k)x_n - x_n\| &= \|T(k)x_n - T(k-1)x_n + T(k-1)x_n - T(k-2)x_n + \cdots + T(1)x_n - x_n\| \\ &\leq (\|T(k-1)\| + \|T(k-2)\| + \cdots + \|T(1)\|) \cdot \|T(1)x_n - x_n\| \rightarrow 0,\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ . A feltevésünk szerint a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoporthoz egyenletesen folytonos a  $(T(k)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vektorokon, továbbá a  $(T(k)x_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vektorokon is, mivel ez utóbbiak nullsorozatot alkotnak. Így a félcsoporthoz egyenletesen folytonos az

$$x_n = T(k)x_n - (T(k)x_n - x_n)$$

vektorokon is, ezért az állítás adódik a 4.35. Lemmából. □



**4.37. Következmény.** Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  normafolytonos félcsoporth generátora. Ekkor

$$(SKeNK) \quad s(A) = \omega_0.$$

A (2.40) diagram alapján számos félcsoporthregularitási tulajdonságból következik a normafolytonosság, tehát ilyen esetekben is teljesül a spektrálleképezés-tétel.

**4.38. Következmény.**  $A$

$$(SLT) \quad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

spektrálleképezés-tétel, és a

$$(SKeNK) \quad s(A) = \omega_0.$$

egyenlőség teljesül az alábbi esetekben:

- (a) kompakt félcsoporthok,
- (b) differenciálható félcsoporthok,
- (c) analitikus félcsoporthok,
- (d) egyenletesen folytonos félcsoporthok.

A félcsoporthok aszimptotikus tulajdonságainak vizsgálatokor valójában az (SKeNK) tulajdonság lényeges. Ez pedig következik az (SLT)-nél gyengébb ún. *gyenge spektrálleképezés-tétel*ből is:

$$(GySLT) \quad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

Belátjuk, hogy a szorzásfélcsoporthra fennáll a spektrálleképezés-tétel ezen gyengébb verziója.

**4.39. Állítás.** Legyen az  $M_q$  operátor egy  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  szorzásfélcsoporth generátora az  $X = C_0(\Omega)$  vagy  $X = L^p(\Omega)$  téren egy megfelelő  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  függvénnyel. Ekkor

$$(GySLT) \quad \sigma(T_q(t)) = \overline{e^{t\sigma(M_q)}}, \quad t \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Az 1.33. ill. az 1.38. Állítások (d) pontjában láttuk, hogy egy szorzásoperátor spektruma a  $q$  függvény (lényeges) képhalmazának lezártja, tehát

$$\sigma(T_q(t)) = \overline{e^{tq(\text{ess})}(\Omega)} = \overline{e^{tq(\text{ess})}(\Omega)} = \overline{e^{t\sigma(M_q)}}$$

minden  $t \geq 0$  esetén. □

**4.40. Példa.** Egyszerű és tipikus példa szorzásoperátorra

$$M_q((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) := (inx_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

ahol  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ . Ekkor

$$\sigma(M_q) = i\mathbb{Z},$$

másrészt

$$\sigma(T_q(t)) = \Gamma, \quad \text{ha } \frac{t}{2\pi} \notin \mathbb{Q},$$

ahol  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  az egységkörvonal. Tehát (GySLT) fennáll, de (SLT) nem teljesül.

A Halmos-féle spektráltétel szerint egy Hilbert-téren értelmezett normális operátor mindig izomorf egy szorzásoperátorral egy alkalmas  $L^2$ -téren. Így az ilyen operátorokra is teljesül (GySLT).

**4.41. Következmény.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  egy Hilbert-téren értelmezett normális operátorokból álló erősen folytonos félcsoport, generátora  $(A, D(A))$ . Ekkor

$$(GySLT) \quad \sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(A)}}, \quad t \geq 0.$$

Ugyan azok az erősen folytonos csoportok, amelyek nem korlátos generátorral rendelkeznek, egyetlen, a 4.38. Tételben felsorolt regularitási tulajdonsággal sem rendelkeznek, korlátos csoportokra mégis igaz a spektrálleképezés-tétel gyenge verziója.

**4.42. Tétel.** Legyen  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  korlátos erősen folytonos csoport az  $X$  Banach-téren, generátora  $(A, D(A))$ . Ekkor a gyenge spektrálleképezés-tétel teljesül, tehát

$$(GySLT) \quad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

A fejezet végén röviden azt tárgyaljuk, hogy mit tudunk mondani a perturbált fél-csoport spektrumáról.

**4.43. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport, generátora  $(A, D(A))$ . Legyen  $B \in \mathcal{L}(X)$  tetszőleges. Ekkor ha  $\lambda \in \rho(A)$ , akkor*

$$\lambda \in \sigma(A + B) \iff \lambda \in \sigma(BR(\lambda, A)) \iff \lambda \in \sigma(R(\lambda, A)B).$$

*Bizonyítás.* Az állítás következik az alábbi egyenlőségből:

$$\lambda - A - B = (\text{Id} - BR(\lambda, A))(\lambda - A)$$

és abból, hogy

$$\sigma(BR(\lambda, A)) \setminus \{0\} = \sigma(R(\lambda, A)B) \setminus \{0\}.$$

□

Ez alapján ha  $(S(t))_{t \geq 0}$  jelöli az  $A + B$  által generált félcsoportot, akkor

$$(SLT) \quad \sigma(S(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A+B)}, \quad t \geq 0.$$

spektrálleképezés-tétel például a 3.9. vagy a 3.10. Állítások feltételei mellett.

## 4.4. Feladatok

**4.1. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi operátorok spektrumát az  $X = C[0, 1]$  Banach-téren!

- (a)  $Af(s) := \frac{1}{s(1-s)} \cdot f(s)$ ,  $D(A) = \{f \in X : Af \in X\}$ ;
- (b)  $Bf(s) := is^2 \cdot f(s)$ ,  $D(B) = X$ ;
- (c)  $Cf := f'$ ,  $D(C) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = 0\}$ ;
- (d)  $Df := f'$ ,  $D(D) = \{f \in C^1[0, 1] : f'(1) = 0\}$ ;
- (e)  $Ef := f'$ ,  $D(E) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1)\}$ ;
- (f)  $Ff := f'$ ,  $D(F) = \{f \in C^1[0, 1] : f'(0) = f'(1)\}$ ;
- (g)  $Gf := f''$ ,  $D(G) = C^2[0, 1]$ ;
- (h)  $Hf := f''$ ,  $D(H) = \{f \in C^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ ;
- (i)  $If := f''$ ,  $D(I) = \{f \in C^2[0, 1] : f'(0) = f''(1) = 0\}$ ;
- (j)  $Jf := f''$ ,  $D(J) = \{f \in C^2[0, 1] : f''(0) = 0\}$ .

**4.2. Feladat.** Legyen  $A$  egy operátor az  $X$  Banach-téren, és legyen  $B$  az  $A$  egy megszorítása. Mutassuk meg, hogy ha  $B$  szürjektív és  $A$  injektív, akkor  $A = B$ ! Ez az eset fennáll például, ha  $B \subset A$  és  $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$ .

**4.3. Feladat.** Tegyük fel, hogy valamely  $t_0 > 0$  esetén  $r(T(t_0)) \in P\sigma(T(t_0))$  teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az (SKeNK) egyenlőség fennáll, vagyis  $s(A) = \omega_0$ !

## 5. fejezet

# Félcsoportok aszimptotikája

Ebben a fejezetben a félcsoportelmélet egyik legfontosabb részével, a félcsoportok aszimptotikájával fogunk foglalkozni. Azt a kérdést vizsgáljuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$$

létezik-e, és ha igen, milyen topológiában.

Korábban láttuk, hogy az operátorfélcsoportok tulajdonképpen a

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= Au(t), \quad t \geq 0; \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

alakú absztrakt Cauchy-problémák megoldásai. Ezért aszimptotikus tulajdonságaik vizsgálata egyben ezen megoldások végtelenben való viselkedésének leírására szolgál.

### 5.1. Félcsoportok stabilitása

Stabilitás alatt azt értjük, hogy a  $T(t)$  operátorok 0-hoz tartanak, ha  $t \rightarrow \infty$ . Mivel azonban az operátorok (általában) végtelen dimenziós tereken vannak értelmezve, ezért meg kell különböztetnünk, hogy milyen értelemben vizsgáljuk a konvergenciát. Az 1.28. Definícióban már értelmeztük egy félcsoport *egyenletes exponenciális stabilitását*, és az 1.29. Állításban azt is láttuk, hogy egyenletesen folytonos operátorfélcsoportok esetén ez ekvivalens azzal, hogy a  $T(t)$  operátorok normái 0-hoz tartanak végtelenben. Most bevezetjük erősen folytonos operátorfélcsoportok különböző stabilitási fogalmait.

**5.1. Definíció.** A  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportról azt mondjuk, hogy

(a) *egyenletesen exponenciálisan stabil*, ha létezik  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0;$$

(b) *egyenletesen stabil*, ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0;$$

(c) *erősen stabil*, ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0, \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén};$$

(d) *gyengén stabil*, ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(T(t)x) = 0, \quad \text{minden } x \in X, \varphi \in X^* \text{ esetén.}$$

Idézzük fel a  $T = (T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport növekedési korlátjának definícióját!

$$\omega_0 = \omega_0(T) = \inf \left\{ w \in \mathbb{R} : \exists M_w \geq 1, \text{ melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot e^{wt}, t \geq 0 \right\}$$

**5.2. Állítás.** Egy félcsoport pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha

$$(5.1) \quad \omega_0 < 0.$$

*Bizonyítás.* Ha a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil, akkor  $t \rightarrow \infty$  esetén  $e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \rightarrow 0$ , így létezik olyan  $t_0 > 0$ , hogy

$$e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \leq 1, \quad t > t_0.$$

Mivel  $\sup_{t \in [0, t_0]} \|T(t)\|$  korlátos, ezért létezik olyan  $M \geq 1$ , amelyre  $e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \leq M$ , így  $\|T(t)\| \leq M e^{-\varepsilon t}$  teljesül minden  $t \geq 0$  esetén. Tehát  $\omega_0 < 0$ .

Megfordítva, ha  $\omega_0 < 0$ , akkor létezik olyan  $w < 0$ ,  $M \geq 1$ , amelyekre

$$\|T(t)\| \leq M \cdot e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$e^{-\frac{w}{2}t} \|T(t)\| \leq M \cdot e^{\frac{w}{2}t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

tehát  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil  $\varepsilon = -\frac{w}{2} > 0$  választással.  $\square$

Az alábbiakban kiderül, hogy a két egyenletes stabilitási fogalom ekvivalens egymással.

**5.3. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil;
- (ii)  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen stabil;
- (iii) Létezik  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0, \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén.}$$

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy (i)  $\Rightarrow$  (ii) és (i)  $\Rightarrow$  (iii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : A 4.18. Állítás szerint

$$e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\|, \quad t \geq 0,$$

ezért (ii)-ből következik, hogy  $\omega_0 < 0$ , tehát (i) teljesül.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Tegyük fel most, hogy (iii) fennáll. Ekkor az  $(e^{\varepsilon t} T(t))_{t \geq 0}$  operátorcsalád pontonként korlátos, tehát az egyenletes korlátosság tétele miatt egyenletesen is korlátos. Így létezik olyan  $M \geq 1$  szám, hogy

$$e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \leq M, \quad t \geq 0,$$

tehát

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| = 0,$$

vagyis (i) fennáll. □

A definícióból adódik, hogy az egyenletes stabilitásból következik a erős, abból pedig a gyenges stabilitás. A fordított állítások azonban nem igazak.

**5.4. Példa.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  a baleltolás-félcsoport  $X = L^p(\mathbb{R}_+)$ -on,  $1 \leq p < \infty$ . Ez a félcsoport erősen stabil, azonban

$$\|T(t)\| = 1, \quad t \geq 0,$$

tehát nem egyenletesen stabil.

A 4.18. Állításban láttuk, hogy

$$(5.2) \quad \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0))$$

minden  $t_0 > 0$  esetén. Ezek alapján könnyen igazolható a következő állítás.

**5.5. Állítás.** *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i)  $\omega_0 < 0$ , azaz  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$ , azaz  $(T(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen stabil;
- (iii) Létezik olyan  $t_0 > 0$ , amelyre  $\|T(t_0)\| < 1$  teljesül;
- (iv) Létezik olyan  $t_1 > 0$ , amelyre  $r(T(t_1)) < 1$  teljesül.

Vegyük észre, hogy az 5.3. Állítás (i), (ii), ill. (iii) pontjai éppen az 5.5. Állítás (i), (ii), ill. (iii) pontjaival ekvivalensek.

Nézzük most, mit mondhatunk a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x$$

pályák viselkedéséről! Az egyenletes exponenciális stabilitás ekvivalens azzal, hogy léteznek olyan  $M \geq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  számok, amelyekre

$$\|T(t)x\| \leq M e^{-\varepsilon t} \|x\|$$

minden  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  esetén. Ebből következik, hogy a  $\xi_x$  pályák  $L^p(\mathbb{R}_+, X)$ -beli függvények minden  $1 \leq p < \infty$  esetén, vagyis

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty$$

minden  $x \in X$  esetén. Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy ezen állítás megfordítása is igaz.

**5.6. Tétel** (Datko 1970, Pazy 1972). *Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport pontosan akkor egyenletes exponenciális stabil, ha valamely/minden  $p \in [1, \infty)$  esetén*

$$(5.3) \quad \int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty$$

*minden  $x \in X$  vektorra.*



*Bizonyítás.* Ha a félcsoport exponenciálisan stabil, akkor a korábbi meggondolás szerint (5.3) fennáll. A fordított irány bizonyításához az 5.5. Állítás alapján elég megmutatni, hogy ha (5.3) fennáll, akkor

$$(5.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$$

teljesül. Ebből a célból vezessük be a

$$T_n x := \chi_{[0,n]}(\cdot) T(\cdot) x, \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokat.

1. Megmutatjuk, hogy  $T_n \in \mathcal{L}(X, L^p(\mathbb{R}_+, X))$ . Ugyanis,

$$\begin{aligned} \|T_n x\|_{L^p}^p &= \int_0^\infty \|\chi_{[0,n]}(t) T(t) x\|^p dt = \int_0^n \|T(t) x\|^p dt \\ &\leq \int_0^n M_n^p \|x\|^p dt = n M_n^p \|x\|^p, \end{aligned}$$

ahol  $M_n = \sup_{t \in [0,n]} \|T(t)\|$ .

2. Belátjuk, hogy létezik olyan  $C > 0$ , amelyre az előbbi levezetésben  $n M_n^p \leq C^p$  teljesül minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén. A feltétel szerint minden  $x \in X$  vektorra a

$$\{T_n x : n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(\mathbb{R}_+, X)$$

halmaz korlátos, ugyanis például az

$$R := \int_0^\infty \|T(t) x\|^p dt$$

számmal a 0 középpontú,  $R$  sugarú zárt gömbben vannak. Tehát, az egyenletes korlátosság tétele miatt létezik olyan  $C > 0$  szám, hogy

$$\int_0^t \|T(r) x\|^p dr \leq C^p \|x\|^p, \quad x \in X, t \geq 0.$$

3. Most megmutatjuk, hogy a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport korlátos, tehát létezik olyan  $L > 0$ , hogy  $\|T(t)\| \leq L$  minden  $t \geq 0$  esetén. Az 1.54. Állítás alapján léteznek olyan  $M \geq 1$  és  $w > 0$  számok, amelyekre

$$\|T(t)\| \leq M \cdot e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

(Megjegyezzük, hogy ha  $w = 0$  is választható lenne, akkor a korlátosságot beláttuk. Ha pedig  $w < 0$  választható, akkor a tételt is beláttuk.) Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-pwt}}{pw} \cdot \|T(t)x\|^p &= \int_0^t e^{-pwr} \|T(r)T(t-r)x\|^p dr \\ &\leq \int_0^t M^p \|T(t-r)x\|^p dr \\ &\leq M^p C^p \|x\|^p, \quad x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Ebből, ha  $t \geq 1$ , akkor

$$\|T(t)x\|^p \leq \frac{pw}{1 - e^{-pw}} M^p C^p \|x\|^p, \quad x \in X.$$

Mivel  $\sup_{t \in [0,1]} \|T(t)\| < \infty$ , ezért kapjuk, hogy létezik olyan  $L > 0$  konstans, melyre

$$\|T(t)\| \leq L, \quad t \geq 0.$$

4. Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$ . Az előbbieket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t \|T(t)x\|^p &= \int_0^t \|T(t-r)T(r)x\|^p dr \\ &\leq \int_0^t L^p \|T(r)x\|^p dr \\ &\leq L^p C^p \|x\|^p, \quad x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$\|T(t)\| \leq LCt^{-\frac{1}{p}}, \quad t > 0,$$

amiből (5.4) következik. □

A fenti stabilitási kritériumok hátránya az, hogy ellenőrzésükhöz ismernünk kell a félcsoporthat. Márpedig legtöbb esetben csak a generátort vagy/és annak rezolvensét ismerjük. Ezért van szükségünk a spektrálméletre. Az 1.20. és az 1.30. Tételekben mátrix-ill. egyenletesen folytonos félcsoporthatokra mondtunk ki a generátor spektrálkorlátjára vonatkozó stabilitási kritériumokat, vagyis ezekben az esetekben az

$$(5.5) \quad s(A) < 0$$

feltétel ekviavelens az egyenletes (exponenciális) stabilitással. Az ellenpéldák (ld. a 4.32. Példát) mutatják, hogy ez általában tetszőleges félcsoportha nem teljesül. Másrészt, ha valamilyen (gyenge) spektrálleképezés-tétel teljesül a félcsoportha és generátorára, akkor  $\omega_0$  és  $s(A)$  egyenlő, tehát az (5.5) egyenlőtlenségből következik (5.1).

**5.7. Lemma.** *Ha a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoportha és  $(A, D(A))$  generátorára a gyenge spektrálleképezés-tétel teljesül, vagyis*

$$(GySLT) \quad \sigma(T(t) \cup \{0\}) = \overline{e^{t\sigma(A)}} \cup \{0\}, \quad t \geq 0,$$

*akkor*

$$s(A) = \omega_0$$

*is teljesül.*

*Bizonyítás.* Idézzük fel az (5.2) egyenlőséget:

$$\omega_0 = \frac{1}{t} \ln r(T(t)), \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Mivel a 2.22. Következmény szerint  $-\infty \leq s(A) \leq \omega_0$ , tegyük fel, hogy  $-\infty < \omega_0$ , és így

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{t} \ln \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T(t))\} = \frac{1}{t} \ln \sup\{|e^{t\lambda}| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \frac{1}{t} \ln \sup\{e^{t \operatorname{Re} \lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\left\{\frac{1}{t} \ln e^{t \operatorname{Re} \lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\} \\ &= s(A). \end{aligned}$$

□

Most kimondjuk a Ljapunov stabilitási tétel végtelen dimenziós változatát, ld. a 4.37. Következményt.

**5.8. Tétel.** *Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  normafolytonos félcsoportha pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha generátorának  $s(A)$  spektrálkorlátja negatív, vagyis*

$$s(A) < 0.$$

*Bizonyítás.* A 4.37. Következmény alapján  $s(A) = \omega_0$ , így az állítás az 5.2. Állításból adódik. □

A következő tétel Hilbert-téren értelmezett félcsoportokra mond ki olyan stabilitási feltételt, amelyhez nem szükséges a félcsoport ismerete.

**5.9. Tétel** (Gearhart 1978, Prüss 1984, Greiner 1985). *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport a  $H$  Hilbert-téren, legyen generátora  $(A, D(A))$ . Ekkor a félcsoport pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A),$$

és

$$(5.6) \quad M := \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

*Bizonyítás.* Ha  $\omega_0 < 0$ , akkor az (5.6) becslés a 2.17. Tételből következik. A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy a 4.11. Következmény alapján  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$  is teljesül, tehát az (5.6) becslés a rezolvensleképezés folytonossága miatt  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  esetén is igaz. Legyen  $w > |\omega_0| + 1$ , és tekintsük a

$$T_{-w}(t) := e^{-wt}T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoportot! Ekkor  $(T_{-w}(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil. A 2.17. Tétel (a) pontjából következik, hogy minden  $x \in H$ ,  $s \in \mathbb{R}$  esetén

$$R(w + is, A)x = R(is, A - w)x = \int_0^\infty e^{-ist} T_{-w}(t)x \, dt.$$

Az  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, H)$  Fourier-transzformációra

$$R(w + is, A)x = \mathcal{F}(T_{-w}(\cdot)x)(s),$$

ahol a  $T_{-w}(\cdot)$  operátorokat úgy terjesztjük ki  $\mathbb{R}$ -re, hogy  $T_{-w}(t) := 0$ , ha  $t < 0$ . Mivel a  $(T_{-w}(t))_{t \geq 0}$  félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil, ezért

$$T_{-w}(\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}, H).$$

A Plancherel-tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w + is, A)x\|^2 \, ds = 2\pi \int_0^{+\infty} \|T_{-w}(t)x\|^2 \, dt,$$

így létezik olyan  $L > 0$  szám, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w + is, A)x\|^2 ds \leq L^2 \|x\|^2$$

minden  $x \in H$  esetén. A (4.3) rezolvensegyenlőség miatt

$$R(is, A) = R(w + is, A) + wR(is, A)R(w + is, A)$$

minden  $s \in \mathbb{R}$  esetén, tehát

$$\|R(is, A)x\| \leq (1 + Mw) \cdot \|R(w + is, A)x\|$$

teljesül minden  $s \in \mathbb{R}$  és  $x \in H$  elemre. Így

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A)x\|^2 ds &\leq (1 + Mw)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w + is, A)x\|^2 ds \\ &\leq (1 + Mw)^2 \cdot L^2 \cdot \|x\|^2 \end{aligned}$$

minden  $x \in H$ -ra. Mivel  $\|T\| = \|T^*\|$  minden  $T \in \mathcal{L}(H)$  korlátos operátorra, ezért a kapott becslés igaz az adjungált  $(T^*(t))_{t \geq 0}$  félcsoport generátorára,  $A^*$ -ra is (ld. a 2.2.1. alpontot), vagyis

$$(5.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A^*)y\|^2 ds \leq (1 + Mw)^2 \cdot L^2 \cdot \|y\|^2$$

minden  $y \in H$ -ra.

A következőkben felhasználunk egy, a jegyzetben nem szereplő ún. *inverziós formulát*. Ez alapján minden  $x \in D(A^2)$  és  $y \in H$  esetén

$$\begin{aligned} (tT(t)x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(w+is)t} (R(w + is, A)^2 x, y) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} (R(is, A)x, R(-is, A^*)y) ds. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség a Cauchy-féle integrálformula alapján igaz, mivel  $R(\lambda, A)$  egyenletesen korlátos  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ -ra, és így

$$\|R(\lambda, A)x\| = \frac{1}{|\lambda|} \|R(\lambda, A)Ax + x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} (M\|Ax\| + \|x\|),$$

ha  $x \in D(A^2)$ . Felhasználva az (5.7) és az (5.8) becsléseket, valamint a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |(tT(t)x, y)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A)x\|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A^*)x\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(1 + Mw)^2 \cdot L^2}{2\pi} \cdot \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

minden  $x, y \in D(A^2)$  esetén. Mivel  $D(A^2)$  sűrű  $H$ -ban, ezért

$$\begin{aligned} \|tT(t)x\| &= \sup\{|(tT(t)x, y)| : x, y \in D(A^2), \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \frac{(1 + Mw)^2 \cdot L^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0,$$

így  $\omega_0 < 0$  az 5.5. Állítás alapján. □

A következő tétel korlátos félcsoportok erős stabilitásához szolgáltat a generátorra vonatkozó kritériumot. A feltételek között szerepel  $A$  ún. *Banach-adjungáltja*. Ezt az alábbi módon definiálhatjuk. A definícióban

$$\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x), \quad \varphi \in X^*, x \in X.$$

**5.10. Definíció.** Legyen  $(A, D(A))$  sűrűn definiált operátor az  $X$  Banach-téren. Ekkor  $A$  *adjungáltja*,  $A^*$  a következő operátor  $X^*$ -on:

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{x^* \in X^* : \exists y^* \in X^*, \text{ amelyre } \langle Ax, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle \text{ minden } x \in D(A) \text{ esetén}\}, \\ A^*x^* &:= y^*, \quad x^* \in D(A^*). \end{aligned}$$

**5.11. Tétel** (Arendt, Batty, Lyubich, Vñ, 1988). *Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  korlátos erősen folytonos félcsoport, generátora  $(A, D(A))$ . Ha*

1.  $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ ,
2.  $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$  megszámlálható,

*akkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen stabil, vagyis*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0, \quad \text{minden } x \in X\text{-re.}$$

*Bizonyítás.* Nem bizonyítjuk. □

## 5.2. Félcsoportok hiperbolicitása

Ebben az alfejezetben a korábban látott stabilitási tételekre alapozva megpróbáljuk a félcsoportokat egy *stabil* és egy *instabil* részre bontani. Általában ez természetesen nem mindig tehető meg, ezért szükségünk lesz az alábbi fogalomra.

**5.12. Definíció.** A  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoportról azt mondjuk, hogy *hiperbolikus* az  $X$  Banach-téren, ha  $X$ -et felbonthatjuk  $X_s$  és  $X_u$  zárt,  $T(t)$ -invariáns alterek direktösszegére, vagyis

$$(5.9) \quad X = X_s \oplus X_u,$$

és a felbontásra a következők teljesülnek:

- (a) Jelölje  $(T_s(t))_{t \geq 0}$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport megszorítását  $X_s$ -re. Ekkor  $(T_s(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil  $X_s$ -en.
- (b) Jelölje  $(T_u(t))_{t \geq 0}$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport megszorítását  $X_u$ -ra. Ekkor a  $T_u(t)$  operátorok invertálhatók  $X_u$ -n, és  $(T_u(t))_{t \geq 0}^{-1}$  egyenletesen exponenciálisan stabil  $X_u$ -n.

Könnyen belátható az alábbi állítás.

**5.13. Állítás.** Egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport pontosan akkor hiperbolikus, ha létezik egy  $P$  korlátos projekció  $X$ -en, továbbá  $M, \varepsilon > 0$  konstansok, hogy  $T(t)$  kommutál  $P$ -vel minden  $t$ -re,  $T(t) \ker P = \ker P$ , továbbá

$$(5.10) \quad \|T(t)x\| \leq Me^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0, x \in \operatorname{ran} P;$$

$$(5.11) \quad \|T(t)x\| \geq \frac{1}{M}e^{\varepsilon t}, \quad t \geq 0, x \in \ker P.$$

A következőkben a hiperbolicitást a félcsoport spektrumának segítségével jellemezzük.

**5.14. Állítás.** Legyen  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

- (i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  hiperbolikus;
- (ii)  $\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$  valamely/minden  $t > 0$  esetén, ahol  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  az egységkör.

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Ha  $(T(t))_{t \geq 0}$  hiperbolikus, akkor az (5.9) direktösszeg-felbontás miatt

$$\sigma(T(t)) = \sigma(T_s(t)) \cup \sigma(T_u(t)).$$

Mivel  $(T_s(t))_{t \geq 0}$  egyenletesen exponenciálisan stabil, ezért  $r(T_s(t)) < 1$ ,  $t > 0$ , így  $\sigma(T_s(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $r(T_u(t)^{-1}) < 1$ . Mivel

$$\sigma(T_u(t)) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T_u(t)^{-1})\},$$

ezért minden  $\lambda \in \sigma(T_u(t))$  esetén  $|\lambda| > 1$ , tehát  $\sigma(T_u(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Legyen  $h > 0$  olyan, hogy  $\sigma(T(h)) \cap \Gamma = \emptyset$ . Legyen  $P$  a

$$\{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| < 1\}$$

halmazhoz tartozó spektrálprojekció (ld. a 4.12. Definíciót). Ekkor az  $X$  tér felbomlik mint

$$X = X_s \oplus X_u,$$

ahol  $X_s = \text{ran } P$ ,  $X_u = \ker P$   $T(h)$ -invariáns alterek. Legyen  $T_s(h) \in \mathcal{L}(X_s)$  a  $T(h)$  operátor  $X_s$ -re való megszorítása. Ekkor

$$\sigma(T_s(h)) = \{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| < 1\},$$

tehát  $r(T_s(h)) < 1$ . Az 5.5. Állítás (iv) pontja szerint a

$$(T_s(t))_{t \geq 0} := (PT(t))_{t \geq 0}$$

félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil.

Hasonlóan, ha  $T_u(h) \in \mathcal{L}(X_u)$  jelöli a  $T(h)$  operátor  $X_u$ -ra való megszorítását, akkor

$$\sigma(T_u(h)) = \{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| > 1\},$$

tehát  $T_u(h)$  invertálható  $X_u$ -n. Ebből következik, hogy  $T_u(t)$  is invertálható, ha  $0 \leq t \leq h$ , míg ha  $t > h$ , akkor válasszunk olyan  $n$ -et, amelyre  $nh > t$ . Így

$$T_u(h)^n = T_u(nh) = T_u(nh - t)T_u(t) = T_u(t)T_u(nh - t),$$

tehát  $T_u(t)$  is invertálható, mivel  $T_u(h)$  is az. Továbbá,  $r(T_u(h)) > 1$ , és az 5.5. Állítás (iv) pontjából következik a  $(T_u(t))_{t \geq 0}^{-1}$  félcsoport egyenletes exponenciális stabilitása.  $\square$



A hiperbolicitás fenti karakterizációjához szükséges a félcsoporth ismerete. A következő tétel arról szól, hogy ha a spektrálleképezés-tételhez (ld. a 4.36. Tételt ill. az (SLT) feltételt) hasonló összefüggés áll fenn a félcsoporthra, akkor az  $A$  generátor ill.  $\sigma(A)$  ismeretében is eldönthető a hiperbolikusság.

**5.15. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora. Tegyük fel, hogy a  $\sigma(A)$  és a  $\sigma(T(t))$  spektrumok kielégítik az alábbi összefüggést:*

$$(5.12) \quad \sigma(T(t)) \subset \Gamma \cdot e^{t\sigma(A)} = \{ze^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A), |z| = 1\}, \text{ minden } t \geq 0\text{-ra.}$$

*Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

- (i)  $(T(t))_{t \geq 0}$  hiperbolikus;
- (ii)  $\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$  egy/minden  $t > 0$  esetén;
- (iii)  $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ .

*Bizonyítás.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) : Az 5.14. Állításban láttuk.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : A 4.33. Tétel szerint minden félcsoporthra teljesül.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Könnyen látható, hogy az (5.12) tartalmazás fennállása esetén teljesül.  $\square$

Hilbert-terek esetén az 5.9. Gearhart–Prüss–Greiner-tételt felhasználva az (5.12) feltételt az imaginárius tengelyre megszorított rezolvens normájának becslésével helyettesíthetjük.

**5.16. Tétel.** *Legyen  $(A, D(A))$  a  $(T(t))_{t \geq 0}$  erősen folytonos félcsoporth generátora a  $H$  Hilbert-téren. Ekkor  $(T(t))_{t \geq 0}$  pontosan akkor hiperbolikus, ha*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \text{ és } \|R(\lambda, A)\| \leq M, \lambda \in i\mathbb{R}.$$

## 5.3. Feladatok

**5.1. Feladat.** Jellemezzük a különböző stabilitási fogalmakat – a  $q$  függvény tulajdonságaiból kiindulva – az  $L^p(\mathbb{R})$ -en ill.  $C_0(\mathbb{R})$ -en értelmezett  $(T_q(t))_{t \geq 0}$  szorzásfélcsoportok esetén!

**5.2. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy gyengén stabil kompakt félcsoport szükségképpen egyenletesen exponenciálisan stabil!

**5.3. Feladat.** Legyen  $A$  egy Hilbert-téren értelmezett erősen folytonos félcsoport generátora. Mutassuk meg, hogy félcsoport növekedési korlátjára

$$\omega_0 = \inf \left\{ \lambda > s(A) : \sup_{s \in \mathbb{R}} \|R(\lambda + is)\| < \infty \right\}.$$

**5.4. Feladat.** Igazoljuk, hogy az 5.12. Definícióban szereplő direktösszeg-felbontás teljesül, ha

$$\sigma(T(t)) \cap \alpha\Gamma = \emptyset$$

fennáll valamely  $\alpha > 0$  esetén. (Segítség: Skálázzuk át a félcsoportot és az (5.10) és az (5.11) becsléseket!)

**5.5. Feladat.** Tegyük fel, hogy a  $(T(t))_{t \geq 0}$  félcsoport kielégíti az (5.10) és az (5.11) becsléseket egy olyan  $P$  korlátos projekcióval, ami kommutál  $T(t)$ -vel minden  $t \geq 0$  esetén. Tegyük fel, hogy valamely  $t_0 > 0$  számra a  $T(t_0)$  operátor  $\ker P$ -re való  $T_u(t_0)$  megszorítása kompakt. Igazoljuk, hogy ekkor  $\dim \ker P < \infty$  és  $(T(t))_{t \geq 0}$  hiperbolikus!

**5.6. Feladat.** Legyen  $A$  egy  $(T(t))_{t \geq 0}$  hiperbolikus félcsoport generátora. Mutassuk meg, hogy  $A$  invertálható, és az inverzére

$$A^{-1}x = \int_0^\infty T_u(t)^{-1}(\text{Id} - P)x \, dt - \int_0^\infty T_s(t)Px \, dt$$

teljesül! Igazoljunk hasonló előállítást az  $R(\lambda, A)$  operátorokra is  $\text{Re } \lambda < \varepsilon$  esetén, ahol  $\varepsilon$  az (5.10) és az (5.11) becslésekben szereplő konstans!

Jegyzetünket a félcsoporthelmélet „atyjaként” számontartott Einar Hille egyik híres idézetével zárjuk 1948-ból.

*„I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere. Friends have observed, however, that there are mathematical objects which are not semi-groups.”* Magyarul: *Üdvözlöm, ha látok egy félcsoporthot, és úgy tűnik, hogy mindenütt látom őket. Barátaim megfigyelték azonban, hogy vannak olyan matematikai objektumok, amelyek nem félcsoporthok.*

# Tárgymutató

Arendt–Batty–Lyubich–Vũ-tétel, 157  
autonóm determinisztikus rendszer, 5

Bochner-integrál, 12–13

Cauchy-féle függvényegyenlet, 5  
megoldása, 7, 11

Cauchy-probléma  
absztrakt, 66, 148  
enyhe (mild) megoldása, 67  
klasszikus megoldása, 67  
korrekt kitűzésű (well-posed), 68

Chernoff-szorzatformula, 112, 113

core, 39

csoport  
generátora, 54  
korlátos, 145

Datko–Pazy-tétel, 151

disszipatív operátor, 56  
és dualitási halmaz, 59

dualitási halmaz, 59  
példák, 61

Dyson–Phillips-sor, 88

Első Trotter–Kato approximációs tétel, 105  
eltolás-félcsoport, 21, 23  
generátora, 47

nem egyenletesen folytonos, 22  
spektruma, 130  
stabilitása, 150

Feller–Miyadera–Phillips-tétel, 52  
félcsoport

(altérre) megszorított, 29, 45  
adjungált, 29, 45  
analitikus, 69, 74, 75  
korlátos, 70, 73

definíció, 15

delay (késleltetett), 64, 133

differentiálható, 75

diffúzió, 47, 48

egyenletesen exponenciálisan stabil, 16,  
149, 151

egyenletesen folytonos, 16

egyenletesen stabil, 149, 151

egyparaméteres, 9

eltolás, 21, 23, 47, 130, 150

erősen folytonos ( $C_0$ ), 24

erősen stabil, 149

generátora, 33

gyengén stabil, 149

használó, 29, 44

hiperbolikus, 158, 160

hányados, 29, 45

- kompakt, 78
- nilpotens, 23, 81
- normafolytonos, 77
- periodikus, 135
- stabil, 14, 148
- szorzat, 29, 45
- szorzás, 46, 144
- szorzás,  $C_0(\Omega)$ -n, 18
- szorzás,  $L^p(\Omega)$ -n, 20
- átskálázott, 29, 44
- Gearhart–Prüss–Greiner-tétel, 155
- generátor, 33
  - csoporté, 54
  - kompakt rezolvensű, 80
  - korlátos analitikus félcsoporthé, 73
  - önadjungált, 61
- Hille–Yosida-tétel, 49
  - kvázikontraktív eset, 51
- izolált szingularitás, 127
- izometriacsoport, 52
- karakterisztikus egyenlet, 134
- karakterisztikus függvény, 134
- konstansvariációs formula, 87
- lineáris dinamikai rendszer, 8
- Ljapunov-tétel, 14
- Lumer–Phillips-tétel, 58
- lényeges rész, 39
- Második Trotter–Kato approximációs tétel, 107
- Normafolytonos félcsoporthé stabilitása, 154
- növekedési korlát, 27, 129, 151
  - egyenletesen exponenciálisan stabil, 149
- operátor
  - $A$ -kompakt, 91
  - $A$ -korlátos, 90
  - adjungáltja, 157
  - delay (késleltetett), 64
  - disszipatív, 56
  - elsőrendű differenciáloperátor, 63
  - gráfja, 35
  - kiterjesztése, 56
  - kompakt rezolvensű, 78, 79, 128, 134
  - lezárható, 56
  - lezártja, 56
  - lényeges része, 39
  - másodrendű differenciáloperátor, 65
  - rezolvense, 39, 119
  - rezolvenshalmaza, 39, 119
  - része, 125
  - spektruma, 39, 119
  - spektrálkorlátja, 43, 128
  - szektoriális, 71
  - Volterra, 87
  - zárt, 35
- periodikus félcsoporthé, 135
  - karakterizációja, 136
  - periódusa, 135
- perturbáció
  - $A$ -kompakt, 91
  - $A$ -korlátos, 90, 91
  - Desch–Schappacher, 97

korlátos, 84, 89  
 Miyadera–Voigt, 99  
 normafolytonos félcsoporthé, 90  
 spektruma, 146  
 Post–Widder inverziós formula, 114  
 pszeudorezolvens, 102, 103  
 pálya, 24  
 pólus, 127  
 reziduum, 127  
 rezolvens, 39, 119  
     integrál-reprezentációja, 41  
     korlátos, 39  
 rezolvens egyenlőség, 120  
 rezolvens halmaz, 39, 119  
     nyílt, 39, 120  
 rezolvens leképezés, 120  
     analitikus, 120  
 sajátvektor, 121  
     approximatív, 122  
 sajátérték, 121  
     approximatív, 121, 141  
 spektrum, 39, 119  
     approximatív pontspektrum, 121  
     delay-operátoré, 134  
     felosztása, 123  
     pontspektrum, 121  
     reziduális spektrum, 123  
     zárt, 39  
 spektrálfelbontás, 124, 125  
 spektrálkorlát, 43, 128  
     és növekedési korlát, 43, 129, 130, 132,  
         138, 144, 154  
 Spektráleképezés-tétel, 138, 144  
     egyenletesen folytonos félcsoporthé, 17  
     gyenge, 144  
         Hilbert-téren, 145  
     korlátos csoporthé, 145  
     szorzásfélcsoporthé, 144  
         és spektrálkorlát, 154  
     normafolytonos félcsoporthé, 143  
     perturbált félcsoporthé, 146  
     pont- és reziduális spektrumra, 140  
     rezolvensre, 123  
 spektrálprojekció, 124, 127  
 spektráltartalmazás, 139  
 szektor, 69  
 Szoboljev-terek  
      $-n$ -edik, 94  
      $n$ -edik, 92  
     szorzásfélcsoporthé, 95  
     és félcsoporthék, 93, 95  
 szorzásfélcsoport, 18, 20, 144  
     erősen folytonos, 19, 21  
     generátora, 46  
     regularitása, 81  
 szorzásoperátor, 18, 20  
 Trotter-szorzatformula, 115  
 Tételek  
     Zárt gráf, 38  
     Arendt–Batty–Lyubich–Vũ, 157  
     Chernoff, 112, 113  
     Datko–Pazy, 151  
     Desch–Schappacher, 97  
     Feller–Miyadera–Phillips, 52

Gearhart–Prüss–Greiner, 155  
 Generátor rezolvensének integrál-reprezentációja,  
     40  
 Hille–Yosida, 49  
 Hille–Yosida, kvázikontraktív, 51  
 Hiperbolikus félcsoporthat karakterizá-  
     ciója, 160  
 Korlátos perturbáció, 84  
 Ljapunov, 14  
 Lumer–Phillips, 58  
 Miyadera–Voigt, 99  
 Normafolytonos félcsoporthat stabilitása, 154  
 Periodikus félcsoporthat karakterizációja,  
     136  
 Post–Widder, 114  
 Spektrálleképezés, 17, 123, 138, 140, 143,  
     144, 146  
     gyenge, 144, 145, 154  
 Spektráltartalmazás, 139  
 Trotter–Kato, első, 105  
 Trotter–Kato, második, 107  
 Trotter-szorzatformula, 115  
 Weierstrass approximációs, 109  
 Yosida-approximáció, 49, 109  
 zárt operátor, 35  
 Zártgráf-tétel, 38

# Irodalomjegyzék

- [EN00] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, 2000.
- [BKR17] A. Bátkai, M. Kramar Fijavž, A. Rhandi, *Positive Operator Semigroups*. Birkhäuser, 2017.
- [ISEM] 15th Internet Seminar on "Operator Semigroups for Numerical Analysis", elektronikus jegyzet <https://isem-mathematik.uibk.ac.at/isemwiki/index.php/Overview>