Opció, opció árazása

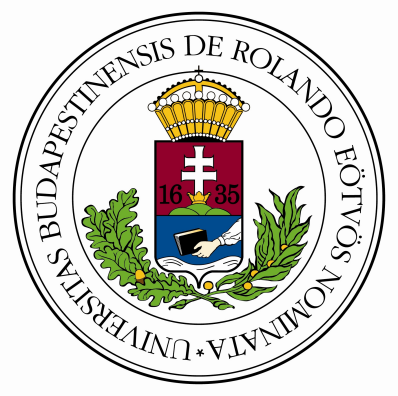
Szakdolgozat

Írta: Kiss Valéria

Elemző matematikus szak

Témavezető:

Sikolya Eszter, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Opciók **5**

3. Opciók árazása **11**

4. Binomiális modell **14**

4.1. Egyperiódusú binomiális fák 14

4.2. Kétperiódusú binomiális fák 16

4.3. Többperiódusú binomiális fák 17

5. Black-Scholes árazás **22**

5.1. Bevezetés 22

5.2. Black-Scholes differenciálegyenlet 24

„Egy matematikai elméletet - mint egyébként minden más dolgot - könnyebb felfogni, mint elmagyarázni a szépségét.”

Arthur Cayley

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozat témájául az opciók árazásának problémáját választottam, mely egy rendkívül összetett és máig aktuális matematikai és közgazdaságtani kérdés. Az opciók árazására vonatkozó modellek akkor kerültek az érdeklődés középpontjába, amikor felismerték, hogy a különböző értékpapírok árfolyamainak mozgását jól le lehet írni egy sztochasztikus folyamattal. Innen pedig egyenes út vezetett a tőzsde valamint a különböző értékpapírok és származékaik árfolyamainak matematikai modellezéséhez.

Dolgozatomban az opció árazására vonatkozó modellek közül a binominális modell, valamint a Black-Scholes modell elemzését végezem el. Kiindulásként a második fejezetben meghatározom az opció, valamint fajtái, az eladási és a vételi opció fogalmát, mivel ezek definiálása a további fejezetek tárgyalásához szükséges. A harmadik fejezetben az opciók árazásával foglalkozom, amely arra a kérdésre ad választ, hogy mekkora értéket rendeljünk az opcióhoz egy adott pillanatban. A negyedik fejezetben tárgyalom a binominális modellt, ami egy olyan fa, amely egy származtatott termék futamideje alatt az alaptermék árfolyama által követhető lehetséges utakat jeleníti meg. Ezt többperiódusú fákon keresztül mutatom be, ahol a termékek kifizetése nem csak kettő, hanem tetszőlegesen sok értéket felvehet, attól függően, hogy mekkora időintervallumot vizsgálunk. Az ötödik fejezetben az opcióárazás egy másik módszerének, a Black- Scholes modellnek az elemzését végzem el, amely szükségessé teszi a sztochasztikus módszerek rövid ismertetését is. A Black-Scholes modell jelentősége abban áll, hogy leegyszerűsítette az opcióárazás problémáját. A formula öt paraméter megadásával képes meghatározni az opció értékét (jelenlegi részvényár-

folyam, kötési árfolyam, számított hozam éves szórása, lejáratig hátralévő idő, éves kamatláb). A képletet nap mint nap használják az opciós tőzsdék üzletkötői.

Hálásan köszönöm Sikolya Eszter tanárnőnek, hogy odaadó, precíz munkájával, hasznos tanácsaival hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez.

2. fejezet

Opciók

Dolgozatom fő témája az opciók, először az ezekre vonatkozó definíciókat vezetném be.[1]

2.1. Definíció. *Az opció egy olyan jog, amely lehetőséget ad egy bizonyos cselekvésre, a tulajdonos azonban nem köteles élni a jogával. Az opció a latin "optio" szóból származik, ami szabad akaratot jelent. Két fajtája van, a vételi (call option) és az eladási opció (put option).*

Vételi opció: Olyan jog, mely lehetővé teszi a tulajdonosának, hogy az alaptermékét egy adott időpontban (lejáratkor) egy adott áron (kötési árfolyamon) megvásárolja.

2.2. Példa. Az "A" személy fizet "B"-nek $C = 9$ dollár-t, vagyis vásárol egy call opciót, hogy egy bizonyos terméket $T = 1$ év múlva, $K = 100$ dollár-os árfolyamon megvehessen "B"-től. "A" akkor fog vásárolni, ha a termék árfolyama 100 dollár fölött lesz, ekkor ő nyer, "B" pedig veszít. Ha a termék ára 100 dollár alatt lesz, akkor "A" nem fog élni az opcióval. Láthatjuk azt is, hogy "B" vagy veszít vagy nem nyer.

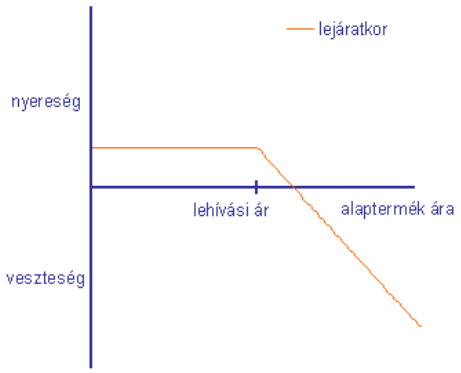
Eladási opció: Olyan jog, mely arra jogosítja fel a tulajdonosát, hogy eladjon egy terméket egy meghatározott áron egy meghatározott időpontban. Ez egyfajta biztosíték, hogy az opció birtokosa jó áron el tudja adni a termékét.

[1] A következő fejezet az [5] forrás felhasználása alapján készült.

2.3. Példa. Az "A" személy fizet "B"-nek $P = 6$ dollárt, hogy egy bizonyos terméket $T = 1$ év múlva, $K = 100$ dollár-os árfolyamon eladhasson "B"-nek. Ilyen opciót akkor vesznek igénybe, ha attól lehet tartani, hogy a termék árfolyama alacsony lesz.

Ezekben az esetekben a meghatározott időpontot *lejáratnak* hívjuk (expiration date, exercise date, maturity), az ügyletben szereplő árfolyamot pedig *lehívási árfolyamnak* (exercise vagy strike price) nevezzük.
Az opció mögöttes termékei lehetnek bármilyen termékek, egyedi részvények, részvényindexek, adósságpapírok, devizák, árucikkek, vállalati kötvények, határidős ügyletek, stb.

Minden opciónak két résztvevője van. Az opció megvásárlója a jogosult, az eladója a kiíró vagy kötelezett. Az opció birtokosa jogosult az alaptermék megvásárlására, vagy eladására. Az opció kiírója köteles az opciós szerződésnek megfelelően teljesíteni.
Az opciós ügylet egyik szereplőjére azt mondjuk, hogy hosszú pozícióban van (ő vette meg az opciót), másik szereplője pedig rövid pozícióban van (ő adta el, vagy írta ki az opciót).

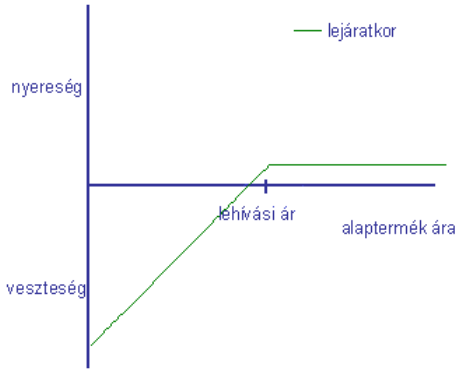


2.1. ábra. Hosszú pozícióban álló befektető

Az opció kiírója kezdetben pénzt kap, de a későbbiekben potenciális kötelezettségei lehetnek. Az eladó nyeresége vagy vesztesége ellentéte annak, amit a vásárló kap.

Az opciók jellegük szerint kétfélék lehetnek:

1. **Európai opció:** a joggal csak az opció lejártakor lehet élni. A lejáratkori



2.2. ábra. Rövid pozícióban álló befektető

értéke megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával.

2. **Amerikai opció:** a joggal az opció lejáratáig bármikor lehet élni. Az opció lejáratkori értéke (lehívás kori értéke) megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával.

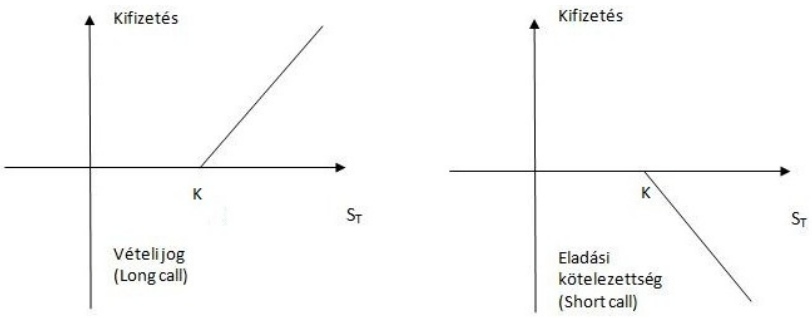
Opció eladásánál vagy vásárlásánál tisztában kell lenni azzal, hogy nem az alaptermékre irányul az üzletkötés, hanem a jogra: az alaptermék vásárlásának vagy eladásának jogára.
Az opciós pozícióknak négy lehetséges fajtája lehet:

1. *vételi opcióban hosszú pozíció* (long call- LC)
2. *eladási opcióban hosszú pozíció* (long put- LP)
3. *vételi opcióban rövid pozíció* (short call- SC)
4. *eladási opcióban rövid pozíció* (short put- SP)

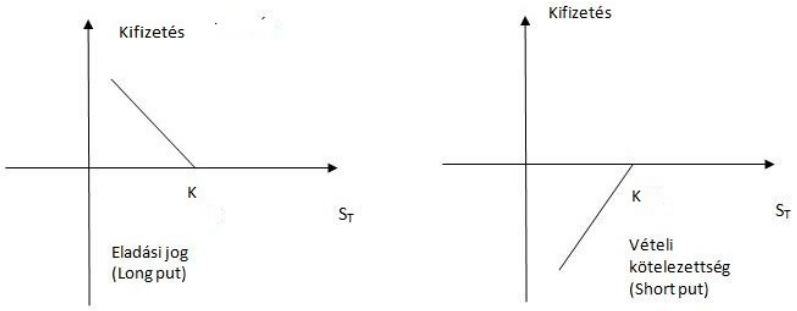
Ha az európai opciós pozíciókat lejárati kifizetésükkel jellemezzük, és K-val jelöljük a kötési árfolyamot, S_T-vel az alaptermék lejárati árfolyamát, akkor egy európai vételi opcióban való hosszú pozícióból származó kifizetés:

$$max(S_T - K, 0).$$

Vagyis az opció akkor kerül lehívásra, ha $S_T > K$, és ha $S_T \leq K$, akkor nem kerül lehívásra.



2.3. ábra. Opciós pozíciók lehetséges fajtái



2.4. ábra. Opciós pozíciók lehetséges fajtái

Európai vételi opcióban való rövid pozíció esetén a kifizetés:

$$-max(S_T - K, 0), \text{ vagy } min(K - S_T, 0).$$

Európai eladási opcióban való hosszú pozícióból származó kifizetés:

$$max(K - S_T, 0),$$

eladási opcióban való rövid pozíció kifizetése pedig:

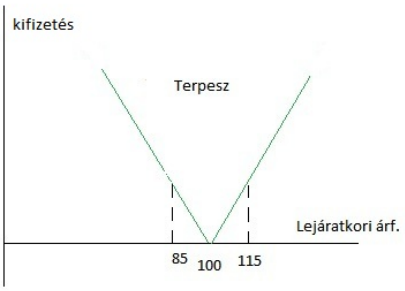
$$-max(K - S_T, 0), \text{vagy } min(S_T - K, 0).$$

Felmerül a kérdés, hogy mennyi kifizetést érhetünk el ezeknek az opciós stratégiáknak, pozícióknak az alkalmazásával. A válasz attól függ hogy milyen módon alkalmazzuk őket. Lehet *különbözeti kereskedési stratégiát* követni, ebben az esetben két vagy több egyforma típusú opcióban vállalunk pozíciót. Ennek típusait csak felsoroljuk részletesen nem fejtjük ki:

- Erősödő különbözeti ügylet,

- Gyengülő különbözeti ügylet,
- Pillangó különbözetek,
- Vízszintes különbözetek,
- Átlós különbözeti ügylet.

A különbözeti kereskedési stratégia helyett alkalmazhatunk *kombinációt.* Ez egy olyan opciókereskedési stratégia, melynek során egy adott termékre vonatkozó eladási és vételi opciókban is vállalunk pozíciókat. Legnépszerűbb kombinációk közé tartozik a *terpesz (straddle).* Ebben az ügyletben egy azonos lejárati idejű és kötési árfolyamú eladási és vételi opciót alkalmazunk. Ha a vételi és az eladási jogot megvásároljuk, akkor a legkedvezőbb esetet kapjuk, mert abban az esetben is nyerünk, ha az árfolyam felmegy, de akkor is ha lemegy. Az előzőekben említett két példa jelöléseivel $C = 9$ dollár, $P = 6$ dollár, ez összesen 15 dollár. Akkor fogunk nyerni, ha az árfolyam 115 dollár fölött lesz, vagy 85 dollár alatt.



2.5. ábra. Terpesz

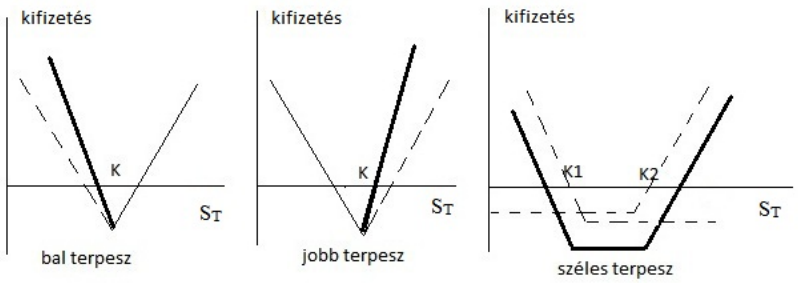
Ezzel a pozícióval arra teszünk fogadást, hogy az árfolyam változni fog – vagy felmegy vagy lemegy –, a lényeg, hogy ne maradjon 100 dollár. Ténylegesen viszont csak akkor nyerünk, ha az árfolyam 85 dollár alá vagy 115 dollár fölé emelkedik. A másik fél épp az ellenkezőjére fogad: ő azt szeretné, ha az árfolyam nem változna. Neki az lenne a legjobb, ha az árfolyam 85 dollár és 115 dollár között maradna. A legjobb helyzetbe akkor kerülne ha az árfolyam 100 dollár maradna.
Az előbbiekben említett terpesz kombináció tovább is fejleszthető.

- Bal terpesz (strip): ez egy olyan kombináció, mely egy vételi opcióban és két eladási opcióban való hosszú pozícióból áll, a kötési árfolyam és a lejárat azonos.

- Jobb terpesz (strap): ez egy olyan kombináció, mely két vételi opcióban és egy eladási opcióban való hosszú pozícióból áll, a kötési árfolyam és a lejárat azonos.

- Széles terpesz (strangle): ez egy olyan kombináció, ahol a befektető vesz egy azonos lejárati idejű, de eltérő kötési árfolyamú vételi és eladási opciót.

A fenti pozíciók nyereségfüggvényeit a következő ábra mutatja:



2.6. ábra. Bal, jobb és széles terpesz

Opciók ma már számos tőzsdén forognak világszerte, de nagy mennyiségű opció cserél gazdát tőzsdén kívül is, piacokon, bankokon, és más pénzügyi intézményeken keresztül.
A tőzsdéken forgalomba hozott opciók szabványosítva vannak. A tőzsdék a piaci szereplők igényeinek szem előtt tartásával, a piac likviditásának biztosítása érdekében meghatározzák az egyes opciós paramétereket: azok típusát (vételi, eladási), jellegét (amerikai vagy európai), a lejáratokat, a kötésegységeket, a lehívási árak lehetséges értékét és a teljesítés módját.

3. fejezet

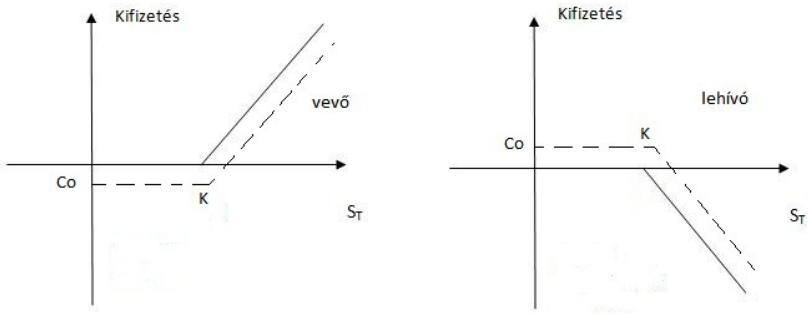
Opciók árazása

[1] Az árazás problémája abból áll, hogy mekkora értéket rendeljünk az opcióhoz egy adott pillanatban. A vevő kockázatmentes profitra tehet szert, ha nem fizet "belépési díjat" azért, hogy a lejárt napján az opciót kedvezően lehívhassa. Ha ez a díj túl magas, és a termék árfolyama közel marad a kötési árfolyamhoz, akkor senki se venné meg az opciót ezen az áron.
Ha a lehetséges kereskedési időpontok halmazát $\mathbf{T}$-vel jelöljük ($\mathbf{T} = \{0, 1, 2.., T\}$), akkor egy $(S_t)_{t\in\mathbf{T}}$ árfolyamattal rendelkező részvényre szóló európai opció vevője a

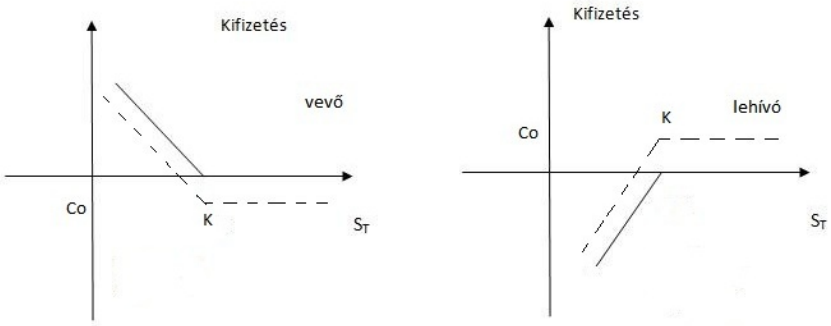
$$C_t = max(S_t - K, 0)$$

kifizetésben részesedhet a t időpontban. A vevő akkor fogja csak lehívni az opciót, ha $S_T > K$.
Ha az opció árát C_o al jelöljük, ábrázolhatjuk az opció vevőjének és kiírójának nyereség-veszteségfüggvényét. Tegyük fel, hogy a kockázatmentes kamatláb 0, a pénz értéke konstans marad. Az opció árának megállapításához először a **méltányos árat** kell meghatározni, amibe mindkét fél beleegyezik. Ezt az árat úgy kapjuk meg, hogy azon portfólió pillanatnyi árát határozzuk meg, amely pontosan ugyanazt a jövedelmet adja a T időpontban, mint az opció.
Ez az ár csak a kiírónak méltányos, az a legkisebb összeg, amely egy olyan részvényből és kockázatmentes kötvényből (vagy bankbetétből) álló portfólió előállításához szükséges, amely lehetővé teszi, hogy az opció értékét reprodukálja T időpontokban. Másrészt a vevő fedezni akarja minden potenciális veszteségét úgy, hogy az opció árának megfelelő összeget kölcsönvesz és azt befekteti a piacon.

[1] Ez a fejezet az [5] forrás alapján készült.



3.1. ábra. Vevő nyereség- illetve veszteségfüggvénye



3.2. ábra. Kiíró nyereség- illetve veszteségfüggvénye

A következőekben kizárjuk az arbitrázs lehetőségét, azaz egyetlen befektető sem képes kockázatmentes profitot realizálni. Ez a feltételezés alapvető az opcióárazás elméletében, mert másképp nem állhat fenn a piaci egyensúly.
Legyen C_t (ill. P_t) az (S_t) részvényre szóló európai call (ill. put) opció értéke a t időpontban. A kockázatmentes kamatláb 0. Jelölje

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor az európai call opció kifizetése $(S_T - K)^+$, a megfelelő put opcióé $(K - S_T)^+$. A definícióból nyilvánvaló, hogy a T időpontbeli lejáratkor:

$$C_T - P_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Ahhoz, hogy arbitrázs ne keletkezzen, a call és put áraknak minden $t = 0, 1, .., T$ időpontban ki kell elégíteniük az alábbi összefüggést:

$$C_t - P_t = S_t - K.$$

Vegyünk a $t \in \mathbf{T}$ időpontban egy részvényt S_t-ért, egy put opciót P_t-ért és adjunk el egy azonos K kötési árfolyamú és T lejáratú call opciót C_t-ért. A tranzakciók egyenlege $C_t - P_t - S_t$.
A T időpontbeli lejáratkor ha $S_T > K$, akkor a callt lehívják, ez K összegű készpénzbevételt eredményez. A put opciót viszont nem fogjuk lehívni, mert akkor kevesebbért adnánk el, mint amennyit ténylegesen ér.
Ha $S_T < K$, akkor lehívjuk a putot, ilyenkor kapunk a részvényünkért K dollárt. A vevő nem hívja le a callt, mert nem érné meg. Ebből látjuk, hogy egy put opció vételével és egy call eladásával a T időpontban K összegű kockázatmentes profithoz jutottunk:

$$P_T + S_T - C_T = K.$$

Az opció értékének meghatározására két fajta modellt szoktak alkalmazni. Az egyik csoportba tartoznak a binomiális és binomiálishoz hasonló modellek, a másikba pedig az olyan modellek, melyek során előre meghatározzák, hogy a részvényárfolyam milyen sztochasztikus folyamatot kövessen.
A következő fejezetekben ezen modelleket szeretném bemutatni.

4. fejezet

Binomiális modell

Az alábbiakban az opciók árazásának egyik népszerű módszerével, a binomiális fával foglalkozunk. Ez egy olyan fa, mely a származtatott termék futamideje alatt az alaptermék árfolyama által követhető lehetséges utakat jeleníti meg. Ezt a témakört az [1] forrás második fejezete alapján mutatjuk be.

A binomiális modellek között léteznek egy- és többperiódusú változatok. A többperiódusú modell rugalmasabb, mint az egyperiódusú, hiszen a termékek kifizetése nem csak 2, hanem tetszőlegesen sok értéket felvehet, attól függően, hogy mekkora időintervallumot vizsgálunk.

4.1. Egyperiódusú binomiális fák

4.1. Példa. Tekintsünk egy olyan modellt, melyben nem szerepel semmi más, csak egy részvény és egy fix kamatozású kötvény. Tegyük fel, hogy a részvény ára a kiindulási időpontban S_1, ennek értéke Δt idő múlva S_2, vagy S_3 lesz. A részvény árfolyama vagy lemegy, vagy felmegy: ha lemegy, S_3, ha felmegy, S_2 értékű lesz. Ezek bekövetkezési valószínűségeiről semmit nem teszünk fel. A fix kamatozású kötvényre azért van szükségünk, mert ez fogja mutatni a pénz időértékét. Megadunk egy r nagyságú folytonos kamatlábat, melyet a vizsgált 0 és Δt időpontok között állandónak tekintünk. A fix kamatozású kötvény kiindulási ára B_0, ennek értéke Δt idő múlva $B_0 e^{\Delta t r}$ lesz.

Célunk, hogy megtaláljuk a részvénynek és a kötvénynek azon kombinációját, mely előállítja az opcióból származó lehetséges jövedelmeket. Az opció értéke $f(3)$, ha a részvény értéke csökken, ha pedig nő, akkor $f(2)$. A részvény és a kötvény segítségével a befektető (az opció eladója) egy olyan portfóliót akar összeállítani, amivel ezt a követelést teljesíteni tudja Δt idő múlva.
Legyen a portfóliónk összetétele Φ db részvény, és Ψ db kötvény. Ezek ára a kiindulási pontban

$$\Phi S_1 + \Psi B_0. \tag{4.1}$$

A Δt idő múlva a portfólió értéke attól függ, hogy a részvény ára nő vagy csökken:

$$\Phi S_2 + \Psi B_0 e^{r\Delta t} = f(2), \text{ ha a részvény ára nő,}$$

$$\Phi S_3 + \Psi B_0 e^{r\Delta t} = f(3), \text{ ha a részvény ára csökken.}$$

Számítsuk ki a részvények és a kötvények számát

$$\Phi = \frac{f(2) - f(3)}{S_2 - S_3}, \tag{4.2}$$

$$\Psi = B_0^{-1} e^{-r\Delta t}(f(2) - \frac{f(2) - f(3)}{S_2 - S_3} S_2).$$

Ha ezeket behelyettesítjük a (4.1) egyenletbe, megkapjuk a portfóliónk kiindulási értékét V-t:

$$V = (\frac{f(2) - f(3)}{S_2 - S_3})S_1 + (B_0^{-1} e^{-r\Delta t}(f(2) - \frac{f(2) - f(3)}{S_2 - S_3} S_2))B_0. \tag{4.3}$$

Nézzük meg, mi történik akkor, ha a követelést a V kiindulási értéknél alacsonyabb áron jegyzik vételre/eladásra. Ilyenkor a derivatívát bárki megvásárolhatja, és ezzel párhuzamosan el is adhatja. Ebben az esetben a derivatívák és a részvényportfólió időszak végi, összesített netto értéke 0 lesz, függetlenül a részvény árfolyamváltozásától.
Abban az esetben, ha V értéknél magasabb áron (jelöljük N-el) jegyzik a követelés értékét, akkor az időszak végi értéke $N - V$ lesz.
A (4.3) egyenletet átrendezzük,

$$V = f(3)(\frac{-S_1}{S_2 - S_3} + e^{-r\Delta t}\frac{S_2}{S_2 - S_3}) + f(2)(\frac{S_1}{S_2 - S_3} + e^{-r\Delta t}(1 - \frac{S_2}{S_2 - S_3})) \tag{4.4}$$

Vezessük be a

$$q = \frac{S_1 e^{r\Delta t} - S_3}{S_2 - S_3} \tag{4.5}$$

konstanst, melyről tegyük fel, hogy értéke 0 és 1 közötti tartományban helyezkedik el. Ezt behelyettesítve a (4.4) képletünkbe megkapjuk a portfólió kiindulási értékét:

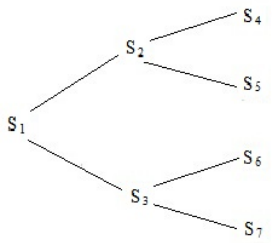
$$V = e^{-r\Delta t}((1-q)f(3) + qf(2)). \tag{4.6}$$

4.2. Kétperiódusú binomiális fák

Ebben a modellben az előzőekhez hasonlóan képzeletbeli pénzügyi világunk továbbra is két eszközt tartalmaz, részvényt és kötvényt. Lényeges változás viszont, hogy most már több időszakot vizsgálunk és a periódusonként bekövetkező változásokat egymásra építjük.

A részvény árfolyamát a továbbiakban is S-el jelöljük. A részvényünk kiindulási ára S_1 marad, ennek alakulását előre nem tudjuk. A részvényünk ára, ha felfelé megy S_2, ha lefelé megy S_3 értéket veszi fel. A bekövetkezési valószínűségekről még mindig nem teszünk fel semmit. Az eltérés a kétperiódusú modellekben abban nyilvánul meg, hogy a részvények újabb két értéke Δt idő elteltével függeni fog már az első időpontban felvett értékektől is. Tehát, S_2 értéke változhat S_4-re vagy S_5-re, attól függően, hogy növekszik vagy csökken. S_3 értéke változhat S_6-ra, ha nő vagy S_7-re, ha csökken. A kétperiódusú modell felbontható három egyperiódusú modellre.

A (4.1) ábrán látható kétperiódusos modell két ágból áll, $(2-4-5)$ és $(3-6-7)$.



4.1. ábra. A részvény lehetséges értékei két periódusra

Ebből következik, hogy $f(2)$ értékét $f(4)$-ből és $f(5)$-ből számíthatjuk ki a (4.6) alapján.

$$f(2) = e^{-r\Delta t}((1-q_2)f(5) + q_2 f(4)),$$

$f(3)$ értékét pedig $f(6)$-ból, és $f(7)$-ből lehet kiszámolni

$$f(3) = e^{-r\Delta t}((1-q_3)f(7) + q_3 f(6)).$$

A képletekben szereplő q_j-k a $(S_j e^{r\Delta t} - S_{2j+1})/(S_{2j} - S_{2j+1})$ konstansokat jelölik, a (4.5) alapján. Ebben a példában:

$$q_2 = \frac{S_2 e^{r\Delta t} - S_5}{S_4 - S_5} \quad \text{és} \quad q_3 = \frac{S_3 e^{r\Delta t} - S_7}{S_6 - S_7}.$$

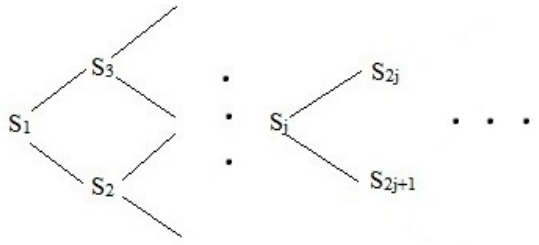
Ezzel kiszámítottuk az első időpontbeli lehetséges értékeket, ami felfelé lépéskor $f(2)$, lefelé lépéskor $f(3)$ lesz. A nulladik időponbeli érték

$$f(1) = e^{r\Delta t}((1 - q_1)f(3) + q_1 f(2)).$$

A kétperiódusú fát fel tudtuk bontani három egy periódusú fára, ha minden fánál hasonlóképpen járunk el, akkor tetszőlegesen nagy periódusszámú fákkal is tudunk számolni.

4.3. Többperiódusú binomiális fák

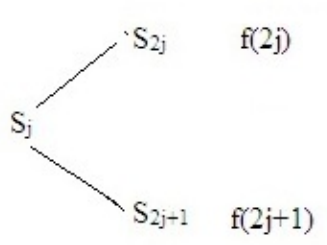
Az előzőekben tárgyalt modellt szerenénk általánosítani. A kötvény és a részvény árváltozását $t = n\Delta t$ hosszú időintervallumban vizsgáljuk. A kötvény kamatrátája a $[0, t]$ intervallumban konstans r marad, ebből következően $B_t = B_0 e^{rt}$. A részvény árváltozását binomiális fával lehet ábrázolni, ahol S_j érték Δt idő elteltével S_{2j}, vagy S_{2j+1} értéket vesz fel. $S_{2j+1} < S_j < S_{2j}$



4.2. ábra. A részvény árváltozása

Adott egy X követelés, ami $f(k)$-t fizet, ha a részvény árfolyama S_k. Arra keressük a választ, hogy ez a követelés milyen konstrukcióval érhető el, és mi ennek a követelésnek az értéke a kiindulási időpontban.

Tekintsük a modellben használt fa egy kisebb részletét, ahol a követeléseink $f(2j)$ és $f(2j + 1)$.



4.3. ábra.

A következőkben szeretnénk kiszámolni a portfólió kiindulási értékét, az előzőekben kiszámolt (4.6) képletet $f(j)$ értékű portfólióvá átalakítva:

$$f(j) = e^{-r\Delta t}((1-q_j)f(2j+1) + q_j f(2j)),$$

ahol

$$q_j = \frac{S_j e^{r\Delta t} - S_{2j+1}}{S_{2j} - S_{2j+1}}.$$

A fa megfelelő két éléhez a q_j, illetve $(1-q_j)$ számokat rendeljük.

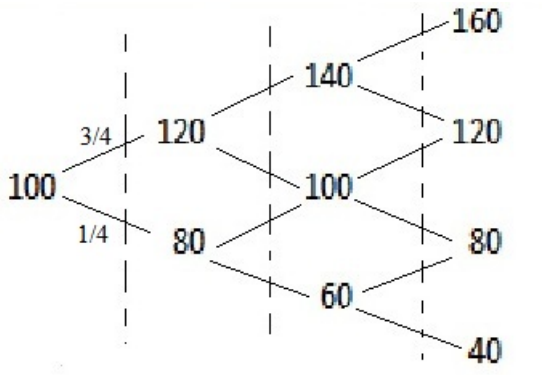
Egy n periódusú fát alapul véve, induljunk el a legutolsó ágaktól. Bármely $(n-1)$ időpontbeli állapotból két n időpontbeli állapotba juthatunk el. Számítsuk ki minden $(n-1)$ időpontbeli állapotra a részvényt és a kötvényt tartalmazó $(\Phi\Psi)$ portfóliót. Így tehát visszafelé haladva kitölthetjük a fát. A faágak legvégét kifizetésekkel töltjük fel, ezt követően időben visszfelé haladva $(\Phi\Psi)$ portfóliókat állítunk elő minden egyes állapotra, ami lépésenként garantálja a helyes eredményt. A kezdeti időponthoz érve végül egy eredményt kapunk, a nulladik időpontbeli értéket, ezen az áron tudjuk a kezdeti portfóliót megvásárolni.

Az előzőekben leírtakat szemléltessük egy példán keresztül.

4.2. Példa. [1] Különböző S részvényárfolyamokat tüntetünk fel egy összeölelkező fán. Osszuk fel 4 időintervallumra az ábránkat. $(0., 1., 2., 3.)$

A részvény ára a kezdeti időpontban 100\$. Ez az első időszakban vagy 120\$-ra emelkedik, vagy 80\$-ra csökken. A második időszakban a részvény ára 140\$-re emelkedhet, vagy 100\$ lehet ismét, vagy 60\$-ra csökkenhet. A harmadik időszakban

[1] Az említett példa a [1] forrásból származik.



4.4. ábra. Részvényár-folyamat összeölelkező fán

hasonló módon az előzőekhez 160$, vagy 120$, vagy 80$, vagy 40$ lehet. Feltesszük, hogy a kockázatmentes kamatláb $r = 0$.

Határozzuk meg a 3. időperiódus végén lejáró, a részvényre vonatkozó 100$-os lehívási árfolyamú vételi opció értékét.

Határozzunk meg új q valószínűségi mértékeket, melyek szükségesek az f kifizetések/derivatívértékek meghatározásához. A kamatlábunk nulla, ezért a felfele illetve lefele lépések kockázatmentes valószínűségét meghatározhatjuk q-val (4.5) alapján.

$$q = \frac{S_{most} - S_{le}}{S_{fel} - S_{le}}$$

A továbbiakban f értékét úgy határozhatjuk meg a (4.6) alapján:

$$f_{most} = (1 - q)f_{le} + qf_{fel}.$$

A valószínűségi képletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy a q értéke mindenhol 1/2. ($q_1 = \frac{140-120}{160-120}$, $q_2 = \frac{100-80}{120-80}$,...) Ezek után már megtudjuk határozni az opció értékeit az utolsó előtti időpontokra. Az opció értékei az utolsó időperiódusban fentről lefele haladva $(60, 20, 0, 0)$. Ezeket úgy kaptuk meg, hogy a részvény időszak végi értékéből levontuk a kezdeti értéket.

A 2. periódusban:

$f_{1most} = 0,5 \cdot 60 + 0,5 \cdot 20 = 40$

$f_{2most} = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0 = 10$

$f_{3most} = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 = 0$

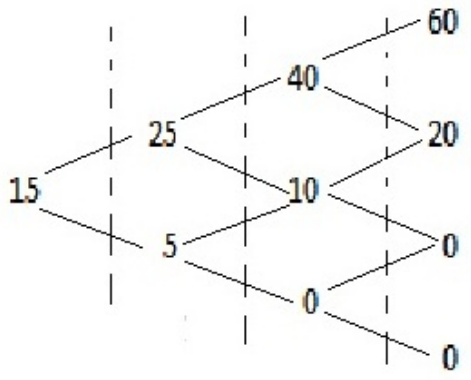
Az 1. *periódusban:*

$f_{1most} = 0,5 \cdot 40 + 0,5 \cdot 10 = 25$

$f_{2most} = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 0 = 5$

A 0. *periódusban:*

$f_{most} = 0,5 \cdot 25 + 0,5 \cdot 5 = 15$



4.5. ábra. Az opció értékeit ábrázoló fa

Kövessük nyomon a fedezetünket, ehhez használjunk Φ darab részvényt. Egyperiódusos modellnél ezt (4.2) képlettel számoltuk.

$$\Phi = \frac{f_{fel} - f_{le}}{S_{fel} - S_{le}}$$

Nézzük meg mi történik akkor, ha a részvényárfolyam az első lépésben felfele mozdul el, ekkor a

0. *periódusban:*

$\Phi = \frac{25-5}{120-80} = 0,5$ ez azt jelenti, hogy $0,5$ darab részvény vásárlása 50$-ba kerül $(0,5 \cdot 100)$, így további 35$ $(50 - 15)$ nagyságú hitelt kell felvennünk.

Ha a részvény árfolyama a továbbiakban felmegy 120-ra, akkor

1. *periódusban:*

$\Phi = \frac{40-10}{140-100} = 0,75$ ez azt jelenti, hogy $0,25$ darab részvényt kell új áron vásárolni, azaz 30$ $(0,25 \cdot 120)$-al fog nőni a felvett hitelünk nagysága, így összesen 65$ hitelünk lesz.

Ha a részvény árfolyama a harmadik lépésben felfele lép, 140-re, akkor

2. *periódusban:*

$\Phi = \frac{60-20}{160-120} = 1$ ez azt jelenti, hogy a portfólióban lévő részvények számát 1-re

növeljük, ezzel az összes adósság 100$-ra emelkedik
Ha a részvény árfolyama lemegy 120ra, akkor a
3. *periódusban:*
Túl kell adnunk a részvényen, az eladási árból kiegyenlíthetjük a fenálló 100$-os tartozást.
A következő táblázat az egyes folyamatok időbeli változásait mutatja:

Időpont (i)	Utolsó lépés	Részvény árfolyam (S_i)	Opció értéke (V_i)	Részvény pozíció	Kötvény pozíció
0	-	100	15	-	-
1	fel	120	25	0,50	-35
2	fel	140	40	0,75	-65
3	le	120	20	1,00	-100

4.6. ábra. Az opció érték és a fedezeti portfólió változása (fel)

Ha a részvényárfolyamunk a kezdeti lépésben lefelé mozdul el, a táblázatunk a következőképpen alakul:

Időpont (i)	Utolsó lépés	Részvény árfolyam (S_i)	Opció értéke (V_i)	Részvény pozíció	Kötvény pozíció
0	-	100	15	-	-
1	le	80	5	0,50	-35
2	fel	100	10	0,25	-15
3	le	80	0	0,50	-40

4.7. ábra. Az opció érték és a fedezeti portfólió változása (le)

Az opció értéke, a részvényárfolyam, a részvénypozíció és a betétpozíció a konkrét fel, le lépésektől változik. A részvénypozíciók és a betétpozíciók kiszámíthatóak, már a korábban megtett lépések alapján meg lehet őket határozni.

5. fejezet

Black-Scholes árazás

[1] A továbbiakban az opcióárazás egy másik módszerét, a Black-Scholes képlet segítségével történő árazást szeretném bemutatni. Ehhez szükség van a sztochasztikus kalkulus ismeretére, amelyből a számunkra legszükségesebb alapokat az alábbiakban röviden összefoglalom.

5.1. Bevezetés

*Sztochasztikus folyamat*oknak mondjuk azokat a folyamatokat, amelyeknél egy változó értéke időben bizonytalanul változik. Egy sztochasztikus folyamat lehet időben diszkrét és lehet időben folytonos folyamat. Abban az esetben amikor a változó értéke csak meghatározott rögzített időpontokban mozdulhat el, *időben diszkrét sztochasztikus folyamatokról* beszélünk. Ha a változó értékének változása bármikor bekövetkezhet, *folytonos változójú sztochasztikus folyamat*ról beszélünk.
Olyan speciális sztochasztikus folyamatokat, ahol csak a változó mostani értéke lényeges a jövő előrejelzése szempontjából, *Markov-folyamatoknak* nevezünk. Lényegében a változó múltbeli alakulása és az, hogy hogy jutottunk el a múltból a jelenbe, nem számít.

Wiener folyamatok

A részvényárfolyam-modelleket Wiener-folyamatok segítségével írjuk le. A Wiener-

[1] Ez a fejezet a [5] forrás alapján készült.

folyamatok speciális Markov-folyamatok. Tegyük fel, hogy g változó Wiener-folyamatot követ, nézzük meg Δt kis időintervallum alatt bekövetkező változását amit jelöljünk Δg-vel. Ekkor

$$\Delta g = \varepsilon\sqrt{\Delta t}, \tag{5.1}$$

ahol ε standard normális eloszlású valószínűségi változó (nulla várható értékkel és 1 szórással). Δg értékei bármely két különböző Δt időintervallumra függetlenek, Δg normális eloszlású, várható értéke 0, szórása $\sqrt{\Delta t}$, varianciája Δt.
Tekintsük egy T hosszú időszak alatt g megváltozását, jelöljük ezt $g(T) - g(0)$-al. Ekkor

$$g(T) - g(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i\sqrt{\Delta t}, \qquad \text{ahol} \qquad N = \frac{T}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad i = 1, 2...N.$$

Itt ε_i-k standard normális eloszlású valószínűségi változók és függetlenek egymástól. Ebben az esetben g megváltozása normális eloszlású, várható értéke 0, szórása $\sqrt{T}$, varianciája $N\Delta t = T$. A sztochasztikus folyamatoknak a varianciájuk és nem a szórásuk arányos a tekintett időintervallummal.
Írjuk fel Δg határértékét, ha $\Delta t \to 0$:

$$dg = \varepsilon\sqrt{dt}.$$

Tekintsünk egy általánosított x Wiener-folyamatot, melynek időbeli megváltozását a következő, ún. sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta g, \tag{5.2}$$

ahol a, b konstansok, g Wiener-folyamat. Látjuk hogy az egyenlet két részből áll. A $\Delta x = a\ \Delta t$ azt jelenti, hogy x-nek egységnyi időszakra a várható növekedési üteme (driftje) a. Ha kifejezzük a-t azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a,$$

amit felírhatunk úgyis, hogy

$$x = x_0 + at,$$

ahol x_0 az x nulla időpontbeli értéke. Az egyenlet másik tagja $b\Delta g$. Erre úgy tekintünk mint egy "zajra", valamilyen külső hatásra, mely változékonyságot ad az x

által követett pályához. b-t szórásnak (volatilitásnak) nevezzük. Az x értékének Δt idő alatt történő Δx megváltozása az (5.1) egyenlet felhasználásával felírható mint

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

ahol ε standard normális eloszlású valószínűségi változó.

Ito-folyamat

Az Ito-folyamat egy általánosított Wiener-folyamat, melynek időbeli változását az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlettel jellemezhetjük:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dg, \tag{5.3}$$

ahol a és b adott függvények, g Wiener-folyamat. Az x növekedési üteme a, varianciája b^2.

5.1. Lemma (Ito-lemma)**.** *Ha a $H(x,t)$ függvény x-nek és t-nek olyan függvénye, ahol x az* (5.3) *egyenlettel meghatározott Ito-folyamat, akkor*

$$dH = (\frac{\partial H}{\partial x}a + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial H}{\partial x}b\ dg. \tag{5.4}$$

A H növekedési üteme

$$\frac{\partial H}{\partial x}a + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}b^2,$$

varianciája

$$(\frac{\partial H}{\partial x})^2 b^2.$$

5.2. Black-Scholes differenciálegyenlet

Az F részvényárfolyam mozgásait a következő egyenlet segítségével modellezhetjük:

$$dF = \mu F dt + \sigma F dg, \tag{5.5}$$

ahol μ és σ konstansok, g Wiener-folyamat.
Ahhoz, hogy a Black-Scholes differenciálegyenlet jól alkalmazható legyen bizonyos feltételeket kell kikötni:

- a részvény ára Ito-folyamatot követ (ld. (5.5) egyenlet),

- az r kockázatmentes kamatláb állandó,
- nem adódhatnak osztalékok és kockázatmentes arbitrázslehetőségek,
- az értékpapír-kereskedés folyamatos,
- nincsenek tranzakciós költségek és adók.

Legyen $H(F,t)$ az F árfolyamú részvényre vonatkozó vételi opció árfolyama. Az Ito-lemmából következően az F-től és t-től függő H függvény a következőképpen változik:

$$dH = (\mu F\frac{\partial H}{\partial F} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2})dt + \sigma F\frac{\partial H}{\partial F}dg. \tag{5.6}$$

Írjuk fel az (5.5) és az (5.6) egyenletek diszkrét formáját.

$$\Delta F = \mu F\Delta t + \sigma F\Delta g, \tag{5.7}$$

$$\Delta H = (\mu F\frac{\partial H}{\partial F} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2})\Delta t + \sigma F\frac{\partial H}{\partial F}\Delta g, \tag{5.8}$$

ahol ΔF és ΔH a Δt rövid időintervallum alatt bekövetkezett változásai F-nek és H-nak.

Tekinsünk egy olyan Π portfóliót, melyben eladunk egy fenti vételi opciót és vásárolunk $\frac{\partial H}{\partial F}$ részvényt. Ekkor a portfóliónk értéke,

$$\Pi = -H + \frac{\partial H}{\partial F}F. \tag{5.9}$$

Nézzük meg Δt idő múlva a portfóliónk értékét:

$$\Delta\Pi = -\Delta H + \frac{\partial H}{\partial F}\Delta F. \tag{5.10}$$

Az előzőekben (5.7) és (5.8) által felírt egyenleteket visszahelyettesítve az (5.10)-es egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\Delta\Pi = -(\mu F\frac{\partial H}{\partial F} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2})\Delta t - \sigma F\frac{\partial H}{\partial F}\Delta g + \frac{\partial H}{\partial F}(\mu F\Delta t + \sigma F\Delta g)$$

Az egyenletet rendezve, azt kapjuk, hogy:

$$\Delta\Pi = (-\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial F^2}\sigma^2F^2)\Delta t. \tag{5.11}$$

A portfólió kockázatmentes a Δt időszakban, ezért ugyanakkora hozamot kell neki elérni, mint bármely másik rövid lejáratú értékpapírnak. Ebből az következik, hogy

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t.$$

Ebbe az egyenletbe beírva a fentebb kiszámolt (5.9) és (5.11) egyenleteket, azt kapjuk, hogy:

$$(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial F^2}\sigma^2 F^2)\Delta t = r(H - \frac{\partial H}{\partial F}F)\Delta t.$$

Elhagyva Δt-t, átírva az egyenletet:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rF\frac{\partial H}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2} = rH.$$

megkapjuk a Black-Scholes differenciálegyenletet.

5.2. Definíció. ***Black-Scholes parciális differenciálegyenlet***

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rF\frac{\partial H}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2} = rH, \tag{5.12}$$

ahol $H(F,t)$ jelöli az opció értékét, F a részvényárfolyamot, r a kockázatmentes kamatlábat, σ pedig a varianciát.

Az egyenlet megoldása a felhasznált peremfeltételektől függ.
Európai vételi opció esetén a peremfeltétel:

$$H(F,t) = \max(F - K, 0), \qquad \text{ahol } K \text{ a kötési árfolyam.}$$

Európai eladási opció esetén a peremfeltétel:

$$H(F,t) = \max(K - F, 0).$$

Mielőtt levezettük volna a differenciálegyenletet, tettünk bizonyos feltételeket, például, hogy **osztalékot nem fizető részvények**ről van szó, az r kamatláb állandó. Ezek nagyon fontos feltételek.

Az első fejezetben kifejtettek szerint felírhatjuk egy hosszú határidős pozícióban lévő opció lejáratkori értékét

$$F_T - K,$$

itt F_T-vel jelöljük a T időpontban lejáró részvény árát. Diszkontáljuk t időpontra a határidős pozíció értékét, egy kockázatmentes világban. Ekkor

$$H(F,t) = e^{-r(T-t)}\widehat{E}(F_T - K),$$

ahol $\widehat{E}$-jelöli a várható értéket. Mivel a kikötésünkben szerepel hogy a kötési árfolyam állandó, ezért az egyenletet átrendezhetjük.

$$H(F,t) = e^{-r(T-t)}\widehat{E}(F_T) - Ke^{-r(T-t)} \tag{5.13}$$

A továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy F_T lognormális eloszlású. Egy változónak lognormális az eloszlása, ha természetes alapú logaritmusa normális eloszlású. Ez azt jelenti, hogy $\ln F_T$ normális eloszlású, szórása arányos a $\sqrt{T-t}$-vel. Így $\ln F_T$ eloszlása felírható mint

$$\ln F_T \approx \Phi[\ln F + (r - \sigma^2/2)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}], \tag{5.14}$$

ahol $\Phi(m,s)$ jelöli az m várható értékű, s szórású normális eloszlást.
Egy kockázatsemleges világban az F részvényárfolyam növekedési üteme (μ), megegyezik a kockázatmentes kamatlábbal, r-el. Feltéve, hogy F_T lognormális eloszlású, igazolható, hogy

$$\widehat{E}(F_T) = Fe^{r(T-t)}.$$

Ezt visszaírva az (5.13) egyenletbe

$$H(F,t) = F - Ke^{-r(T-t)}, \tag{5.15}$$

ami kielégíti a Black-Scholes differenciálegyenletet.
A következőkben azt nézzük meg, hogy a határidős pozíciók elemzésével hogyan tudjuk levezetni a vételi és eladási opciókra vonatkozó árazási képleteket.

Egy európai vételi opció várható értéke lejáratkor egy kockázatsemleges világban:

$$\widehat{E}[\max(F_T - K, 0)].$$

Kockázatmentes kamatlábbal diszkontált értéke:

$$c = e^{-r(T-t)}(\widehat{E}[\max(F_T - K, 0)] \tag{5.16}$$

Az (5.16) egyenlet jobb oldalát integrálva és felhasználva a Black-Scholes egyenletet, megkapjuk egy európai vételi opció árazásához használt pontos képletet[2] :

$$c = FN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{5.17}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

és $N(x)$-el jelöljük a standarad normális eloszlású valószínűségi változó valószínűségeloszlás függvényét.

Hasonló módon ki lehet számolni egy eladási jog értékét is. Ennek eredménye:

$$p = Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - FN(-d_1). \tag{5.18}$$

Ezt a két képletet (5.17), (5.18) *Black-Scholes féle árazási képletek*nek mondják.

A következő példában megmutatjuk a fentiek egy alkalmzását.

5.3. Példa. [3] Nézzünk egy olyan esetet, amikor egy részvény árfolyama 6 hónappal az opció lejárata előtt 42 dollár, az opció kötési árfolyama 40 dollár, kockázatmentes kamatláb (éves) $r = 10\%$, a volatilitás 20%. Azaz $F = 42$, $K = 40$, $r = 0,1$ $\sigma = 0,2$, $T - t = 0,5$. Ekkor

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0,1 + 0,2^2/2)(0,5)}{0,2\sqrt{0,5}} = \frac{\ln 1,05 + 0,12 \times 0,5}{0,2\sqrt{0,5}} = 0,7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0,1 - 0,2^2/2)(0,5)}{0,2\sqrt{0,5}} = \frac{\ln 1,05 + 0,08 \times 0,5}{0,2\sqrt{0,5}} = 0,6278$$

$$Ke^{-r(T-t)} = 40e^{-0,1(0,5)} = 38,049$$

Ha az opció egy európai vételi jog, akkor árazásához az (5.17) egyenletet használjuk, így

$$c = 42N(0,7693) - 38,049N(0,6278).$$

Ha az opció egy európai eladási jog, akkor árát az (5.18) egyenlettel számolhatjuk ki:

$$p = 38,049N(-0,6278) - 42N(-0,7693)$$

[2]Részletesebben az [1] forrásban megtalálható.

[3]Az említett példa a [5] forrásból származik.

A szükséges normális eloszlásfüggvények közelítő értékei

$$N(0,7693) \approx 0,7791 \qquad N(0,6278) \approx 0,7349$$

$$N(-0,7693) \approx 0,2209 \qquad N(-0,6278) \approx 0,2651$$

Ezeket visszahelyettesítve a következő árfolyam értékeket kapjuk meg:

$$c = 4,76, \qquad p = 0,81.$$

Ez azt jelenti, hogy a részvényárfolyamnak a következő 6 hónapban $2,76$ dollárral kell emelkednie ahhoz, hogy a vételi jog vásárlója elérje a nyereségküszöböt, mivel 40$-os kötési árfolyamon fogja megvásárolni a részvényt, vásárolt $4,76$-ért opciót, a részvényárfolyam pedig most 42$. Ahhoz, hogy az eladási opció vásárlója, elérje a nyereségküszöböt, a részvényárfolyamnak $2,81$ dollárral kell csökkennie.

Most nézzük meg mi történik akkor, ha **a részvény osztalékot fizet**. Ebben az esetben ezt egy részvényárfolyam-csökkenésként lehet felfogni, melyet az osztalék kifizetése utáni napon érvényesítenek. Nézzük meg mi történik az árazási képlettel a folytonos osztalékot fizető részvényekre szóló európai opciók esetében. Egy q ütemű folytonos osztalékfizetés miatt a részvény árfolyamának növekedési üteme kisebb lesz (q-val). Egy T ideig érvényben lévő ismert q nagyságú osztalékozamot fizető részvényre szóló európai opciót árazunk. Ekkor a jelenlegi részvényárfolyamot F-ről $Fe^{-q(T-t)}$-re csökkentjük. Írjuk át a (5.17) és (5.18) egyenletekben szereplő F értékeket erre, így megkapjuk az a folytonos osztalékozamot fizető vételi opció díját:

$$c = Fe^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{5.19}$$

és az eladási opció díját:

$$p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Fe^{-q(T-t)}N(-d_1). \tag{5.20}$$

A hozzájuk tartozó d_1 és d_2 a következőképp adható meg:

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

5.4. Példa. Az előző példánkat bővítsük ki évi 5%-os osztalékhozammal. Ebben az esetben a részvény árfolyama $F = 42\$$, az opció kötési árfolyama $K = 40\$$, a kockázatmentes kamatláb $r = 10\%$, a volatilitás $\sigma = 20\%$, az osztalékhozam $q = 5\%$, $T - t = 0,5$.

Az (5.19) és a (5.20) képletek alkalmazásával számítsuk ki az opciók értékét. Ekkor

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0,1 - 0,05 + 0,2^2/2)0,5}{0,2\sqrt{0,5}} = \frac{\ln 1,05 + 0,07 \times 0,5}{0,2\sqrt{0,5}} = 0,5926,$$

$$d_2 = 0,5926 - 0,2\sqrt{0,5} = 0,4512,$$

$$Ke^{-r(T-t)} = 40e^{-0,1(0,5)} = 38,049,$$

$$Fe^{-q(T-t)} = 42e^{-0,05(0,5)} = 40,963.$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve az (5.19) képletbe, megkapjuk az osztalékhozamot fizető vételi opció értékét:

$$c = 40,963N(0,5926) - 38,049N(0,4512).$$

Az (5.20)-as képletbe való behelyettesítéssel megkapjuk az osztalékhozamot fizető eladási opció értékét:

$$p = 38,049N(-0,4512) - 40,963N(-0,5926).$$

A szükséges normális eloszlásfüggvények közelítő értékei

$$N(0,5926) \approx 0,7233 \qquad N(0,4512) \approx 0,6740$$

$$N(-0,5926) \approx 0,2767 \qquad N(-0,4512) \approx 0,3260$$

Ezeket visszahelyettesítve a következő árfolyam értékeket kapjuk meg:

$$c = 3,98, \qquad p = 1,07.$$

A Black-Scholes árazási képletek kiterjesztése nem csak a folytonos osztalékhozamot fizető részvények értékelésére használható, lehet alkalmazni indexekre, devizákra és határidős ügyletekre szóló opciók árazására is.

Irodalomjegyzék

[1] Baxter, Martin; Rennie, Andrew: *Pénzügyi kalkulus* . Typotex, Budapest 2002.

[2] Brealey, Richard A.; Myers, Stewart C.: *Modern vállalati pénzügyek.* Panem, Budapest 2005.

[3] Elliott, Robert J.; Kopp, P. Ekkehard: *Pénzpiacok matematikája.* Typotex, Budapest 2000.

[4] Gerencsér László, Michaletzky György, Vágó Zsuzsanna: *Bevezetés a pénzügyi matematikába.* Budapest 1998.
(oktatási segédlet: http://www.sztaki.hu/sztaki/ake/applmath/stoch/jegyzet.html)

[5] Hull, John C.: *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek.* Panem, Budapest 1999.