

Differenciálszámítás és alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Katona Edina Mária

Matematika Bsc szak

Tanári szakirány

Témavezető:

Sikolya Eszter, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető.....	3
2. Differenciálszámítás.....	4
2.1. Differenciálhányados fogalma.....	4
2.2. Differenciálási szabályok.....	6
2.3. Elemi függvények deriváltjai.....	8
2.4. Magasabb rendű differenciálhányadosok.....	9
2.5. Lokális tulajdonságok.....	10
2.6. Középértéktételek.....	12
2.7. Kétváltozós függvények differenciálása.....	14
2.7.1. Legfontosabb tételek, definíciók.....	14
2.7.2. Lokális tulajdonságok.....	17
2.7.3. Implicit függvény.....	19
3. Alkalmazások, példák.....	21
Irodalomjegyzék.....	32

1. Bevezető

A szakdolgozatomban a matematikai analízis egyik központi jelentőségű témakörét a differenciálszámítást, valamint hozzá kapcsolódó példákat mutatok be. A differenciálszámítással már a középiskolában megismerkedünk, de mélyebb ismeretre csak az egyetemi évek alatt lesz rá lehetőség. A differenciálszámítás szerepe nem csak a matematikában, hanem más tudományok területén (pl.: fizika, kémia, közgazdaságtudomány, stb) is alapvető. Segítségével számos elméleti és gyakorlati probléma megoldása válik lehetővé.

A dolgozatot 2 fő részre lehet osztani. Az első felében bemutatom a differenciálhányados fogalmát, valamint a legfontosabb tételeket és definíciókat, differenciálási szabályokat, ezt követik a lokális tulajdonságok, melyek a függvényelemzés során segítségül szolgálnak, végül a kétváltozós függvények differenciálása. A dolgozat második felében különböző példákon keresztül szemléltettem a kétváltozós függvények differenciálszámításának alkalmazhatóságát.

2. Differenciálszámítás

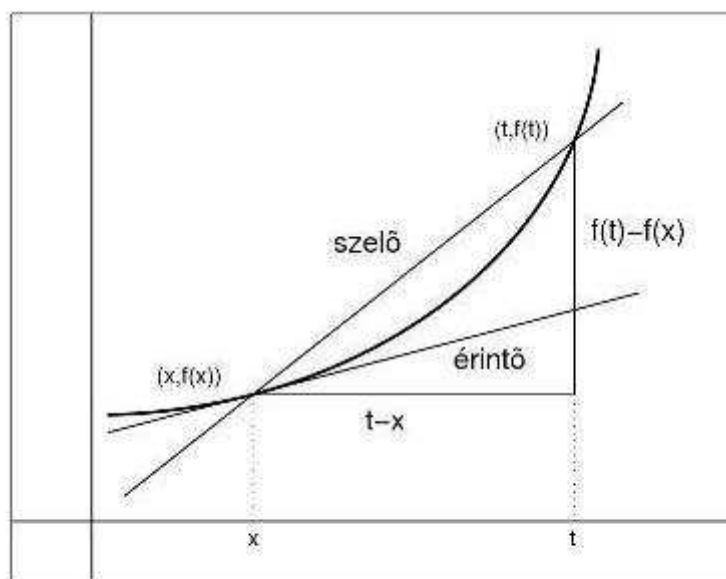
2.1. A differenciálhányados fogalma

A különbségi hányados, mint a megfelelő szelő meredeksége fontos szerepet játszik a differenciálszámítás geometriai megalapozásában.

A koordináta-rendszer $(a, f(a))$ és a tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes meredeksége (iránytangense)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha x tart a -hoz tartva a szelők tartanak egy határhelyzethez, akkor az így kapott egyenest fogjuk az f függvény a pontbeli érintőjének nevezni, melynek meredeksége a szelők meredekségeinek határértéke (lásd 1. ábra). (Ezt a határértéket nevezzük majd el deriválnak.)



1. ábra

Ha az f függvény értelmezve van az a és b pontokban, akkor az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hányadost az f függvény a és b helyekhez tartozó **különbségi hányadosának** nevezik. Egyértelmű, hogy az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ különbségi hányados megegyezik az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő egyenes meredekségével.

Definíció: Az a valós szám **környezeteinek** nevezzük az $(a - \delta, a + \delta)$ alakú intervallumokat, ahol δ tetszőleges pozitív szám.

Definíció: Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban **differenciálható**, ha a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik. A határérték az f függvény a pontbeli **differenciálhányadosa** vagy **deriváltja**.

Jelölés: Az a pontbeli differenciálhányadost leggyakrabban $f'(a)$ -val jelöljük. Előforduló jelölések még

$$\dot{f}(a), y'(a), \frac{dy}{dx}$$

Az f függvény a pontbeli érintőjén azt az egyenest értjük, amely átmegy az $(a, f(a))$ ponton és a meredeksége

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Az előbbiek szerint az érintő egyenesének egyenletét a következő módon definiálhatjuk.

Definíció: Legyen f differenciálható az a pontban. Az f függvény a pontbeli **érintőjén** az $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ egyenletű egyenest értjük.

Tétel: Ha f differenciálható a -ban, akkor f folytonos a -ban.

Ez mutatja, hogy a differenciálhatóság erősebb tulajdonság, mint a folytonosság. A folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak. Van olyan f függvény, amely egy a pontban folytonos, de ott mégsem differenciálható. Erre egy példa az $f(x) = |x|$ függvény $a = 0$ -ban.

Példa:

$$f(x) = |x| \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

tehát

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Így

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,$$

ezért f nem differenciálható 0-ban.

Definíció: Az f függvény **deriváltfüggvényének** nevezzük és f' -vel jelöljük azt a függvényt, amely értelmezve van mindazon x helyen, ahol f differenciálható, és ott az értéke $f'(x)$.

2.2 Differenciálási szabályok

A következőkben a differenciálási szabályokkal ismerkedünk meg, melyeket szinte minden feladat során alkalmazunk. Az (1)-(7) szabályok egyszerűen következnek a differenciálhatóság definíciójából.

(1) Konstans differenciálhányadosa.

Ha az $f=a$ (a állandó), akkor $f'=0$. Tehát a konstansfüggvény deriváltja minden pontban 0.

(2) Állandóval szorzott függvény differenciálhányadosa.

A $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, ahol c állandó. Tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy a deriváltat megszorozzuk a konstanssal.

(3) Összegfüggvény differenciálhányadosa.

Az $(f + g)' = f' + g'$, tehát a differenciálhányados a tagok deriváltjainak az összege. A szabály bármennyi tag differenciálására vonatkozik.

- (4) Két függvény különbségének differenciálhányadosa.

Az $(f - g)' = f' - g'$, a különbséget az összeghez hasonlóan tagonként differenciáljuk.

- (5) Két függvény szorzatának differenciálhányadosa.

Az $(f \cdot g)' = (f' \cdot g) + (f \cdot g')$, tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy az első tényező deriváltját megszorozzuk a változatlanul hagyott második tényezővel, majd hozzáadjuk a változatlan első tényező és a második tényező deriváltjának a szorzatát.

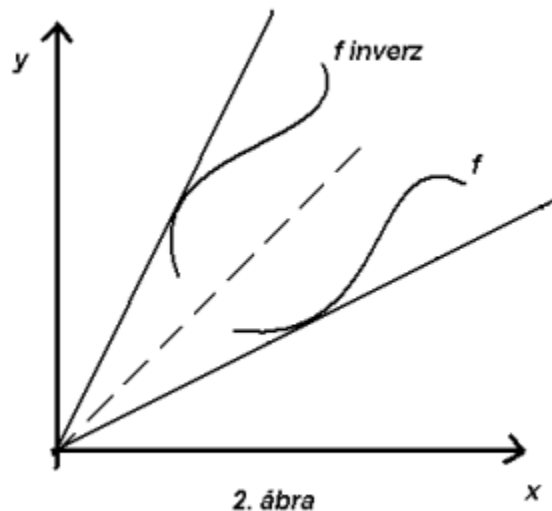
- (6) Két függvény hányadosának differenciálhányadosa.

Az $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(f' \cdot g) - (f \cdot g')}{g^2}$, ha $g \neq 0$, tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy a számláló nevezőjének deriváltját megszorozzuk a nevezővel, majd ebből kivonjuk a változatlanul hagyott számlálónak és a nevező deriváltjának a szorzatát. Végezetül a különbséget elosztjuk a nevező négyzetével.

- (7) Inverz függvény differenciálhányadosa.

Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (a,b) intervallumban, és legyen differenciálható a $c \in (a,b)$ pontban. Ha $f'(c) \neq 0$, akkor f inverz függvénye, f^{-1} differenciálható $f(c)$ -ben és

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$



(8) Összetett függvény differenciálhányadosa.

Ha a g függvény differenciálható a -ban és az f függvény differenciálható $g(a)$ -ban, akkor a $h=f \circ g$ függvény is differenciálható a -ban, és

$$h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Ezt szokás láncszabálynak nevezni.

2.3. Elemi függvények deriváltja

A legfontosabb elemi függvényeket és deriváltjukat mutatjuk be az alábbiakban.

Nevezetes függvényderiváltak:

a) $(id^n)' = n id^{n-1}$

b) $\sin' = \cos$

c) $\cos' = -\sin$

d) $\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$

e) $\operatorname{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

f) $(e^x)' = e^x$, ahol $x \in \mathbb{R}$

g) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ahol $x > 0$

h) $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$

i) $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$

j) $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$

k) $\operatorname{cth}' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2}$

l) $\operatorname{arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $x \in (-1, 1)$

m) $\operatorname{arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $x \in (-1, 1)$

n) $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

o) $\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

p) $\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

q) $\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, ahol $(x > 1)$

$$r) \quad \operatorname{arth}'x = \frac{1}{1-x^2}, \text{ ahol } -1 < x < 1$$

$$s) \quad \operatorname{arcth}'x = \frac{1}{1-x^2}, \text{ ahol } |x| > 1$$

2.4. Magasabb rendű differenciálhányadosok

Egy függvényt nem csak egyszer lehet deriválni, hanem többször is, feltéve, ha megfelel azoknak a feltételeknek, melyekkel a alábbiakban ismerkedünk meg.

Definíció: Legyen az f függvény differenciálható az a pont egy környezetében. Ha az f' deriváltfüggvénynek létezik a deriváltja a -ban, akkor f' a -beli deriváltját az f függvény a -beli **második differenciálhányadosának** nevezzük. Jelölése: $f''(a)$. Definíció szerint

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Ha $f''(a)$ létezik, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható a -ban. Az f függvény **második deriváltfüggvényének** nevezzük és f'' -vel jelöljük azt a függvényt, amely azokban az x pontokban van értelmezve, ahol f kétszer differenciálható, és ott az értéke $f''(x)$.

A k -adik differenciálhányados hasonlóképpen értelmezhető indukcióval.

Definíció: Legyen az f függvény $k-1$ -szer differenciálható az a pont egy környezetében. Jelöljük az f függvény $k-1$ -edik deriváltfüggvényét $f^{(k-1)}$ -gyel. Az $f^{(k-1)}$ függvény a -beli differenciálhányadosát – feltéve, ha létezik – az f függvény k -adik differenciálhányadosának nevezzük. Ekkor f -et a -ban k -szor differenciálhatónak nevezzük. A k -adik deriváltfüggvényt $f^{(k)}$ -val jelöljük. Előforduló jelölések még:

$$\frac{d^k f}{dx^k}, \frac{d^k f(x)}{dx^k}, y^{(k)}(a)$$

Ha $f^{(k)}$ minden $k \in \mathbb{N}^+$ -ra létezik a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f végtelen sokszor differenciálható a -ban.

Példa:

Racionális és egész kitevőjű hatványok magasabbrendű deriváltja:

$$f(x) = x^q, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

racionális q esetén a k -adik deriváltja

$$f^{(k)}(x) = q(q-1) \dots (q-k+1)x^{q-k}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

pozitív egész q esetén

$$f^{(q)}(x) = q!,$$

ahol $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q$ és $f^{(q+1)}(x) = f^{(q+2)}(x) = \dots = 0$.

Exponenciális függvények magasabbrendű deriváltja:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

és $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(q)}(x) = e^x$,

$$f(x) = e^{bx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

esetén $f'(x) = be^{bx}, \dots, f^{(q)}(x) = b^q e^{bx}$

2.5. Lokális tulajdonságok

Ebben a fejezetben a differenciálható függvények lokális tulajdonságainak és deriváltjainak összefüggéseivel ismerkedünk meg. Az itt szereplő tételek rendkívül fontosak az adott függvény alaki vizsgálatához.

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f **lokálisan növekedő** a -ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) \leq f(a)$, és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) \geq f(a)$.

Analóg módon értelmezzük az a -ban lokálisan csökkenő függvényt.

Az előbbi definícióból igazolható a következő tétel, melyben megfogalmazzuk, hogy ha az f függvény lokálisan növekedő, akkor az f deriváltjának az értéke 0 vagy annál nagyobb pozitív szám.

Tétel: Ha f differenciálható a -ban és f lokálisan növekedő (csökkenő) a -ban, akkor $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$).

A fenti definícióhoz hasonlóan megfogalmazhatjuk az a -ban szigorúan növekedő, illetve a szigorúan csökkenő függvényt, mely csak abban különbözik az előzőtől, hogy itt nem engedjük meg az egyenlőséget.

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f **szigorúan lokálisan növekedő** a -ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) < f(a)$, és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > f(a)$.

Az előző definícióhoz ismét megfogalmazható egy tétel, mely szintén nagyon hasonló a fentebb említett tételhez, csak fordított irányú következtetést tartalmaz.

Tétel: Ha az f differenciálható a -ban és $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), akkor f szigorúan lokálisan növekedő (szigorúan lokálisan csökkenő) a -ban.

Miután megismerkedtünk a lokálisan növekedő, illetve lokálisan csökkenő függvény fogalmával, nézzük meg, hogyan állapíthatjuk meg egy függvény lokális maximumát, illetve lokális minimumát.

A következőkben bevezetjük a lokális maximum, illetve a lokális minimum fogalmát, melyeknek a közös elnevezése lokális szélsőérték. A lokális maximumhelyet és a lokális minimumhelyet pedig közösen lokális szélsőérték helynek nevezzük. Előtte viszont még definiáljuk a definícióban szereplő környezet fogalmát.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban **lokális maximuma (minimuma)** van, ha a -nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$ -ra $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (lokális minimumhelyének) nevezzük.

Ha minden $x \in U \setminus \{a\}$ -ra $f(x) < f(a)$ (vagy $f(x) > f(a)$), akkor a függvénynek szigorú lokális maximuma (szigorú lokális minimuma) van a -ban.

Igazolható a következő tétel, mely szükséges feltételt ad differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére.

Tétel: Ha f differenciálható a -ban és f -nek lokális szélsőérték helye van a -ban, akkor $f'(a) = 0$.

Fontos, hogy ez a tétel csak szükséges feltétel ad a lokális szélsőérték létezésére, és nem fordítható meg!

Példa: Vegyük az $f(x) = x^3$ függvényt. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért $f'(0) = 0$, de f -nek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

Szélsőérték létezésének elégséges feltétele (2. deriválttal): Legyen f 2-szer differenciálható (a, b) -n, $x \in (a, b)$ és $f'(x) = 0$. Ha $f''(x) < 0$, akkor x lokális maximumhely, ha $f''(x) > 0$, akkor pedig x lokális minimumhely.

A maximum- és minimumhelyek említése kapcsán mindenképpen meg kell említenünk a Weierstrass-tételt, mely folytonos függvény abszolút maximum- illetve abszolút minimumhelyének létezéséről szól.

Weierstrass-tétel: Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$, és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$ -re. Más szóval, egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

2.6. Középértéktételek

A differenciálszámítás tételei közül a következő három (Rolle-tétele, Lagrange-középértéktétel és Cauchy-középértéktétel) a leggyakrabban használt. Általában valamelyik tételt alkalmazzuk, ha a függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot keressük.

Rolle-tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható (a, b) -ben. Ha $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = 0$.

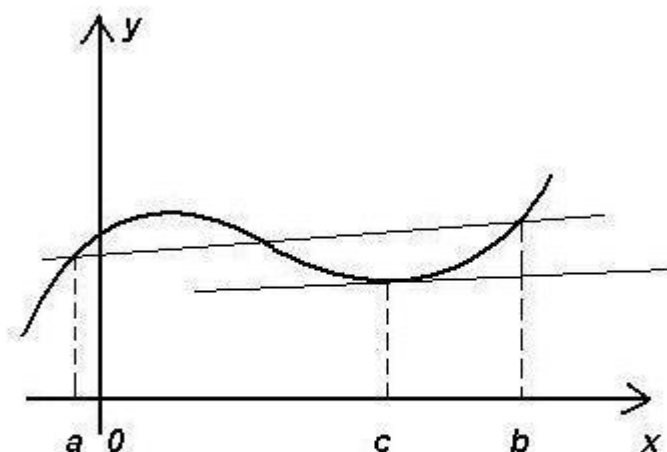
A Lagrange-középértéktétel a fent említett Rolle-tétel általánosítása, és a következőt mondja ki.

Lagrange-középértéktétel: Ha az f folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható (a, b) -ben, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

teljesül.

A tétel állítását a következő ábra szemlélteti:



3. ábra Lagrange-középértéktétel

A Lagrange-középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható (a, b) -ben, akkor f grafikonjának létezik olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos a $h_{a,b}$ húrral.

Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr egyenesének egyenlete

$$h_{ab}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

A következőkben a **Cauchy-közéértéktétellel** ismerkedünk meg:

Ha az f és g függvények folytonosak $[a, b]$ -ben, differenciálhatók (a, b) -ben, és $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

2.7. Kétváltozós függvények differenciálása

2.7.1. Legfontosabb tételek, definíciók

Legyen f egy kétváltozós függvény, (a, b) pedig értelmezési tartományának egy belső pontja.

Ha az

$$f_1(x) = f(x, b), (x, b) \in D_f$$

illetve

$$f_2(y) = f(a, y), (a, y) \in D_f$$

egyváltozós függvénynek az a , illetve b pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy az f az (a, b) pontban x (első változó) szerint, illetve y (második változó) szerint **parciálisan differenciálható**, és parciális differenciálhányadosai az (a, b) pontban:

$$f'_1(a), \text{ illetve } f'_2(b).$$

A fent említett belső pontot az a következőképpen definiáljuk.

Definíció: Az $u \in \mathbb{R}^2$ pont körüli $r > 0$ sugarú **nyílt gömb**: $B(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u, x) < r\}$.

Definíció: Legyen $H \subset \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}^2$. Az u **pont belső pontja** H -nak, ha létezik $r > 0$, hogy $B(u, r) \subset H$. H belső pontjait jelölje $\text{int } H$.

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan a következőkben definiáljuk a kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvényének fogalmát.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény az $A \subset D_f$ halmaz minden pontjában parciálisan differenciálható az x (első változó) szerint. Azt a függvényt, amely az A halmaz minden pontjához hozzárendeli az f függvény x szerinti parciális differenciálhányadosát, az f függvény x szerinti **parciális deriváltfüggvényének** nevezzük.

Hasonlóan definiálható az y szerinti parciális deriváltfüggvény is.

A parciális deriváltfüggvények jelölése:

$$\partial_1 f, f'_x \text{ vagy } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ illetve } \partial_2 f, f'_y \text{ vagy } \frac{\partial f}{\partial y}$$

A következőkben definiáljuk mikor differenciálható az f függvény az (a, b) pontban, valamint kimondjuk az ezzel kapcsolatos tételeket.

Definíció: Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $(a, b) \in \text{int } D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f **differenciálható az (a, b) pontban**, ha létezik olyan $\ell = \ell_{(a,b)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \ell(x-a, y-b)}{|(x-a, y-b)|} = 0.$$

Tétel: Ha f differenciálható (a, b) -ben, akkor f -nek léteznek parciális deriváltjai (a, b) -ben, és az előző definícióban

$$\ell(x, y) = f'_x(a, b) \cdot x + f'_y(a, b) \cdot y.$$

Definíció: Ha f differenciálható (a, b) -ben, akkor az $\nabla(a, b) := (f'_x(a, b), f'_y(a, b)) \in \mathbb{R}^2$ vektort a függvény (a, b) -beli **deriváltvektorának** vagy **gradiensének** nevezzük.

Jele: $\nabla f(a, b)$

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \in \text{int } D(f)$, és tegyük fel, hogy az f'_x és az f'_y parciális deriváltfüggvények léteznek az (a, b) pont egy környezetében és folytonosak (a, b) -ben. Ekkor f differenciálható (a, b) -ben.

Példa kétváltozós függvény parciális deriváltjaira:

Legyen $f(x, y) = x^2 + xy^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ennek a kétváltozós függvénynek két parciális deriváltja van. Az x szerinti parciális derivált meghatározásánál az y -t, az y szerintinél pedig az x -et tekintjük konstansnak. A parciális deriváltak ezek után a következők:

$$f'_x(x, y) = 2x + y^2, \quad D_{f'_x} = \mathbb{R}^2,$$

$$f'_y(x, y) = 2xy, \quad D_{f'_y} = \mathbb{R}^2.$$

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **másodrendű vagy második parciális deriváltjait** az első, illetve a második parciális deriváltfüggvények további parciális deriváltjaiból nyerjük:

$$f''_{xx} := (f'_x)'_x, f''_{xy} := (f'_x)'_y, f''_{yx} := (f'_y)'_x, f''_{yy} := (f'_y)'_y.$$

Az alábbiakban megfogalmazzuk a Young-tételt, mely kimondja, hogy egy f függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjai bizonyos feltételek mellett azonosak.

Young-tétel: Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény másodrendű parciális deriváltjai léteznek az (a, b) pont környezetében és folytonosak (a, b) -ben. Ekkor

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Definíció: Legyen f differenciálható az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a, b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f **kétszer differenciálható** az (a, b) pontban.

A definícióból és fenti tételből látható, hogy a Young-tétel feltételeiből következik f kétszeres differenciálhatósága.

A későbbiekben szükségünk lesz a következő fogalomra.

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonosan differenciálható** az $a \in \text{int } D(f)$ pontban, ha f differenciálható az a pont egy környezetében, és parciális deriváltjai folytonosak a -ban.

2.7.2. Lokális tulajdonságok

Ezek után lássuk a parciális derivált és a lokális szélsőérték közötti kapcsolatot, hiszen nemcsak egyváltozós függvény esetén, hanem többváltozós függvény esetén is összefüggés mutatható a derivált és a lokális tulajdonság között.

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma**, illetve **maximuma** (lokális szélsőértéke) van az $(a, b) \in \text{int } D(f)$ pontban, ha (a, b) -nek létezik olyan $U = B((a, b), r)$ környezete, hogy

$$f(x, y) \geq f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in U.$$

Az $f(a, b) \in \mathbb{R}$ szám az f lokális minimuma, illetve maximuma (a, b) -ben.

Ha

$$f(x, y) > f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) < f(a, b) \quad \forall (x, y) \in U$$

teljesül, akkor f -nek szigorú lokális minimuma, illetve maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van (a, b) -ben.

Tétel: (Lokális szélsőérték szükséges feltétele) Ha az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(a, b) \in \text{int } D(f)$ pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai (a, b) -ben, akkor

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0.$$

A lokális tulajdonságokkal kapcsolatban meg kell említenünk egy fontos tételt, mely a témakörhöz kapcsolódó feladatok megoldása során hasznos lesz számunkra, hiszen erre hivatkozva tudjuk, hogy egy kétváltozós folytonos f függvénynek mikor van legnagyobb és legkisebb értéke.

Weierstrass-tétel: Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt, és legyen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az A -n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb.

A következőkben a célunk, hogy az egyváltozós esethez hasonlóan elégséges feltételt adjunk kétszer differenciálható függvények lokális szélsőértékének létezésére. Ehhez szükséges bevezetnünk a kvadratikus alak fogalmát.

Definíció: Legyen $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinom. Azt mondjuk, hogy q **kvadratikus alak**, ha

$$q(x, y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2.$$

Példa: Kvadratikus alakra: f kétszer differenciálható (a, b) -ben, $q = d^2f(a, b)$

$$(d^2f(a, b))(x, y) = f''_{xx}(a, b) \cdot x^2 + f''_{yx}(a, b) \cdot x \cdot y + f''_{xy}(a, b) \cdot x \cdot y + f''_{yy} \cdot y^2.$$

Definíció: Egy $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak **pozitív**, illetve **negatív definit**, ha minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ esetén $q(x, y) > 0$, illetve $q(x, y) < 0$. A kvadratikus alakot **pozitív**, illetve **negatív szemidefinitnek** hívjuk, ha az előbbieken egyenlőség is meg van engedve. Egy $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak **indefinit**, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Egy q kvadratikus alak definitisége a $q(x, y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2$ egyenletben szereplő együtthatókból képzett

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix definitiségevel egyezik meg. Ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0$, akkor C pozitív definit, ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0$, akkor C negatív definit. A $c_{21} = c_{12}$ (szimmetrikus mátrix) esetben, ha $\det C = 0$, akkor C (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha $\det C < 0$, akkor C indefinit.

A következő tétel arról szól, hogy ha egy függvény kétszer differenciálható (a, b) -ben, akkor a $d^2f(a, b)$ kvadratikus alak definitisége hasonló szerepet játszik a lokális szélsőérték létezésében, mint egyváltozós függvények esetén az adott pontbeli második derivált előjele.

Tétel: (Lokális szélsőérték létezése) Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az

$(a, b) \in \text{int } D(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$.

1. Ha f -nek (a, b) -ben lokális minimuma, illetve maximuma van, akkor a $d^2f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív, illetve negatív szemidefinit.
2. Ha a $d^2f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív, illetve negatív definit, akkor f -nek (szigorú) lokális minimuma, illetve maximuma van (a, b) -ben.

A következőkben ismertetjük a Lagrange multiplikátor módszert, melyet szintén szélsőérték keresésnél alkalmazunk, de előtte definiáljuk a módszerben használatos feltételes szélsőértéket.

Definíció: Legyenek $g_1, g_2, \dots, g_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, továbbá

$$H := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) = 0, \dots, g_q(x) = 0\}.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek $g_1 = 0, \dots, g_q = 0$ feltétel mellett **feltételes szélsőértéke** van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

Lagrange multiplikátor módszer: Ha $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények és az $(x_0, y_0) \in G$ pontban az f -nek a $g(x, y) = k$ feltétel mellett szélsőértéke van, akkor vagy $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, vagy $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ amelyre $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

2.7.3. Implicit függvény

Ezek után ismerkedjünk meg az **implicit függvénnyel**.

Probléma: Az $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével? Vagyis van-e olyan φ függvény, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in D(\varphi)$?

Tétel: (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel) Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $f(a, b) = 0$, $(a, b) \in D(f)$. Tegyük fel, hogy f folytonos az (a, b) pont egy környezetében és $\exists f'_y \neq 0$ ebben a környezetben. Ekkor létezik a -nak, illetve b -nek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}$, illetve $K(b) \subset \mathbb{R}$ környezete, hogy

1. Minden $x \in K(a)$ esetén $\exists! \varphi(x) \in K(b)$, melyre

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

2. A $\varphi: K(a) \rightarrow K(b)$ függvény folytonos $K(a)$ -n, $\varphi(a) = b$.
3. Ha f folytonosan differenciálható (a, b) -ben, akkor φ differenciálható is az a pontban, és

$$\varphi'(a) = -\frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}.$$

A következő példában szemléletes magyarázatot adunk az implicitfüggvény-tétel feltételeinek szükségéről, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet megoldásával.

Példa: Az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ függvény mindenütt folytonos és mindenütt differenciálható.

Ha $a^2 + b^2 = 1$ és $-1 < a < 1$, akkor $f'_b(a, b) = 2b \neq 0$, tehát az egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei teljesülnek. Ennek megfelelően van olyan, az a pont egy környezetében folytonos φ függvény, amelyre $\varphi(a) = b$ és $x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$. Nevezetesen, ha $b > 0$, akkor ilyen a $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény a $(-1, 1)$ intervallumban, ha pedig $b < 0$, akkor a $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvény elégíti ki a feltételeket $(-1, 1)$ -ben.

Ha viszont $a = 1$, akkor a semmilyen környezetében nem létezik ilyen függvény, hiszen $x > 1$ esetén $x^2 + y^2 - 1 > 0$ minden y -ra. Az egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei persze itt nem is teljesülnek, hiszen $a = 1$ esetén $b = 0$ és $f'_b(1, 0) = 0$. Ugyanez a helyzet az $a = -1$ pontban.

3. Alkalmazások, példák

3.1.

Ebben a feladatban példát adunk arra, hogy ha nem folytonosak a függvények másodrendű parciális deriváltjai, akkor nem feltétlenül teljesül a Young-tétel (lásd 16. oldal).

Feladat: Igazoljuk, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény esetében

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

Megoldás:

Az $f'_x(0, 0)$, illetve $f'_y(0, 0)$ értékeit az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x \cdot 0 \cdot \frac{(x)^2 - 0}{(x)^2 + 0}\} - 0}{x} = 0.$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\{0 \cdot y \cdot \frac{0 - (y)^2}{0 + (y)^2}\} - 0}{y} = 0.$$

Az f függvény x illetve y szerinti parciális deriváltja a következő alakú:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Azt, hogy f, f'_x, f'_y az origóban folytonos, egyszerűen igazolhatjuk polárkoordinátákra való áttéréssel.

Legyen

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$x = r \cos \varphi, \quad r \rightarrow 0$$

$$y = r \sin \varphi, \quad r \rightarrow 0.$$

Vegyük az $f'_x = y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ függvényt, és helyettesítsük be a polárkoordinátákat, így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} &= r \sin \varphi \frac{r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r^2} + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^4} = \\ &= r(\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

Utolsó lépésként belátjuk, hogy $\lim_{r \rightarrow 0} r(\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi) = 0$, mivel $r \rightarrow 0$ és $(\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi)$ korlátos, ugyanis $-2 \leq (\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi) \leq 2$.

Tehát a határérték valóban nulla, így f'_x folytonos az origóban.

Az f -ről és az f'_y -ről hasonló módon látható, hogy folytonos az origóban.

Végül meghatározzuk az $f''_{xy}(0,0)$, illetve $f''_{yx}(0,0)$ értékét:

A definíció szerint:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left\{ y \frac{0-(y)^2}{0+(y)^2} + 0 \right\} - 0}{y} = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left\{ x \frac{(x)^2-0}{(x)^2+0} - 0 \right\} - 0}{x} = 1.$$

A vegyes másodrendű parciálisok értékei tehát az origóban különbözőek. Ennek oka az, hogy a második parciális deriváltak nem folytonosak az origóban, ugyanis

$$f''_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{12xy^2(x^2+y^2)-16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Itt is a polárkoordinátákra áttérve: a számláló megjelölt tagja r^5 szerint, a nevező r^6 szerint tart nullához, így f''_{xy} nem korlátos.

A számláló megjelölt tagja a $12xy^2(x^2+y^2)$, ezen kívül az összes többi tag r^6 szerint tart a nullához.

Az f''_{yx} -ról hasonlóan látható, hogy nem korlátos a $(0,0)$ -ban.

3.2.

A következőkben példát látunk arra, hogy a differenciálszámítás hogyan alkalmazható a fizika területén.

Feladat: Határozzuk meg soros, illetve párhuzamos kapcsolások esetén az eredő ellenállás relatív hibáját!

Ha az ellenállások névleges értékei:

$$R_1 = 150\Omega, \quad R_2 = 500\Omega.$$

Mindkét érték 2% pontosságú, azaz

$$\Delta R_1 = 3\Omega, \quad \Delta R_2 = 10\Omega.$$

A feladat megoldása előtt nézzük a fizikai hátteret:

Az elektromos ellenállás (jele: R , mértékegysége: Ω) az anyag azon tulajdonsága, hogy az áram folyását gátolja. Az egyenáramú ellenállás azért keletkezik, mert a töltést hordozó részecskék ütköznek az adott anyag atomjaival.

Az Ohm-törvény használatával:

$$R = \frac{U}{I}, \text{ ahol } U \text{ az elektromos feszültség, az } I \text{ az elektromos áram jele.}$$

Eredő ellenállás: Ellenállások kapcsolása esetén a rendszer eredő ellenállása a kapcsolat módjáról függ:

- Soros kapcsolás:

Soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege. Azaz

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

- Párhuzamos kapcsolás:

Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak az összege. Azaz

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

A feladat megoldásához szükséges definíció a következő:

Definíció: Ha f differenciálható az (x, y) helyen, akkor abszolút hibája:

$$\Delta f = |f'_x(x, y)\Delta x| + |f'_y(x, y)\Delta y|.$$

Elnevezések:

Δf abszolút hiba,

$f \neq 0$ esetén $\frac{\Delta f}{f}$ relatív hiba,

$\frac{\Delta f}{f} \cdot 100$ százalékos hiba.

Megoldás:

a, Soros kapcsolás esetén a névleges érték:

$$R_s = R_1 + R_2 = 650\Omega.$$

Mivel összeg hibája a tagok hibáinak összegével egyenlő, így:

$$\Delta R_s = 13\Omega,$$

a relatív hiba pedig:

$$\frac{\Delta R_s}{R_s} = 0,02\Omega,$$

tehát az eredő ellenállás ugyancsak 2% pontosságú.

b, Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 115,4\Omega,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_p &= |f'_{R_1}(R_1, R_2)\Delta R_1| + |f'_{R_2}(R_1, R_2)\Delta R_2| = \\ &= \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2, \end{aligned}$$

rendezve:

$$\Delta R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 2,3\Omega.$$

A relatív hiba

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = 0,02\Omega,$$

tehát az eredő ellenállás most is 2% pontosságú. Lássuk be általánosan is, hogy ez nem véletlenül egyezik meg az összetevők pontosságával!

Alakítsuk át a ΔR_p -re kapott alakot!

$$\Delta R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2 R_1 \frac{\Delta R_1}{R_1} + R_1^2 R_2 \frac{\Delta R_2}{R_2}}{(R_1 + R_2)^2};$$

ha

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2},$$

tehát R_1 és R_2 azonos pontosságú, akkor e közös tényezőt kiemelve:

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1} R_p,$$

így

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta R_1}{R_1}.$$

Azonos pontosságú elemekből tehát soros, illetve párhuzamos kapcsolásokkal ugyanakkora pontosságú eredőt kapunk.

3.3.

Az alábbiakban példát mutatunk az implicitfüggvény-tétel alkalmazására.

Feladat: Határozzuk meg, mely pontokban nulla az

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

egyenlettel definiált y függvény deriváltja!

Megoldás:

A feladatban

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

$$F'_x = 3x^2 - 3ay,$$

$$F'_y = 3y^2 - 3ax.$$

Az implicit függvény-tételt (lásd 20. oldal) használva:

$$y'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \quad y^2 \neq ax.$$

Ha $y' = 0$, akkor $ay - x^2 = 0$, tehát $y = \frac{x^2}{a}$. Ezt az értéket az eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3ax \frac{x^2}{a} = 0,$$

vagyis

$$x^3 \left(1 + \frac{x^3}{a^3} - 3 \right) = 0,$$

amely egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = a\sqrt[3]{2}.$$

Az $x_1 = 0$ esetben: $y_1 = 0$, így $f'_y = 0$, tehát $y'(0)$ a fenti képlet alapján nem értelmezhető.

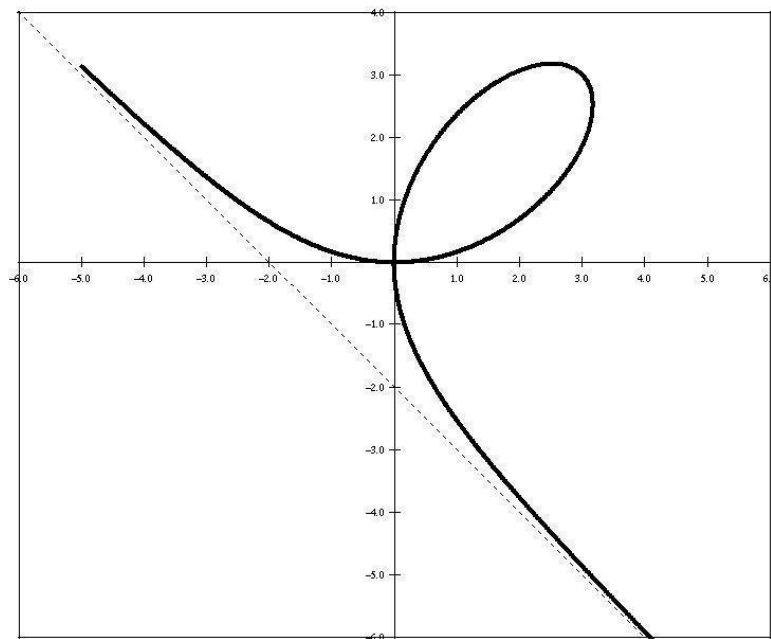
Az

$$x_2 = a\sqrt[3]{2} \text{ esetében } y_2 = a\sqrt[3]{4}$$

és

$$y_2^2 \neq ax_2, \text{ így e helyen valóban értelmezhető } y' \text{ és } y'(x_2) = 0.$$

Az ábrán ábrázoljuk az $f(x, y) = 0$ nívóhalmazt, ahol az $a = 2$.



4. ábra

Az utolsó két feladatban kétváltozós szélsőértékkeresésre mutatunk példákat.

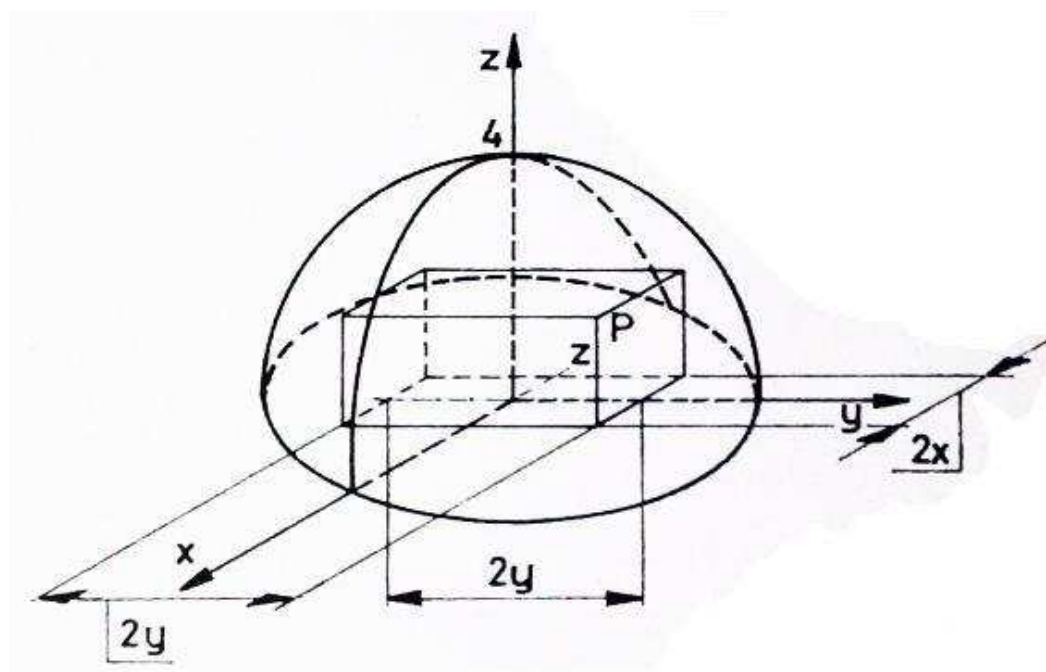
3.4.

Feladat: Határozzuk meg a

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak!

Megoldás:



5. ábra

a, Az ábrából láthatóan

$$V = 4xyz,$$

ahol, mivel a P pont a felületen van

$$z = 4 - x^2 - 2y^2.$$

Tehát a

$$V = 4xy(4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3,$$

$$D_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

kétváltozós függvény abszolút szélsőértékét keressük. Mivel a függvény értéke a határokon mindenütt nulla, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőérték hely lehet.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$V'_x = 16y - 12x^2y - 8y^3 = 4y(4 - 3x^2 - 2y^2),$$

$$V'_y = 16x - 4x^3 - 24xy^2 = 4x(4 - x^2 - 6y^2).$$

Mivel $x = 0$, illetve $y = 0$ esetén a térfogat nem lehet maximális, így a lehetséges szélsőérték helyeket az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$3x^2 + 2y^2 = 4,$$

$$x^2 + 6y^2 = 4,$$

amelynek megoldása (csak a pozitív értékek figyelembevételével):

$$x = 1; y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ tehát } z = 2. \text{ Így a téglatest oldalai: } 2, \sqrt{2}, 2.$$

Mivel egy korlátos, zárt tartományon folytonos függvény itt felveszi legnagyobb értékét (a Weierstrass-tételből következik, lásd: 18. oldal), s a tartomány határain $f(x, y) = 0$, biztos, hogy e pont valóban maximumhely. Azt, hogy tényleg a maximális térfogatú téglatest adatait határoztuk meg, az elégséges feltétel vizsgálatával is beláthatjuk:

$$V''_{xx} \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -24xy = -12\sqrt{2} < 0,$$

$$V''_{yy} \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -48xy = -24\sqrt{2},$$

$$V''_{xy} \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 16 - 12x^2 - 24y^2 = -8.$$

A determináns

$$\begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{vmatrix} = 512 > 0,$$

tehát van szélsőérték, és az maximum, mert V''_{xx} e helyen negatív, $-12\sqrt{2}$.

b, Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőértékfeladatként!

Keressük a

$$V = 4xyz \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy a $P(x, y, z)$ pont az $x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0$ felületen van.

A $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 4$ és legyen $f(x, y, z) = 4xyz$.

Először vesszük az g függvény, majd az f függvény összes változó szerinti parciális deriváltját:

$$g'_x(x, y, z) = 2x,$$

$$g'_y(x, y, z) = 4y,$$

$$g'_z(x, y, z) = 1,$$

ezekből megkapjuk, hogy a $\nabla g = (2x, 4y, 1)$.

$$f'_x(x, y, z) = 4yz,$$

$$f'_y(x, y, z) = 4xz,$$

$$f'_z(x, y, z) = 4xy,$$

ebből következik, hogy $\nabla f = (4yz, 4xz, 4xy)$.

A Lagrange multiplikátor módszert (lásd 19. oldal) alkalmazva:

$$\lambda \nabla g = \nabla f, \text{ azaz } \lambda(2x, 4y, 1) = (4yz, 4xz, 4xy).$$

$$\text{Három egyenletet kapunk: } \begin{cases} \lambda 2x = 4yz \\ \lambda 4y = 4xz \\ \lambda = 4xy \end{cases}$$

A három egyenletet átrendezzük úgy, hogy a baloldalon csak a λ maradjon és ebből következik, hogy

$$\frac{4yz}{2x} = \frac{4xz}{4y} = 4xy,$$

majd közös nevezőre hozzuk őket és beszorzunk a kapott nevezővel, így

$$16y^2z = 8x^2z = 4x^2y^2,$$

az egyenletet elosztjuk 4-el,

$$4y^2z = 2x^2z = 4x^2y^2.$$

Ebből:

- $2y^2z = 4x^2y^2$, mindkét oldalt osztva $2y^2$ -tel megkapjuk, hogy $z = 2x^2$.
- $x^2z = 4x^2y^2$, mindkét oldalt x^2 -tel elosztjuk, így az eredmény $z = 4y^2$.

Tehát a megoldás a következő: $2x^2 = 4y^2 = z$.

A kapott eredményt behelyettesítjük az $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0$ feltételbe és így megkapjuk, hogy $z = 2$, tehát $x = 1$ és $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ami megfelel előző eredményünknek.

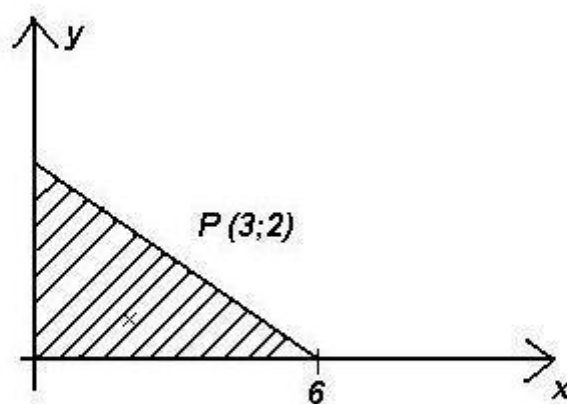
3.5.

Feladat: Határozzuk meg az

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0, y = 0, x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!

Megoldás:



6. ábra

Korlátos, zárt tartományról van szó, ezért f itt biztosan felveszi legkisebb, illetve legnagyobb értékeit (a Weierstrass-tételből következik, lásd: 18. oldal).

Az első rendű parciálisok:

$$f'_x(x, y) = (2x - 6)(y^2 - 4y),$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 - 6x)(2y - 4).$$

Lokális szélsőérték csak azokban a pontokban lehet, amelyekre:

$$(2x - 6)y(y - 4) = 0$$

és

$$x(x - 6)(2y - 4) = 0.$$

Az első egyenletből $x = 3$ vagy $y = 0$, illetve $y = 4$; hasonlóan a másodikból $y = 2$ vagy $x = 0$, illetve $x = 6$. Ennek megfelelően a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(3,2); P_2(0,0); P_3(0,4); P_4(6,0); P_5(6,4).$$

A második parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2(y^2 - 4y), \quad f''_{yy}(x, y) = 2(x^2 - 6x), \quad f''_{xy}(x, y) = (2x - 6)(2y - 4).$$

A P_1 pontban a determináns:

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

tehát van lokális szélsőértéke, s mivel $f''_{xx}(P_1) < 0$, így ez lokális maximum.

E pont a tartomány belsejében van, és itt

$$f(3, 2) = 36.$$

A többi pontról pedig tudjuk, hogy a $P_2(0, 0)$; $P_3(0, 4)$; $P_4(6, 0)$ pontok tartomány határain vannak, a $P_5(6, 4)$ pont pedig kívül esik a tartományon.

Vizsgáljuk meg az f viselkedését a tartomány határain!

Ha $x = 0$, vagy $y = 0$, akkor $f = 0$.

Ha $x + y = 6$, azaz $x = 6 - y$,

akkor a függvény

$$f(y) = (y^2 - 6y)(y^2 - 4y) \quad y \in [0, 6].$$

Keressük ezen egyváltozós függvény szélsőérték helyeit. $y = 0$, illetve 6 esetén a függvényérték zérus, így csak belső pontban lehet szélsőérték. A függvény deriváltja:

$$f'(y) = (2y - 6)(y^2 - 4y) + (y^2 - 6y)(2y - 4).$$

A derivált zérushelyei:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{3}{4}(5 + \sqrt{3}); \quad y_3 = \frac{3}{4}(-\sqrt{3}).$$

Mivel $x = 6 - y$, így

$$x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{3}{4}(3 - \sqrt{3}); \quad x_3 = \frac{3}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

f helyettesítési értékei e pontokban:

$$f(Q_1) = 0,$$

$$f(Q_2) \approx -25,43,$$

$$f(Q_3) \approx 33,08.$$

A függvény tehát adott tartománybeli legnagyobb értékét a tartomány belsejében, a $P(3, 2)$ pontban; legkisebb értékét a tartomány határán a $Q_2\left(\frac{3}{4}(5 + \sqrt{3}), \frac{3}{4}(3 - \sqrt{3})\right)$ pontban veszi fel.

Irodalomjegyzék

- [1] Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997
- [2] Fekete Zoltán – Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985
- [3] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005
- [4] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007