

Szakdolgozat

Héra Dorina
matematika – történelemtanár
osztatlan tanári mesterszak

2021.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi kar

Szakedolgozat

Valóságközei analízis feladatok a középiskolai oktatásban

Témavezető:

Dr. Sikolya Eszter
egyetemi adjunktus

Készítette:

Héra Dorina
matematika-történelemtanár
osztatlan tanári mesterszak

2021.

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Héra Dorina, HKX23D ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az

ELTE matematika-történelem osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2021. 04. 22.



a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés.....	1
II. Analízisoktatás a középiskolában	1
II. 1. Az analízis oktatásának előkészítése.....	3
II. 2. Analízis és tanterv	3
III. Sorozatokkal kapcsolatos valóságközeli feladatok.....	5
III.1. A feladatok megoldásához szükséges háttértudás	5
III.2. A HIV-fertőzés matematikája	6
III.3. A Fibonacci sorozat	10
IV. Szélsőérték-feladatok megoldása középiskolai tananyagban.....	15
IV.1. A feladatok megoldásához szükséges háttértudás	15
IV.1.1. Szélsőérték-meghatározás differenciálszámítással	15
IV.1.2. Másodfokú függvény szélsőértékeinek meghatározása	17
IV.1.3. Szélsőérték-meghatározás a számtani és mértani közép segítségével	18
IV.1.4. Hasznos tippek a szélsőérték-keresési feladatokhoz.....	19
IV.2. Szélsőérték-feladatok a középiskolai tankönyvekben, feladatgyűjteményekben ...	20
IV.2.1. [7.] feladatgyűjtemény 2215. feladata.....	20
IV.2.2. [4.] feladatgyűjtemény 6095. feladata.....	22
IV.2.3. [4.] feladatgyűjtemény 6099. feladata.....	24
V. Szélsőérték-feladatok az érettségiben.....	26
V.3.1. 2016. május 3. Emelt szint	27
V.3.2. 2018. október 16. Emelt szint.....	29
V.3.3. 2013.május 7. Középszint	31
VI. Vélemények az analízisoktatásról.....	32
VII. Irodalomjegyzék.....	34

I. Bevezetés

Tanárképzésem során és a gyakorlati helyeken töltött idő alatt azt tapasztaltam, hogy az analízis, mint témakör nem kap elegendő figyelmet korunk középiskolai tananyagában, ezért fontosnak tartom, az analízisoktatásra nagyobb figyelmet fektessünk. Úgy gondolom számos olyan feladat létezik az analízis témakörében, melyet a diákok nagyon jól tudnának hasznosítani a mindennapi életben vagy későbbi munkájuk során. Különösen így gondolom ezt a sorozatok és a szélsőérték-meghatározással kapcsolatos feladatok esetében.

Az analízis oktatása azért is fontos szereppel bír, mert a középiskolai éveinek befejezésével a tanulók többsége nem foglalkozik a matematikával, nem tudják a felsőoktatásban kiegészíteni ismereteiket, így a középiskolai alapozás nagyon fontos. A későbbi életükben a matematikai ismereteik hiányával szembesülnek akkor, amikor a természettudomány, ill. a technika területén akarják képezni magukat önművelődés útján vagy akár csak egy-egy érdekes újságcikket olvasnak és nincs meg hozzá az elegendő háttértudásuk.

A másik, amiért fontos számomra az analízis oktatása a középiskolai osztályokban az, hogy korunk munkavilágában elsődleges szempont a legtöbb munkahelyen a munkavállalóval szemben az analitikus gondolkodásmód elsajátítása, amelynek rendszerint a középiskolás évek végére már kifinomult képességnek kellene lennie és ez el is érhető kellő gyakorlással, sok „életszagú” példa feldolgozásával.

Dolgozatomban kitérek a középiskolában alkalmazott analízis feladatok szerepére, feladattípusaira. Munkámban bemutatok több valósághoz közeli analízis feladatot, gyakorlati alkalmazást, valamint kitérek ezek tanítási lehetőségeire is. A kétszintű érettségi matematika feladatait is áttekintem abból a szempontból, hogy az analízis feladatok miként, milyen gyakorisággal jelennek meg benne, külön kiemelve a szélsőérték-számítással kapcsolatos feladatokat.

II. Analízisoktatás a középiskolában

A középiskolai matematika tanításának egyik területe az analízis, amely a középfokú oktatásban négy fő témakör köré összpontosul: a sorozatok, a függvények határértéke és folytonosságával, a differenciálszámítás és az integrálszámítás. Az alábbi felsorolás tartalmazza a négy fő témakör altémaköreit.

A középiskolai matematikai analízis témakörei a következők:

- Sorozatok
 - sorozatok megadása
 - korlátos és monoton sorozatok
 - sorozatok és a velük végzett műveletek
 - nevezetes sorozatok
 - konvergens sorozatok
 - részsorozatok
 - a végtelen mint határérték
 - műveletek és határérték
 - az 'e' szám
 - a kör kerülete és területe
- Függvények határértéke és folytonossága
 - függvény korlátossága és határértéke
 - a végtelen mint függvényhatárérték
 - függvény végtelenben vett határértéke
 - függvény jobb- és baloldali határértéke
 - függvény folytonossága
 - függvény határértékének és a műveleteknek a kapcsolata
 - zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai
- Differenciálszámítás
 - a differenciálhányados
 - folytonosság és deriválhatóság kapcsolata
 - a derivált és a grafikon érintője
 - a legegyszerűbb elemi függvények deriváltja
 - differenciálható függvényekkel való műveletek
 - helyi és abszolút szélsőértékek
 - a derivált tulajdonságaival kapcsolatos középérték-tételek
 - a függvény deriváltja és monotonitása között fennálló kapcsolat
 - direkt módszer
 - magasabb rendű deriváltak
 - konvex és konkáv függvény ismeretek
 - deriváltak és a konvexitás kapcsolata

- teljeskörű függvényelemzés
- Integrálszámítás
 - alsó és felső közelítő összeg számítása
 - határozott integrálszámítás, tulajdonságai
 - az oszcillációs összeg meghatározása
 - a határozott integrál és a terület között fennálló kapcsolat vizsgálata
 - integrálfüggvény meghatározása
 - primitív függvények
 - alapintegrál számítások
 - integrálszámítás szabályai
 - az integrálszámítás alkalmazási területei
 - improprius integrálszámítás [10.]

II. 1. Az analízis oktatásának előkészítése

Azt leszögezhetjük, hogy az analízis tanítását és annak megalapozását nem a 11. évfolyamon kell elkezdni, hanem már a 9. évfolyamon. Az előkészítés a következő területeket érinti:

- a valós számokkal kapcsolatos ismeretek bővítése,
- az analízis definíció szintjén való értelmezéséhez elengedhetetlen algebrai műveleteket készség szintre való emelése,
- a függvény fogalmának elmélyítése,
- az analízis már elsajátított fogalmainak felhasználásával új fogalmak értelmezése és állítások igazolása. [9.]

II. 2. Analízis és tanterv

Az analízis oktatása az tantervi reformoknak köszönhetően hol több témakörét tekintve bekerült, hol kevesebb figyelmet kapott a középiskolai matematika tantervek tananyagában. A figyelem középpontjába voltaképp nem a rutinok elvégzése kerül, hanem maga a probléma megoldására alkalmazott matematikai eszközök, modellek megtalálása. Ez számos alkalommal feltételezések tesztelését, a próbák és ellenőrzések sorozatát jelenti.

A 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 3. melléklete tartalmazza a gimnazista tanulók oktatásának kerettantervét, amely a 2012-es Nemzeti Alaptantervhez igazodik.

A kerettanterv leírja, hogy a matematika oktatása során a cél a sajátos emberi gondolkodásmód kialakítása, az önálló, szervezett és logikus gondolkodás fejlesztése és formálása, valamint a matematika alkalmazására képes tudás elsajátítása. A matematika tantárgy oktatásának feladata a matematika eltérő arculatainak megismertetése a diákokkal. Ennek megfelelően a matematika alapvető célja a matematikai gondolkodás fejlesztése annak érdekében, hogy a tanulók meg tudják választani és gyakorlati szinten tudják alkalmazni a természeti és társadalmi jelenségek esetében az odaillő modelleket, a különböző gondolkodásmódokat és módszereket. A matematika tanítása során fejleszthető a tanulók absztrakciós és szintetizáló képessége is, kutatásom során erre is alkalmas feladatokat is mutattam a tanulóknak.

9-10. évfolyamon oktatott matematika 3. témakörében szerepel az összefüggések, függvények, sorozatok tematikai egység, amelyen belül sor kerül a függvényekkel, a függvényrajzoló programmal és a szélsőértékekkel való megismerkedésre.

11-12. évfolyamon jelentős szerepe van az elemző- és összegzőképesség kialakításának. E két évfolyamon fontos szerepet kapnak az előző évfolyamokon elsajátított ismeretek ismétlésének, begyakorlásának, készség szintre emelésének.

Viszont nem szerepel a matematika tantárgy keretén belül semmiféle utalás az analízis tanítására vonatkozóan. [11.]

A **2020-as NAT**-hoz igazodó kerettanterv a 2012-es NAT-hoz illeszkedő kerettantervhez hasonlóan tárgyalja a 9-12. évfolyamon a matematika deduktív jellegének jelentős szerepét, a logikus, rendszerezett gondolkodásmód kialakítását, fejlesztését. A kerettanterv kiemeli, hogy a matematika tanulásának-tanításának elsődleges, legalapvetőbb célkitűzése a tanulók mérlegelő gondolkodásnak, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségeinek és képességeinek fejlesztése.

9-10. évfolyamon tanított matematika témakörei között, a 2012-es NAT-hoz illeszkedő kerettantervhez hasonló módon, helyet kapott az összefüggések, függvények, sorozatok tematikai egység, amelyen belül sor kerül a függvényekkel és a szélsőértékekkel való megismerkedésre.

A 11-12. évfolyamon előtérbe helyeződik az absztraktabb, formálisabb gondolkodás fejlesztése. Ebben az időszakban a legfontosabb didaktikai célként jelenik meg a szimbolikus gondolkodás mélyebb elsajátítása. [11.]

Valóságközeli analízis feladatok

Szakdolgozatomnak a következő részében szeretnék bemutatni néhány gyakorlati, valóságközeli alkalmazást az analízis témaköréből. A bemutatott feladatok mind olyan típusúak, melyeket középiskolában nagyon jól fel lehet használni a motiváció felkeltésére, mivel a mindennapi életünk során előforduló problémákhoz kapcsolódnak. Így jól szemléltethető a diákoknak az, hogy miért is fontos a matematika tanulása, az összefüggések megértése. A feladatokban a szövegértési készség is nagyon jól fejleszthető, hiszen a feladatok matematikai része sokszor burkoltan jelenik meg és rávilágít a matematika felhasználhatóságának sokszínűségére.

A feladatok döntő többségét én is megoldottam közösen a diákokkal vagy hospitálásom során meg tudtam figyelni a feladatmegoldás lépéseit. A feladatok bemutatása után a tapasztalataimat is leírom, melyeket a tanórák alatt szereztem.

A feladatgyűjtemények, tankönyvek és az internet a témához kapcsolódó oldalainak áttekintése után a következő feladatokat tartottam a legfontosabbnak kiemelni, korosztályokra elkülönítve. Bemutatásuk előtt röviden szeretném áttekinteni a megoldásokhoz szükséges matematikai ismereteket, definíciókat, tételeket, melyeket a feladatok megoldása előtt meg kell tanítanunk a diákoknak.

A feladatok megoldásához a diákoknak tisztában kell lenniük több alapfogalommal az analízis témaköréből. Ezeket altémakörökre bontva mutatom be.

III. Sorozatokkal kapcsolatos valóságközeli feladatok

III.1. A feladatok megoldásához szükséges háttértudás

A sorozatokkal kapcsolatban az alábbiak a nélkülözhetetlen definíciók, tételek, melyek mindenképp szükségesek a feladatmegoldások során.

Definíció: Számsorozat.

A számsorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig számhalmaz. Az n pozitív egész számhoz hozzárendelt számot a sorozat n -edik tagjának nevezzük.

A sorozat jelölése: (a_n) . A sorozat n -edik tagjának jelölése: a_n .

Definíció: Rekurzív megadás.

Ha egy számsorozatnak ismerjük az első tagját vagy néhány első tagját, a többi pedig egy vagy több előtte lévő tag segítségével fejezzük ki egy képlettel, akkor a sorozat megadási módját rekurzívnak nevezzük.

Definíció: A számsorozat monotonitása.

Egy (a_n) számsorozatot monoton növekvőnek nevezünk, ha $\forall n \in N^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

A számsorozat szigorúan monoton növekvő, ha $\forall n \in N^+$ esetén $a_n < a_{n+1}$.

Egy (a_n) számsorozatot monoton csökkenőnek nevezünk, ha $\forall n \in N^+$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

A számsorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall n \in N^+$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

Definíció: Korlátosság.

Az a_n sorozat felülről korlátos, ha van olyan K valós szám, amelynél a sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő, azaz $a_n \leq K, \forall n$ esetén.

Az a_n sorozat alulról korlátos, ha van olyan k valós szám, amelynél a sorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő vele, azaz $a_n \geq k, \forall n$ esetén.

Egy sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

III.2. A HIV-fertőzés matematikája

[2.] feladatgyűjtemény 112. oldalon található feladata alapján

A következő feladat nagyon tanulságos a diákok számára nemcsak matematikai tekintetben, hanem egészségük, felelősségteljes gondolkodásuk szempontjából is, valamint a tárgyi koncentráció is nagyon jól megvalósítható a biológia tantárggyal.

Az AIDS az immunrendszer egy olyan betegsége, amelyet HIV-fertőzés okoz. A HIV-fertőzés lefolyása három szakaszra osztható, tulajdonképpen az utolsó szakaszát, mely nagyon súlyos lefolyású, nevezzük AIDS-nek. Ez a szakasz általában 2-3 évig szokott

tartani. Ma már számos hatékony gyógyszer létezik a betegség lefolyásának lassítására, de sajnos gyógyítani mai ismereteink szerint nem lehetséges.

1. a, Lineáris növekedés esetén az előző értékekhez mindig egy konstans érték adódik.

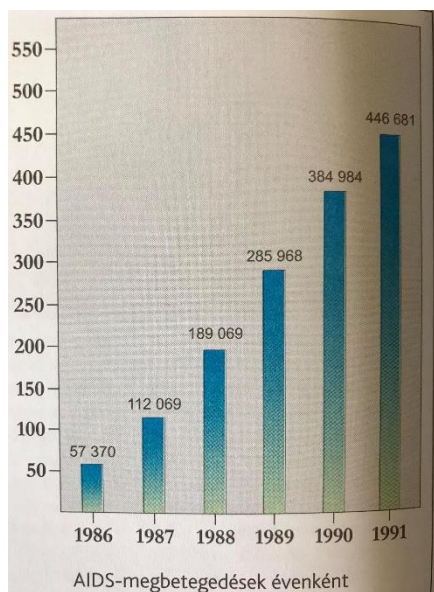
$N_{t+1} = N_t + k$, ahol N_t a mennyiség (a fertőzött személyek száma) a t időpontban, N_{t+1} a következő időpontban adott mennyiség, k a konstans.

- b, Exponenciális növekedés esetén nem konstans érték adódik az egyes időpontokban az előzőhöz, hanem egy, az előzőtől függő mennyiség.

$N_{t+1} = N_t + c \cdot N_t$, azaz $N_{t+1} = N_t(1 + c) = N_1(1 + c)^t$, ahol c a folyamatra jellemző tapasztalati úton meghatározható állandó.

Az a, és b, pontokban megadott rekurzív képletekben N_{t+1} -t fejezd ki az N_1 kezdeti érték, k , t és c segítségével!

2. Indokold meg, miért nem lineáris a megbetegedések éves számának emelkedése a mellékelt grafikonon!



3. Az Aids terjedése esetében figyelembe kell venni egyrészt azt is, hogy korlátozott számú személy betegedhet csak meg (pl. egy csoport vagy akár a világ lakossága). Másrészt, aki egyszer már megfertőződött, az még egyszer nem betegedhet meg. Így a már megfertőződött személyek száma a következőképpen számítható ki:

$$N_{t+1} = N_t + c \cdot S N_t \frac{P - N_t}{P}$$

ahol P azok száma, akik legfeljebb megfertőződhetnek (pl. egy bizonyos népcsoport). A fenti képlet segítségével számítsuk ki, hány ember fertőződhetett meg 1986 és 1991 között! Eredményeidet hasonlítsd össze a tényleges adatokkal!

$N_1 = 57\,372$, $P = 10^6$, $c = 0,95$. C a folyamatra jellemző tapasztalati úton meghatározható állandó, P azok száma, akik legfeljebb megfertőződhetnek.

4. Gyűjts adatokat korábbi évekről! Ábrázold az előbbiekkal együtt közös grafikonon! Mi lehet az oka a megfigyelt jelenségeknek?

Megoldás, megjegyzések

A feladat már csak azért is nagyon tanulságos, mert bemutatatható a diákoknak az, hogy mit jelent a lineáris, illetve az exponenciális növekedés, mi a kettő közötti tényleges különbség, miként befolyásolja ez mindennapi életünket.

1, Az első feladatrészt egyszerűen megoldható, csupán „játék a betűkkel” - ahogy a gyerekeknek szoktuk mondani. Rendezések, átalakítások után kapjuk:

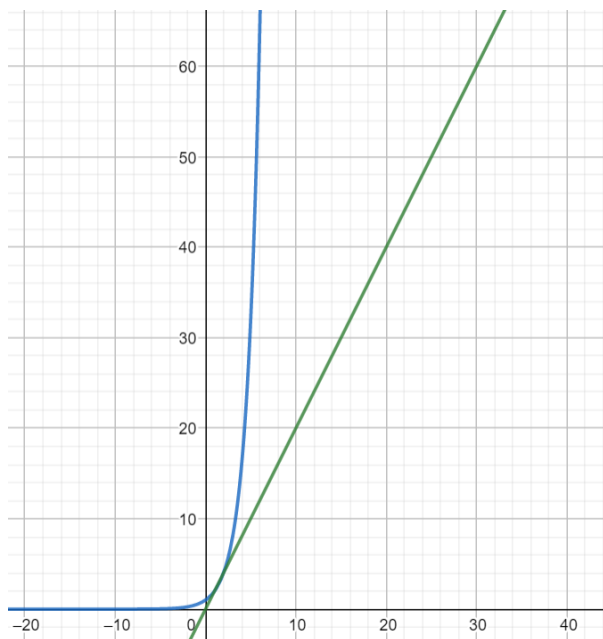
$$a, N_{t+1} = N_1 + kt$$

$$b, N_{t+1} = N_1(1 + c)^t$$

2, Ha ránézünk a fent mellékelt ábrára, alapvetően azt látjuk, hogy a megadott értékek nem egy egyenes mentén helyezkednek el (ekkor lenne ugye a növekedés lineáris, erre érdemes példát mutatni) hanem az őket összekötő képzeletbeli vonal erősen ível felfelé, vagyis egyre gyorsabb ütemben növekszik. Másként magyarázva, két egymás utáni érték különbségének abszolútértéke is nő, nem állandó.

Ha a diákok ennek hátterére kíváncsiak, elmagyarázhatjuk nekik a betegség azon komponensét, hogy a jövő évi betegségszám szorosan összefügg az adott év betegeinek számával, tehát a növekedés nem lehet lineáris.

Készítettem egy összehasonlító ábrát a növekedések bemutatásához, ami szemlélteti azt, hogy mekkora különbségek is lehetnek az exponenciális és a lineáris jelenségek között. A képen szereplő függvények: kék színnel 2^x és zölddel $2x$.



3, A harmadik feladatrészben a sorozat tagjait kellett meghatározni, amit egyszerű behelyettesítéssel megkaphatunk.

$$N_{1986} = 57372$$

$$N_{1987} = 57372 + 0,95 \cdot 57372 \cdot \frac{942628}{10^6} \approx 108749$$

$$N_{1988} = 200837$$

$$N_{1989} = 353282$$

$$N_{1990} = 570426$$

Gyors internetes kutatómunka után látjuk, hogy jelentős eltérés mutatkozik a tényleges adatok és az előbb kiszámoltak között. Ez azt mutatja, hogy valószínűleg a használt modellben nem elég pontosak az adatok, lehet, hogy az állandó értéke az, amin változtatni kellene. Érdekes lenne jobb közelítést keresnünk, ezt online kutatómunkába nyugodtan kiadhatjuk a diákoknak.

4, Szintén online tudunk a leggyorsabban adatokat keresni az elmúlt évek statisztikáiról. Az antsz.hu weboldalon megtaláljuk a legújabb adatokat. Kiemelésre érdemes, hogy csak a regisztrált esetekkel tudunk számolni, természetesen nem minden fertőzésről van tudomásunk, a tünetmentes fertőzöttek száma akár a négyszerese is lehet a regisztráltakénak. Sajnos az elmúlt években, a korábbi megtorpanás után ismét növekedő tendenciát tapasztalhatunk.

Úgy gondolom, ezért is fontos a diákoknak a feladat bemutatása, hogy tudatosan gondolkodjanak saját egészségükről.

III.3. A Fibonacci sorozat

[2] feladatgyűjtemény 84. oldala alapján

A Fibonacci sorozat témaköre is szorosan összefügg az analízissel és nagyon jól beépíthető a középiskolai matematika oktatásba. Jó kapcsolódási pontot nyújt a történelem, biológia és művészetek tantárgyakhoz is, megteremti a tárgyi koncentráció lehetőségét. Fontos megmutatni a diákoknak, hogy a sorozatok is kapcsolatba hozhatók a körülöttünk lévő világgal.

A Fibonacciról elnevezett sorozat a következő feladatból született:

Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül, és minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképpé és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?

A megoldást a következő táblázatból olvashatjuk ki, ahol n a hónapok számát, f_n az n -edik hónaphoz tartozó nyúlpárok számát tünteti fel:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

f_n elemek felírását e szabály szerint folytatva nyerjük a Fibonacci-sorozatot. Ennek képzési szabályát az előbbieket alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ és } f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Az 5-6. adattól már érdemes a diákokat kérdezni a rekurzív adatok jelentéséről, hogy ellenőrizzük megértették-e feladatot.

Feladatok:

[2.] feladatgyűjtemény 84. oldalon található feladata alapján

a, Ábrázold a Fibonacci sorozat elemeit koordináta rendszerben!

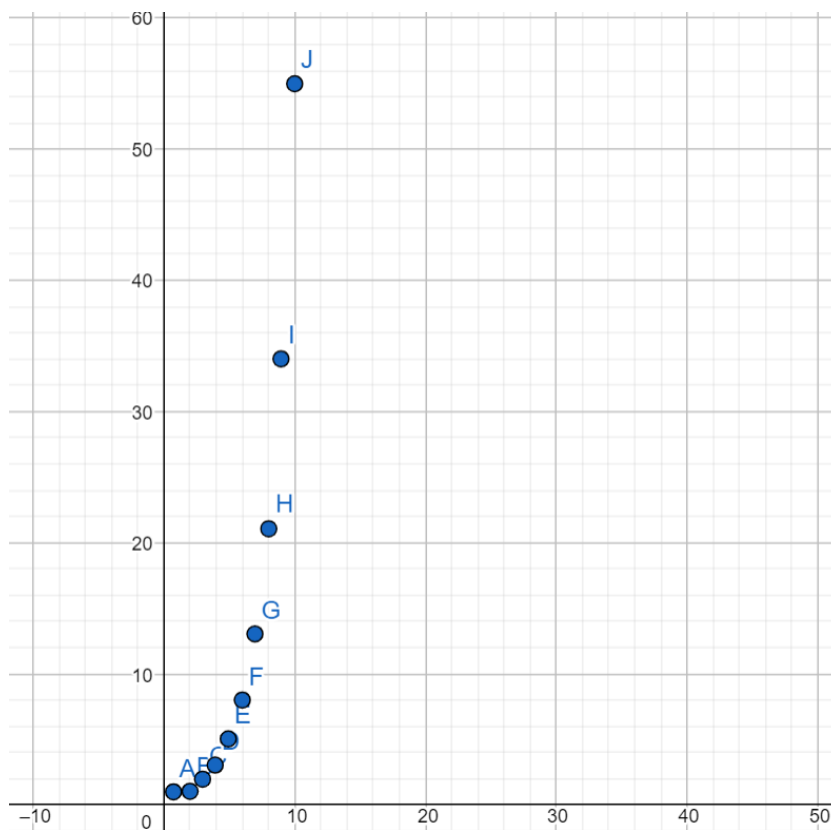
b, Oszd el egymással a Fibonacci sorozat szomszédos tagjait, add meg az első tizennégy hányadost, és vizsgáld meg a kapott értékeket!

c, A természetben és általában a környezetünkben számos helyen megtalálható az ún. Fibonacci-arány. Ez két, a Fibonacci-sorozatban szereplő elem hányadosát jelenti. A művészetben nagyon sokan tudatosan használják ezt az arányt. Keress a környezetben olyan részleteket, például bútorokon, épületeken, növényeken, amelyeken megfigyelhető a Fibonacci-arány.

d, Nézz utána ki volt Fibonacci és mikor élt!

Megoldások

a, Az elemeket először önállóan a füzetbe rajzolták fel, majd Geogebra segítségével kivetítettem mindenki számára. Fontos jelezni, hogy a pontokat ne kössék össze, ugyanis nem függvényről van szó.



b, A kapott hányadosok:

$$\frac{f_2}{f_1} = 1$$

$$\frac{f_3}{f_2} = 2$$

$$\frac{f_4}{f_3} = 1,5$$

$$\frac{f_5}{f_4} = 1,67$$

$$\frac{f_6}{f_5} = 1,6$$

$$\frac{f_7}{f_6} = 1,625$$

$$\frac{f_8}{f_7} = 1,62$$

$$\frac{f_9}{f_8} = 1,619$$

$$\frac{f_{10}}{f_9}=1,617 \qquad \frac{f_{11}}{f_{10}}=1,618 \qquad \frac{f_{12}}{f_{11}}=1,617 \qquad \frac{f_{13}}{f_{12}}=1,618$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}}=1,618 \qquad \frac{f_{15}}{f_{14}}=1,618$$

A Fibonacci sorozat egymást követő tagjainak hányadosa nem állandó, így nem beszélhetünk mértani sorozatról, de a tagok sorszámának növekedésével ez a hányados mégiscsak egy állandó értékhez közelít. Ezt az arányt nevezzük *aranymetszésnek*. Érdekes itt az aranymetszés fogalmával is megismertetni a diákokat, bár valószínűleg tanulmányaik ezen szakaszában már néhányan hallották ezt a fogalmat (pl. művészetek óra keretében), így támaszkodhatunk arra is, hogy valaki szívesen bemutatja ezt a többieknek.

c, A csoport által gyűjtött példák a Fibonacci sorozat, Fibonacci számok, Fibonacci spirál előfordulására:

- a virágszirmok száma: a liliomnak, a nősziromnak és a hármassziromnak három, a haranglábnak és a vadrózsának öt, a szarkalábnak és a pillangóvirágnak nyolc, a jakabnapi aggófűnek, a hamvaskának és a körömvirágnak 13, az őszi rózsának, a borzas kúpvirágnak és a cikóriának 21, a fodroslevelű margitvirágnak és egyes százszorszépeknek 34, más százszorszép-fajoknak pedig 55 vagy 89 szirma van
- a napraforgó tányérja: a magok elhelyezkedése- általában 34 spirális kanyarodik az egyik irányban, 55 a másikban és ezt láthatjuk például a csigákon is
- Fibonacci-spirálba rendeződnek például a fenyőtoboz és az ananász pikkelyei

d, Egyik diák kb. 5 percben bemutatta a Fibonacci sorozat történeti hátterét is, az általa kiemelt főbb pontok az alábbiak voltak.

Fibonacci eredeti neve Leonardo Pisano volt, matematikusként tevékenykedett Itáliában, a 12-13. század fordulóján. Ő honosította meg a hindu–arab számírást Európában. Sokan vélekednek róla úgy, hogy a középkor legtehetségesebb matematikusa volt. Leghíresebb műve a Liber Abacci volt, melyben bemutatta a fentebb megfogalmazott nyúltenyészet modelljét példaként. Ezt a problémakört róla nevezték el és a mai napig nagyon sok matematikus foglalkozik a Fibonacci-számok, sorozatok érdekességeivel.

Mivel a feladatok nem kizárólag csak a matematikai ismeretekre hagyatkoznak, ezért azok, akik kevésbé érdeklődtek a matematika iránt, ők is lelkesedéssel szokták fogadni ezt a tananyagot, feladattípust, könnyebben be tudtak ők is kapcsolódni a feladatmegoldásba.

Idén a digitális oktatás keretei között oldottuk meg ezt a feladatot, a c, és d, feladatrészt a házi feladat volt, amit a diákok önállóan dolgoztak fel. A tanulók rengeteg példát gyűjtöttek, nagyon lelkesek voltak az új ismeretek iránt, kizökkentés volt ez számukra a frontális oktatás kereteiből.

Fibonacci sorozatra vezető egyéb feladatok

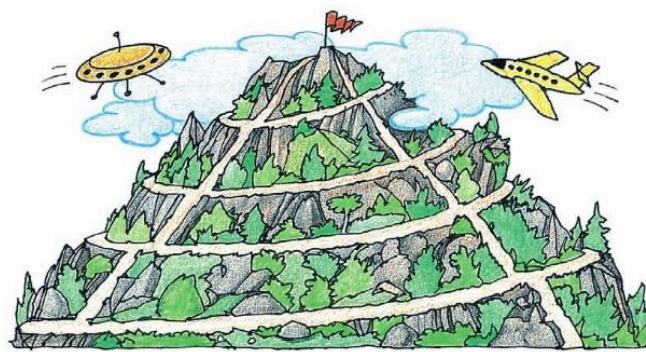
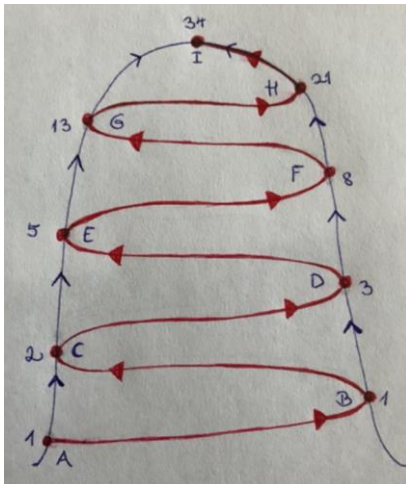
Az alábbi feladatok mind a Fibonacci-sorozat, Fibonacci-számok témakörével kapcsolatosak. Hasonlóan érdekesek, mint az előbb bemutatott, így vagy az órai keretben érdemes még egyet bemutatni vagy házi, illetve szorgalmi feladatnak is tökéletesen beilleszthetők, így azt is tudjuk vizsgálni, mennyire értették meg a feladatot a tanulók az órán, mennyire tudják önállóan alkalmazni a tanultakat, esetleg elmagyarázni a többieknek.

Kirándulás

[6.] tankönyv 10-11. oldalán található példa alapján

Egy kirándulás alkalmával a résztvevők egy hegyet másznak meg. A hegyre két meredek ösvény vezet, valamint egy szerpentin, amelyik több helyen találkozik az ösvényekkel. Ezeken a helyeken átjárhatóak a szerpentin és az ösvény (betűkkel jelölve). A résztvevők az A pontból indultak és az I-be kellett megérkezniük, úgy hogy mindig a szerpentin vagy az egyik ösvényen haladtak. Legfeljebb hányan lehettek, ha végül megállapították, hogy mindenki különböző úton jutott fel a hegy tetejére? (Két út különböző, ha legalább az egyik szakaszuk nem ugyanaz.)

A feladatot a mellékelt ábrákkal modellezhetjük, melyek közül az elsőt magam készítettem a feladat megoldásának segítéséhez és táblarajzként is nagyon jól alkalmazható.



[6.] 10. oldal

Megoldás

Érdemes felhívni a diákok figyelmét arra, hogy minden pontba annyiképp juthatunk el, mint az előző két pontba összesen, így sorban a pontokba vezető utak száma a Fibonacci-számokkal egyenlő.

Az ábra segítségével könnyen megállapítható az egyes pontokba vezető különböző utak száma és láthatjuk, hogy az I pontba 34 féle, különböző úton juthatunk el.

Vagyis a kiránduláson maximum 34-en vehettek részt, hogy mindenki más úton tudjon a célhoz érkezni.

Dominó játék

Házi feladatként feladhatunk egy hasonló feladatot, akár az alábbi dominós példát.

Hányféleképpen lehet egy $n \times 2$ -es téglalapot 1×2 -es dominókkal hézag nélkül lefedni?

A Fibonacci sorozat tulajdonságai

Néhány jellemző, amit érdemes átbeszélni a Fibonacci-sorozattal kapcsolatban, és a diákok háttértudása is megvan már ekkor hozzá.

- Korlátos-e a sorozat?

Mivel minden tagja pozitív és nagyobb, vagy egyenlő, mint 1, így alulról korlátos, viszont felső korlátja nincs. Ennek az indoklása kicsit nehezebb, de könnyen belátható, $f_n \geq n - 1$ és $n - 1$ -ről tudjuk, hogy az nem korlátos. Ha középiskolában szeretnénk

elmagyarázni, akkor a „rendőrelv” fogalmát is bevezethetjük, valószínűleg gyorsan meg fogják érteni diákjaink.

- Monoton-e a sorozat?

A definícióból következik, hogy a sorozat monoton növekszik, sőt a harmadik tagtól kezdve szigorúan monoton módon nő.

IV. Szélsőérték-feladatok megoldása középiskolai tananyagban

Középiskolai tanulmányok során több szinten és több feladattípuson keresztül találkozunk a szélsőérték-problémákkal. Ezekre a különböző évfolyamokon más-más megoldási módszereket tanulunk, alkalmazunk. A legérdekesebb, legvalóságghűbb feladatok zömmel a 12. évfolyamokon kerülnek elő, de korábban is bemutatunk kerül több feladatot, ami a témakörhöz kapcsolódik. Az emelt szinten tanulók számára a Mozaik tankönyvcsalád külön analízis tankönyvet és feladatgyűjteményt is készített, hogy a diákok a tudásukat gyarapítsák, elmélyítsék az analízis feladatok kapcsán, és felkészítse őket az egyetemi tanulmányokra is.

IV.1. A feladatok megoldásához szükséges háttértudás

A szélsőérték-feladatokat többféleképpen is megoldhatjuk, a megoldási módszerek jellemzően attól függenek, hogy milyen típusú osztályban, csoportban dolgozzuk fel a feladatokat. Sok feladat emelt szintű háttértudást kíván, különösen azok, melyeket csak differenciálszámítással tudunk megoldani. A következőkben bemutatok néhány megoldási módszert, melyeknél feltüntetem, hogy milyen szintű feldolgozásra javaslom, hol szokták a tantervi követelmények is elvárni az ezzel kapcsolatos feladatok megoldását.

IV.1.1. Szélsőérték-meghatározás differenciálszámítással

A legtöbb háttértudást igénylő eljárás a differenciálszámítás segítségével történő szélsőérték-meghatározás. Középiskolában ez emelt szintű csoportok / osztályok tananyaga, jellemzően a 12. évfolyamon kerül tárgyalásra. Hosszú alapozást igényel, ugyanis a differenciálszámítás fogalmát is ilyenkor szükséges elsajátítani. Általában sok gyakorlást igényelnek a differenciálszámítás segítségével megoldható feladattípusok, ugyanis jellemzően összetettek, komplex gondolkodást várnak el a diákoktól.

Definíció: Belső pont.

Egy P pont belső pontja az E halmaznak, ha van olyan P -t tartalmazó nyílt intervallum, mely része az E intervallumnak.

Definíció: Abszolút maximum, abszolút minimum.

Legyen f egy E halmazon értelmezett függvény. Az f függvénynek az E halmaz valamely c pontjában abszolút maximuma van, ha

$$f(x) \leq f(c), \text{ minden } x \in E \text{ esetén.}$$

Az E halmaz valamely c pontjában abszolút minimuma van, ha

$$f(x) \geq f(c), \text{ minden } x \in E \text{ esetén.}$$

Definíció: Lokális maximum, lokális minimum.

Az f függvény értelmezési tartományának egy c belső pontjában lokális maximuma van, ha van olyan c -t is tartalmazó nyílt intervallum, hogy annak minden x elemére teljesül $f(x) \leq f(c)$.

Az f függvény értelmezési tartományának egy c belső pontjában lokális minimuma van, ha van olyan, c -t is tartalmazó nyílt intervallum, amely minden x elemére teljesül $f(x) \geq f(c)$.

Az abszolút szélsőértékek egyúttal lokális szélsőértékek is, viszont ez fordítva nem feltétlenül teljesül.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f egyváltozós függvény differenciálható egy E intervallumon. Ha f -nek c -ben lokális szélsőértéke van, akkor

$$f'(c) = 0.$$

Ha a szükséges feltételen kívül az alábbi feltétel is teljesül, akkor az f függvénynek biztosan létezik szélsőértéke a c helyen:

$$f'(x) \text{ előjelet vált } c \text{-ben.}$$

Ha pozitívból vált negatívba, akkor a függvénynek lokális maximuma, ha negatívból vált pozitívba, akkor a függvénynek lokális minimuma van c -ben.

A szélsőérték nagyságát $f(c)$, azaz a vizsgált függvény c helyen vett helyettesítési értéke adja.

A függvények szélsőérték-helyének meghatározásában a második derivált is segítségünkre lehet.

Tétel: A második derivált és a lokális szélsőértékek.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható a c pontban.

Az alábbi feltételek a szélsőértékek létezésének elégséges feltételei.

1. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$ akkor f -nek lokális maximuma van az c pontban.
2. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$ akkor f -nek lokális minimuma van az c pontban.

Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor semmit nem tudunk a lokális szélsőérték létezésére vonatkozóan.

IV.1.2. Másodfokú függvény szélsőértékeinek meghatározása

A függvények szélsőérték-helyeit más módszerekkel is vizsgálhatjuk. Középiskolában általában másodfokú függvények esetében szoktunk más eljárást választani, aminek nem követelménye az emelt szintű matematika tudás, középszinten is jól alkalmazható, tanulható. Az itt tárgyalt fogalmak, tételek a tantervi hálóban a 10. évfolyamos tananyag részét képezik.

Definíció: Másodfokú függvény.

A másodfokú függvény egy olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f(x) = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$.

A függvény képe: parabola, melynek tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola lefelé nyitott (konkáv), ha $a < 0$: ebben az esetben a függvénynek abszolút maximuma van, valamint felfelé nyitott (konvex), ha $a > 0$: ebben az esetben a függvénynek abszolút minimuma van.

Ahhoz, hogy a szélsőértékeket meg tudjuk határozni, a hozzárendelési szabály átalakítása szükséges, melyeket algebrai módszerekkel tehetünk meg. Ezt a teljes négyzetté való kiegészítés módszerének nevezzük. Célunk az alábbi alakra hozás: $f(x) = a(x - u)^2 + v$, ahol u és v a parabola tengelypontjának első, illetve második koordinátája. Ezt a korábbi ismeretleneket használva így írhatjuk:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

$$\text{Tehát } u = -\frac{b}{2a} \text{ és } v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Tétel: *A másodfokú függvény szélsőértéke.*

A fentiekben definiált másodfokú függvénynek abszolút szélsőértéke van, az alábbi helyen:

$$x = -\frac{b}{2a}, \text{ ahol } a \text{ felvett függvényérték így számolható: } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Ha $a > 0$, akkor minimum, ha $a < 0$, akkor maximum a szélsőérték típusa.

Ezeknek a fogalmaknak, eljárásoknak a legkritikusabb része a teljes négyzetté alakítás szokott lenni, melyet folyamatosan, nemcsak egy-egy tananyaghoz kötve érdemes gyakoroltatni a diákokkal.

IV.1.3. Szélsőérték-meghatározás a számtani és mértani közép segítségével

Definíció: *Számtani (aritmetikai) közép.*

n darab nemnegatív szám számtani közepének nevezzük a számok összegének és az n számnak a hányadosát.

Jelölés: A

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Definíció: *Geometriai (mértani) közép.*

n darab nemnegatív szám mértani közepének nevezzük a számok szorzatának n -edik gyökét. Jelölése: G

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Tétel: *Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.*

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges nemnegatív számok, akkor az alábbi egyenlőtlenség áll fenn számtani és mértani közepük között:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = A$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \dots = a_n$.

A szélsőérték feladatok megoldása során ezt a tételt tudjuk felhasználni. Általában az egyenlőtlenség egyik oldala egy állandó kifejezés, amit a feladat szövegéből ki tudunk következtetni, az egyenlőtlenség másik oldala pedig akkor éri el a kívánt szélsőértéket (minimumot vagy maximumot), ha egyenlő egy adott értékekkel, amit jelen esetben a feladat

megad számunkra. Ez akkor lesz lehetséges a tétel szerint, ha a megadott a_n értékek egyenlők.

Mivel a bizonyítás elemi módszerekkel történik, ezért érdemes lehet a tétel kimondása után azt is bemutatni, ezzel is tudjuk már készíteni a diákokat az emelt szintű érettségi szóbeli részére. Elegendő két számra, a -ra és b -re megmutatnunk a diákoknak, ez számukra is sokkal könnyebben belátható és innen szóban kiterjeszteni n -re.

Bizonyítás

$$\sqrt{a \cdot b} = \frac{a + b}{2}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért mindkét oldalt négyzetre emelhetjük és ez az átalakítás ekvivalens.

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

Rendezzünk egy oldalra, vonjunk ki ab -t, hozzunk közös nevezőre, majd szorozzunk be 4-gyel!

$$0 \leq a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$$

$$0 \leq (a - b)^2$$

Két nemnegatív szám különbségének a négyzete pedig mindig nagyobb vagy egyenlő, mint nulla, ezt már könnyen vagy egy nagyon rövid magyarázat után belátják a diákok.

IV.1.4. Hasznos tippek a szélsőérték-keresési feladatokhoz

A megoldás során mindenképp figyelniünk kell az alábbiakban ismertetett egyéb körülményekre is.

- a) Figyelembe vesszük a vizsgálandó függvények értelmezési tartományát, értékészletét és a függvény menetét.
- b) Zárt intervallumon értelmezett függvényeknél megvizsgáljuk az értelmezési tartomány végpontjaiban felvett függvényértékeket is.

- c) Egy függvény szélsőértékhelye és típusa nem változik, ha a függvényt megszorozzuk egy pozitív számmal.
- d) Egy pozitív értékeket felvevő függvénynek és a négyzetének szélsőérték helye és típusa azonos.

IV.2. Szélsőérték-feladatok a középiskolai tankönyvekben, feladatgyűjteményekben

Az idei tanévben több matematika csoportban is volt lehetőségem tanítani, illetve hospitálni, megfigyelni a mentortanárom alapos és lelkes munkáját. A tanított csoportokat tekintve volt alapóraszámú és emelt óraszámú („faktos”), valamint kimondottan matematika specializációs csoport is (heti 7 óra matematika, bontott csoportban). Több szélsőérték feladat megoldására került sor, mind az én tanítási tevékenységemben, mind a mentoroméban, így lehetőségem volt látni azt, hogy melyek mozgatták meg jobban a diákokat, melyek keltették fel jobban a figyelmüket. Ezek közül szeretnék most bemutatni néhányat megoldásukkal, valamint a tanítási-tanulási folyamat során keletkezett megfigyeléseimmel együtt, amiket nagyon jól fogok tudni hasznosítani a következő években a tanári munkásságom során.

IV.2.1. [7.] feladatgyűjtemény 2215. feladata

Két négyzet területének összege 200 cm. Mennyi a négyzetek területösszegének minimuma?

Megoldás

A feladat alapvetően a 10. osztályos tananyagként került kitűzésre. A feladatok megoldásához több módszert is használhatunk, melyeket a tanév ezen részére már megtanultak a diákjaink.

Először a másodfokú függvény szélsőérték-helyeinek megkeresésének módszerét használjuk fel az első megoldási ötlethez.

A négyzetek oldalának hosszait jelöljük a -val és b -vel, így fel tudjuk írni a kerületek összegét, ami a feladat szövege szerint egyenlő 200-zal.

$$200 = 4a + 4b$$

Ebből könnyen megkapjuk: $a + b = 50$, így b -t is ki tudjuk fejezni, $b = 50 - a$.

A négyzetek területösszegét az alábbi módon fejezhetjük ki (itt fel szoktuk hívni a diákok figyelmét arra, hogy nem az összegük négyzetére gondol a feladat).

$$a^2 + b^2 = a^2 + (50 - a)^2 = 2a^2 - 100a + 2500 = 2(a - 25)^2 + 1250$$

Ez minimális, ha a négyzetes tag egyenlő nullával! Azaz $a = 25$, ekkor pedig b is egyenlő 25-tel.

Tehát a területösszeg minimuma: $a^2 + b^2 = 25^2 + 25^2 = 1250 \text{ cm}^2$

A második megoldási módszer alapján a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget kell felhasználnunk. A jelölés megegyezik a korábban használt jelöléssel.

A négyzetek területösszegét kifejezhetjük az alábbi módon: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. Ez akkor lesz minimális, ha $2ab$ maximális értéket vesz fel. A számtani és mértani közép definíciója és a köztük lévő egyenlőtlenség alapján felírhatjuk a következőt:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ átalakítás után } 2ab \leq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalának kiszámításához minden adatunk ismert, az egyenlő 1250-nel, ami azt jelenti, hogy a szorzat maximális értékéhez fenn kell állnia a $2ab = 1250$ egyenlőségnek. Így könnyen megoldhatunk egy kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszert, melynek megoldása az $a = b = 25$.

Az első megoldási módszer általában népszerűbb szokott lenni, mivel ott nincs szükségünk a számtani, mértani közép plusz definíciójára, amit sokan nehezen tudnak az ilyen típusú feladatokhoz hozzákapcsolni.

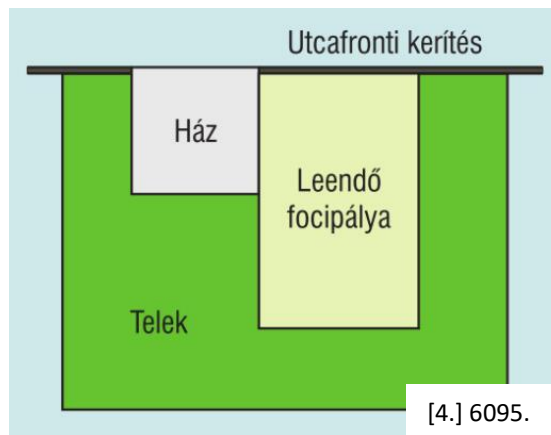
A 11-12. osztályos feldolgozásra javasolt Mozaik: Analízis feladatgyűjteményben [4.] is találunk valóságközelí analízis feladatokat. Általában ezt a feladatgyűjteményt csak az emelt órászos csoportokban dolgozzák fel, nekik van meg hozzá a megfelelő háttérismeretük. Érdemesebb lenne más korosztályoknak és csoportoknak is bemutatni, mert a diákok nagyon szeretik az ilyen és ehhez hasonló feladatokat, bár ezt a tanórai keretek kevésbé teszik lehetővé. Két feladatot szeretnék most ezek közül bemutatni, mindkettő a szélsőérték-számítással kapcsolatos.

Én személy szerint nagyon szeretem az ilyen feladattípusokat, mert ilyenkor látszik a diákokon, hogy látják, miért szükséges megtanulni az adott összefüggéseket, mire is lesznek ezek hasznosak a későbbiekben. Ez ennél a témakörnél határozottan így van, hiszen ezt egy

nagyon hosszú, többnyire monoton anyagrész előzi meg, a differenciálszámítás elméleti része.

IV.2.2. [4.] feladatgyűjtemény 6095. feladata

Liver Pál gyerekkora óta nagyon szeret focizni. Kisiskolás volt, amikor édesapja vásárolt 150 m dróthálót. A hálóval egy focipályát kerítettek el az udvaron úgy, hogy felhasználják a telek kerítését és a 25m hosszú házfalat. Mekkora legyenek a pálya oldalai, ha a lehető legnagyobb területű pályát akarják kialakítani?



(A ház falára és az utcafronti kerítésre - ami gyakorlatilag tetszőlegesen hosszúnak tekinthető - nem húznak ki hálót.) A mellékelt kép ábrázolja a lehetséges bekerítést. Az ábra a feladatgyűjteményben is szerepel, a feladat megértését segítheti, de a megoldás végén mellékelek egy saját ábrát / táblaképet, mely jobban ábrázolja a megoldásként kapott értékeket, a fenti ábra kicsit megtévesztő lehet, ha valaki nem rutinos feladatmegoldó ebben a témakörben.

Megoldás

A pálya fallal párhuzamos élét x -szel jelöljük, mértékegysége méter.

A focipálya másik oldalához, ami ugyanilyen hosszú, csak $x - 25$ méter háló szükséges, ugyanis x nagyságú részét a ház alkotja.

A kerítéssel párhuzamos oldalát pedig az alábbi képlet írja le:

$$y = 150 - x - (x - 25) = 175 - 2x \text{ méter}$$

A focipálya területe ezek szerint így alakul:

$$T(x) = x \cdot y = x(175 - 2x) = -2x^2 + 175x$$

A megoldáshoz ennek a területfüggvénynek a deriválása szükséges.

Elvégezve a műveletet kapjuk: $T'(x) = -4x + 175$

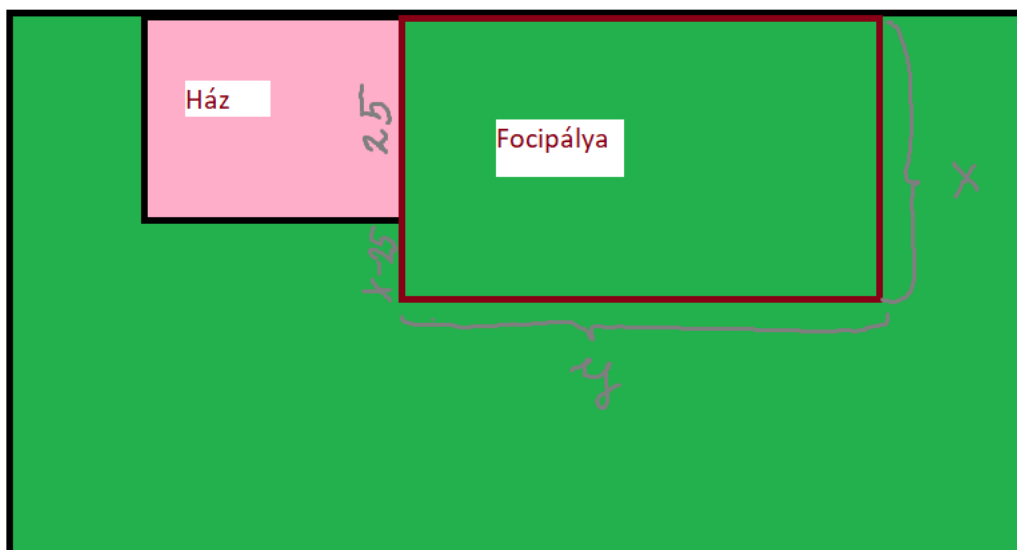
A következő lépés a deriváltfüggvény zérushelyének meghatározása, vagyis hogy mikor lesz egyenlő nullával. Az $x = 43,75$ adódik az egyenlet megoldása után.

Mindenképp ellenőriznünk kell, hogy a kapott helyen valóban van-e szélsőértéke a függvénynek. A deriváltfüggvény egy lineáris függvény, mely szigorúan monoton csökkenő, a zérushelynél előjelet vált, tehát elégséges feltételt kaptunk a szélsőérték létezésére. Így biztosak lehetünk benne, hogy a területfüggvénynek maximuma van az adott pontban.

A feladat keresett megoldása a pálya méretei: szélessége 43,75 méter, hosszúsága: 87,5 méter (a megoldás elején jelzett képletbe behelyettesítve kapjuk ezeket az értékeket).

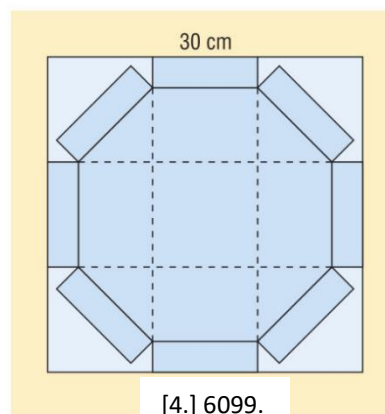
Ennek a feladatnak a megoldása általában igen hosszúra szokott nyúlni és sajnos nagyon sok hibalehetőség is lapul benne. Magasfokú és hosszú koncentrációt igényel a diáktól, valamint a hozzá kapcsolódó tudás sokrétűsége is igényli azt, hogy a tanulócsoport emelt óraszámban, emelt szinten tanuljon matematikát. Általában a mérnöki pályára készülőknek szokta ez a feladattípus különösen megregadni a figyelmét.

A mellékelt segítő ábrán egy lehetséges órai táblavázlatot láthatunk, mely segítheti a feladatmegoldást, illetve a könnyebb megértést.



IV.2.3. [4.] feladatgyűjtemény 6099. feladata

A csomagolóüzembe nemrég új gépsor érkezett, amellyel 30 cm oldalú, négyzet formájú kartonlapokból szabályos nyolcszög alapú dobozokat tudunk formára vágni és hajtogatni. Mekkora állítsuk be a gépen a doboz magasságát, hogy a lehető legnagyobb térfogattal bíró dobozokat állíthassuk elő? (A doboz térfogatát az alapterület és a magasság szorzataként kapjuk meg.)



Megoldás

Jelölés: x , y , a a rajzon látható szakaszokat jelöli. Az ábra elemzéséből már a diákoknak észre kell venniük, hogy az alapterület egy db a oldalú négyzetből, valamint négy db (egybevágó) y befogójú derékszögű háromszögből (ami szintén egy a oldalú négyzetet tesz ki), illetve négy db egybevágó, a és y oldalú téglalaphoz áll.

Ezek alapján az alapterület felírása egyértelműen szokott menni, a diákok legtöbbször önállóan elvégzik:

$$T = a^2 + 4ay + 4 \frac{y^2}{2}$$

Ennek a kifejezésnek az átalakítása mindenképp szükséges, ugyanis deriválás előtt a kifejezésnek a -tól kell függenie. Ehhez összefüggést kell találnunk a és y között, segít nekünk a Pitagorasz-tétel az egyenlő szárú derékszögű háromszögekben. Ha a szükséges összefüggést megkaptuk, fel kell írunk újra a területfüggvényt. Az y befogójú és a átfogójú derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$2y^2 = a^2, \text{ ebből következik, hogy } y = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$T(x)$ az alábbiak szerint módosul:

$$T(a) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a^2 = 2a^2(1 + \sqrt{2}).$$

A lap oldaláról tudjuk, hogy 30 cm-rel egyenlő, így

$$2x + 2 \frac{a}{\sqrt{2}} + a = 30, \text{ ekkor } a = 2 \cdot \frac{15-x}{1+\sqrt{2}}.$$

Ha ezt visszahelyettesítjük a területképletbe, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$T(x) = 8 \frac{(15-x)^2}{1+\sqrt{2}}$$

A feladat szövege segít a diákoknak abban, hogy a térfogat kiszámításához a fenti területeket szoroznunk szükséges a magassággal, így a térfogatra vonatkozó összefüggés:

$$v(x) = 8 \frac{x(15-x)^2}{1+\sqrt{2}} = \frac{8}{1+\sqrt{2}}(x^3 - 30x^2 + 225x)$$

A feladat következő lépése a deriválás. Általában ideig már csak nagyfokú koncentráció segítségével lehet hibátlanul eljutni. Nagyon fontos, hogy a tanár végig koordinálja a feladatot, ha közben számolási vagy elvi lenne, azonnal javítani tudják a tanulók. Itt szintén fontos, hogy felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $[0; 15]$ intervallumon kell keresnünk a szélsőértéket.

A térfogat deriváltját az alábbi összefüggés adja meg:

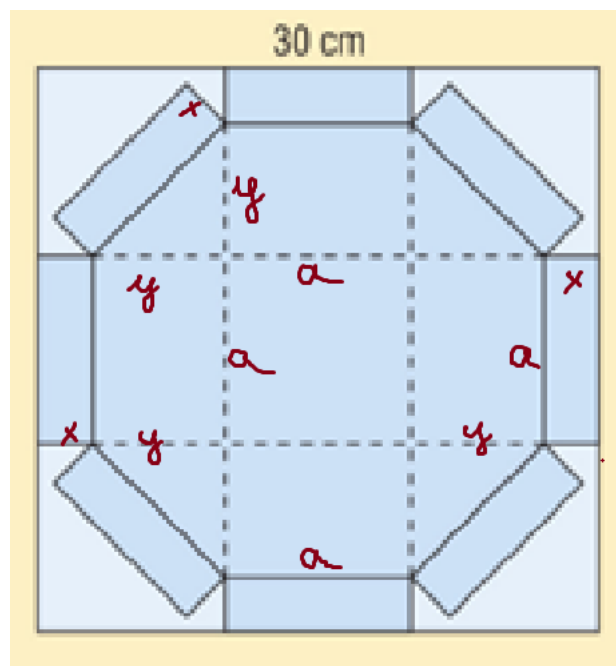
$$v'(x) = \frac{24}{1+\sqrt{2}}(x^2 - 20x + 75).$$

A zérushelyeket úgy kapjuk meg, ha a kifejezést egyenlő tesszük nullával és az így kapott másodfokú egyenletnek megkeressük a gyökeket. A kapott gyökök 5 és 15 lesznek.

Ilyenkor kell nagyon hangsúlyoznunk a tanulóknak, hogy a feladatnak még nincs vége, ellenőriznünk kell, hogy valóban szélsőérték-helyek lesznek-e a megoldások és mekkorák lesznek a kapott szélsőértékek.

A deriváltfüggvény konvex parabola, a két zérushely között negatív értékeket, azonkívül pozitív értékeket vesz fel. Maximuma $x=5$ -nél lesz, tehát ahhoz hogy maximális legyen a doboz térfogata 5 cm-es fülek hajtogatása szükséges. Így a doboz maximális térfogata a képletbe visszahelyettesítve $1656,85 \text{ cm}^3$.

Mellékelem a fenti ábra segítő betűzéssel ellátott változatát.



Ennek a feladatnak a megoldásához általában már több segítség szükséges a diákoknak, ugyanis már az alapterület kiszámítása sem egyszerű, valamint a deriválással is lehetnek problémák, így folyamatos tanári instruálást, segítségnyújtást igényel. Ennek feladatnak a megoldását egy hospitálás keretében figyelhettem meg, így jól láttam, hogy pontosan mik azok a lépések, ahol egymás vagy a mentortanárom segítségét kérték a diákok. A feladatot egy heti 7 matematika óraszámmal rendelkező kiscsoport, ahol többen mérnöknek készülnek, nagy lelkesedéssel fogadta, de feladat nehézsége és a háttértudás sokrétősége miatt sajnos csak kevés esetben lehet bemutatni ezt az amúgy igencsak fontos feladatot.

V. Szélsőérték-feladatok az érettségiben

A következőkben az alap- illetve az emelt szintű érettségik követelményeit vizsgáltam végig a szélsőérték feladatokat kiemelve, figyelve arra, hogy vajon milyen jellegű feladatokat tartalmaznak a középiskolai tanulmányokból. A bemutatott példákat az elmúlt néhány év központi érettségi feladatsoraiból válogattam, mellettük jelölöm melyik évben és időszakban került ez a feladat kitűzésre. A szélsőérték számításokkal kapcsolatos hosszabb, nehezebb feladatok igazából csak az emelt szintű vizsgákon kerülnek elő, ugyanis a kapcsolódó háttértudás csak itt jelenik meg követelményként.

V.3.1. 2016. május 3. Emelt szint

A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az

$$f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000)$$

összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

- a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

- b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$ ($v > 0$) kg lesz.

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \text{ km/h} \leq v \leq 1100 \text{ km/h}$

- c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

A feladat megoldása, fontos észrevételek a tanulás/tanítás szempontjából

a, Ha az üzemanyag fogyasztásnak a minimumát keressük, meg kell vizsgálnunk, hol lesz nulla az f függvény deriváltja.

$$f'(x) = \frac{1}{10}x - 90$$

A derivált értéke $x = 900$ esetén lesz nulla.

Ezek után ellenőriznünk kell, hogy valóban van-e itt minimum. Két lehetőségünk van, vagy azt nézzük meg, hogy a második deriválnak milyen az előjele vagy pedig az első deriváltat vizsgáljuk előjelváltás szempontjából. Mivel $f''(x) = 0,1$, ezért valóban minimuma lesz a függvénynek az $x = 900$ helyen.

Behelyettesítés után megkapjuk az ezen a helyen felvett értéket, mely 7000 kg óránként. Ez a feladatrész 5 pontot ért hibátlan megoldás esetén. Általában ennél a feladatrésznél

típushibaként az szokott előfordulni, hogy a diákok nem ellenőrzik azt, hogy valóban van-e a függvénynek szélsőértéke ott, ahol az első derivált nulla. Ezt a tanítási folyamat során is érdemes végig hangsúlyoznunk. Ebben az esetben ennek elmaradását 1 pont levonásával büntetik.

b, A kérdés megválaszolásához fejezzük ki először a repülési időt óraban v segítségével.

$$t = \frac{5580}{v}.$$

Az út során elfogyasztott üzemanyag mennyiségének kiszámolásához a megadott képletbe kell behelyettesítenünk.

$$t \cdot f(v) = \frac{5580}{v} \cdot \frac{1}{20}(v^2 - 1800v + 950000)$$

Ezt tovább alakítva az alábbi kifejezéshez jutunk, ami már egyben a feladat megoldása is.

$$t \cdot f(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$$

Ez a feladatrész 3 pontot ért, ezek tipikusan jól szoktak sikerülni a diákoknak.

c, Ez a leghosszabb és legnagyobb koncentrációt, magas háttértudást igénylő feladatrész, melynek hibátlan megoldásáért 8 pontot kaphatunk. Első lépésként szintén szükséges felhasználnunk azt a tudást, hogy egy függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol az első derivált értéke nulla.

$$g(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$$

$$g'(v) = 279 - \frac{265050000}{v^2}$$

A $g'(v) = 0$ egyenlet megoldása után azt kapjuk, hogy a derivált akkor lesz nulla, ha $v_0 = 100\sqrt{95} \approx 974,68$. Negatív gyök nyilván nem jöhet szóba.

Az első derivált előjelet is vált a fenti a helyen, ezért ez az érték a g függvénynek abszolút minimumhelye. Ha a második deriváltat tekintjük, az a megjelölt helyen pozitív, erre is hivatkozhatunk a megoldásban, ekvivalensnek tekinthető az előjel-váltás vizsgálatával.

Az abszolút maximum vizsgálatához két még meg kell vizsgálnunk a megadott legkisebb és legnagyobb értéket, hogy ott mekkora értéket vesz fel a függvény:

$$g(800) = 52\,312,5$$

$$g(1100) \approx 45\,654,5$$

$$g(v_0) = 41671,1$$

Az adatokból kitűnik, hogy a megadott modell szerint működő repülőgép esetén a legnagyobb üzemanyagfogyasztás 800 km/h átlagsebesség esetén generálódik, a legkisebbet pedig pontosan ($v_0 =$) 975 km/h átlagsebesség esetén éri el egy útra vetítve.

A feladat hibátlan megoldásáért 16 pont jár, ami egy jelentős részét képezi az emelt matematika érettségi összpontszámának. Szerintem a tananyaghoz szükséges háttértudás mindenképp megköveteli a magas pontozási értéket.

V.3.2. 2018. október 16. Emelt szint

Egy zöldségáros vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

- a) Mennyi lenne a zöldségárosnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot?
- b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat:

$$y = -\frac{1}{5}x + 200 \quad (0 < x < 1000).$$

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségáros másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

- c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségáros napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.)

A feladat megoldása, fontos észrevételek a tanulás/tanítás szempontjából

a, Mivel a meghatározott 400 Ft a két aladási ár (300 Ft és 500 Ft) számtani közepe/ átlaga, ezért az eladás is a két megadott százalékos adat ugyanilyen értéke lesz. Így számolhatjuk tehát: $\frac{50+70}{2} = 60\%$. Így összesen $200 \cdot 0,6 = 120$ kg fogyna el 400 Ft/kg-os áron, a befolyó bevétel pedig $120 \cdot 400 = 48000$ Ft lenne. Ez a feladatrész 3 pontot ért. Nem közvetlenül a szélsőérték-számítással kapcsolatos tudást mér ez a feladat, hanem a százalékszámítási ismereteinket kell felhasználnunk, így nagyon komplex gondolkodást, átlátást igényel.

b, A feladat szövege szerint az egységár és az eladott barack mennyisége között a fennálló kapcsolat lineárisnak mondható, így fel kell idéznünk magunkban az ezzel kapcsolatos ismeretinket. Ha x jelzi az egységárat és y az eladott mennyiséget, akkor a következő egyenlet igaz rájuk. $y = mx + b$.

Felírhatunk két egyenletet a megadott adatokból.

$$100 = 500m + b$$

$$200 \cdot 0,7 = 140 = 300m + b$$

Az egyenletrendszer megoldása után $m = -\frac{1}{5}$ adódik.

Ha visszahelyettesítünk megkapjuk a b értékét is, ami 200. Ezekkel az adatokkal már igazolni tudjuk, hogy az $y = -\frac{1}{5}x + 200$ összefüggés valóban fennáll.

A feladatrész megoldásáért 4 pontot kaphatunk. Itt is szükségünk van sok háttérismeretre, főként az egyenletrendszerek megoldási módszereire és a lineáris összefüggés képletére.

c, Most jön a szélsőérték-számítás része a feladatnak, ahol minden diáknak szüksége lesz az analízissel kapcsolatos elsajátított tudására.

Az eddigi jelöléseinket használva: x Ft/ kg az eladási egységár.

Az eladott barackmennyiségből származó bevételt megkapjuk, ha az eladási árral megszorozzuk az eladott mennyiséget leíró képletet.

$$\left(-\frac{1}{5}x + 200\right) \cdot x = \frac{1}{5}x^2 + 200x \text{ Ft}$$

A nap végén megmaradt barackmennyiség és az abból származó bevétel az alábbiak szerint alakul: $200 - \left(-\frac{1}{5}x + 200\right) = \frac{1}{5}x$ kg-ban kifejezve.

Bevétel ebből: $\frac{1}{5}x \cdot 80 = 16x$ Ft

A két bevételt összeadva az összes bevétel: $-\frac{1}{5}x^2 + 216x$ Ft. Így megkaptuk azt a függvényt, amit vizsgálnunk kell, nevezetesen a maximumát megkeresnünk. Nevezzük el a függvényt B-vel a bevétel szót jelölve. $B(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 216x$

Alakítsuk teljes négyzetté, hogy könnyen le tudjuk olvasni a szélsőérték-helyet /helyeket!

$$B(x) = -\frac{1}{5}(x - 540)^2 + 58320$$

Mivel a másodfokú függvény képe lefelé álló, azaz konkáv parabola, ezért ez az érték ott lesz maximális, ahol $(x - 540)^2 = 0$, azaz $x = 540$ esetén.

Tehát akkor a legnagyobb a bevétel, ha a zöldséges 540 Ft / kg áron árulja termékeit. Ekkor (a képletbe történő visszahelyettesítés után kapjuk) 58320 Ft lesz a bevétele.

Ez a feladatrész 7 pontot ért, a feladat teljes egészében 14 pontos. Ezt a feladattípust általában kicsit könnyebbnek szoktuk érzékelni, mint az ezt megelőzően bemutatott feladatot, ez minimálisan a pontozásban is megmutatkozik. Itt nincs szükség a deriváltfüggvényekkel és az összekapcsolódó szélsőértékekkel kapcsolatos tudás alkalmazására, felidézésére, azonban itt is szükséges a feladat komplex átlátására.

V.3.3. 2013.május 7. Középszint

Adja meg az $x \rightarrow x^2 + 10x + 21$ valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja!

A feladat megoldása, észrevételek

A feladat első lépéseként a függvény hozzárendelési szabályát kell kiegészítenünk teljes négyzetté, hogy le tudjuk olvasni a kért adatokat.

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 5)^2 - 4$$

A parabola felfelé nyitott (normál állású), tengelypontja az $x = -5$ helyen van, mely egyben a minimumhely is. Az itt felvett érték -4 -gyel egyenlő, mely a minimum értéke.

Ez a feladat az egyszerűbb, bemelegítő feladatok közé sorolható, 4 pontot ér, tipikusan a középszintű feladatsorokban szoktunk hasonlókkal találkozni.

VI. Vélemények az analízisoktatásról

Szakdolgozatom készítése során több matematikatanárral is beszélgettem arról, miért is tartják ők fontosnak az analízistanítást, mely részeire szoktak nagyobb hangsúlyt fektetni, mik azok a területek, melyekben szerintük fejlődhetne a tankönyvi feldolgozás. Alapvetően mindannyian úgy vélték, hogy az analízis a középiskolai matematikatanítás egyik leglényegesebb eleme, nagyon fontos az, hogy a gyerekek elsajátítsák és meg is értsék az ezzel kapcsolatos definíciókat, tételeket és minél több feladatot tudjanak megoldani, valamint lássák ezek valóságközelebi vagy teljesen valós életbeli felhasználásának lehetőségeit is.

A legtöbbet a mentortanárommal, Simonné Baranyai Zsuzsannával beszélgettem a témáról, aki már sok-sok éve tanít a szombathelyi Nagy Lajos Gimnáziumban, ahol én az összefüggő tanítási gyakorlatomat végzem. Az iskoláról érdemes tudni, hogy Vas megye legkiválóbb intézményei közé tartozik, több, mint 500 tanuló jár ide. A 11. évfolyamtól a diákoknak lehetősége nyílik emelt óraszámú, emelt szintű érettségire készítő órákra járni, így van ez matematikából is. [8.] Mindemelett az iskolában a „C” osztály már 9. évfolyamtól kezdve egy matematika specializációs osztály, mely azt jelenti, hogy az ebbe az osztályba járó diákok a középiskolai tanulmányaik végig emelt óraszámúban, emelt szinten, csoportbontásban tanulnak minden matematikai ismeretet. 11. osztálytól ők is választhatnak, hogy heti 5 vagy heti 7 óraszámúban szeretnék folytatni matekos tanulmányaikat.

Zsuzsa, a mentortanárom több csoportban is tanít, így nekem is volt lehetőségem több szinten kipróbálni magam és több alkalmam nyílt így hospitálni is, mind az offline tanítás, mint a digitális munkarend során. Meg tudtam figyelni azt is, mennyivel másabb a diákok feladatmegoldási módszere/ rutinja, ha alap, illetve, ha emelt óraszámúban nyílik lehetőségük gyakorolni.

Zsuzsa mindig nagyon lelkiismeretes, ha tanításról van szó: addig és annyiszor magyarázza

el a feladatokat, amíg kivétel nélkül mindenki meg nem érti. Az ő véleménye szerint az analízistanítás egy nagyon fontos, központi eleme a matematikatanításnak és a komplex, tudatos gondolkodású diákok neveléséhez is elengedhetetlen. Segít abban, hogy a diákok egyre inkább megtanuljanak önállóan gondolkodni, átlátni az összefüggéseket. Úgy véli, hogy az általunk használt tankönyvek nagyon jó alapot adnak az analízistudás megalapozásához a feladatgyűjtemények segítségével pedig nagyon jól elmélyíthető a megszerzett tudás. Mindig készít kiegészítő feladatsorokat is, így a diákok jobban látják tudásuk gyakorlati alkalmazhatóságát.

VII. Irodalomjegyzék

- [1.] Dr. Ambrus Gabriella: Titanic a Balatonon és más modellezési feladatok matematikából. Műszaki kiadó. 2012.
- [2.] Dr. Ambrus Gabriella: Valóságközeli matematika. Műszaki Kiadó, 2007.
- [3.] Schlegl István és Trembeczki Csaba. Az analízis elemei tankönyv. Mozaik kiadó, 2018.
- [4.] Kovács István és Trembeczki Csaba: Az analízis elemei feladatgyűjtemény. Mozaik kiadó, 2017.
- [5.] Érettségi feladatok:
<https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok>
- [6.] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Matematika tankönyv 11. Mozaik kiadó, 2018.
- [7.] Árki Tamás, Konfárné Nagy Katalin, Kovács István, Trembeczki Csaba, Dr. Urbán János: Matematika feladatgyűjtemény 9-10. Mozaik kiadó, 2018.
- [8.] Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium honlapja: <http://www.nagylajos-szhely.sulinet.hu/>
- [9.] Dúró Lajosné: Az analízis középiskolai tanításáról.
http://acta.bibl.u-szeged.hu/12148/1/tantargyped_001_035-057.pdf
Letöltés ideje: 2021.03.11.
- [10.] Magyar Zsolt (2014): Analízis a középiskolában.
https://matek.fazekas.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=187:20140426-magyar-zsolt-analizis&catid=21&Itemid=136
Letöltés ideje: 2021.02.12

- [11.] Oktatási Hivatal (2020): A 2020-es NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók. Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára.
https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_1_2_evf
Letöltés ideje: 2021.02.12