

Szakdolgozat

Szermek Ágnes Dóra
matematikatanár – informatikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2022.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

*Húsvéti díszek, barackevés és Gábrriel harsonája –
azaz analízis a gyakorlatban*

Témavezető:

Dr. Sikolya Eszter

egyetemi adjunktus

Alkalmazott Analízis és

Számításmatematikai Tanszék

Készítette:

Szermek Ágnes Dóra

matematikatanár – informatikatanár

osztatlan tanári mesterszak



2022.

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Szermek Ágnes Dóra(név)

..... Y7IOSC(Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az
ELTE..... matematikatanár, informatikatanárosztatlan tanári mesterszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam
be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás,
személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2022.11.24.

Szermek Ágnes Dóra
.....

a hallgató aláírása

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sikolya Eszternek, aki segítőkészségével, türelmével és kitartó munkájával a végsőkig segített a szakdolgozatom elkészítésében. Köszönöm, hogy amikor kérdésem volt, bármikor számíthattam rá, és a konzultációk során az idejét nem sajnálva támogatott hasznos tanácsaival, ötleteivel, valamint a hibáim javításában is nagy segítségemre volt.

Szeretném megköszönni Gémes Margitnak, hogy az analízis tárgyak során bármikor felkereshettem őt kérdéseimmel. Nagyon sokat köszönhetek neki abban is, hogy ő volt az, aki amellet, hogy megtanított arra, mennyire fontosak a tanórai rituálék, valamint hogy érdemes időről időre valami érdekességet is belecsempészni az órákba, megmutatta, hogy egyetemi környezetben, kevés óraszám és sok tananyag tanítása mellett is lehet foglalkozni a tanulók, hallgatók lelkével.

Köszönettel tartozom a családomnak, szeretteimnek, akik végig mellettem álltak az egyetemi tanulmányaim során, és velem izgultak a zárthelyi dolgozataim, beadandóim, vizsgáim eredményét illetően.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni páromnak, aki szeretetével és végtelen kitartásával lelki támaszt nyújtott a legnehezebb napokon (és órákban, percekben) is, és támogatott az álmaim, céljaim elérésében.

Köszönöm szépen még egyszer mindenkinek!

TARTALOMJEGYZÉK

Köszönetnyilvánítás	1
Tartalomjegyzék	2
1. fejezet: Bevezetés	4
2. fejezet: Fogalmi áttekintés, felhasznált tételek, definíciók.....	5
2.1. Függvények.....	5
2.2. Függvények határértéke	6
2.2.1. Környezet és pontozott környezet.....	6
2.2.2. Határérték fogalma	6
2.3. Differenciálszámítás	7
2.3.1. A derivált fogalma.....	7
2.4. Integrálszámítás	7
2.4.1. Primitív függvény.....	8
2.4.2. Riemann-integrál.....	9
2.4.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata	11
2.4.4. A Riemann-integrál néhány alkalmazása.....	12
2.5. Sorok.....	13
2.5.1. Végtelen sorok.....	13
2.6. Geometria áttekintés	14
2.6.1. Egyenes	14
2.6.2. Kör.....	14
2.6.3. Kúpszeletek	15
3. fejezet: Alkalmazások.....	16
3.1. Területszámítás	16
3.1.1. Feladat: Körök.....	16
1. Megoldás: (Körző felhasználásával, tételek felhasználása nélkül)	17
2. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)	18
3.1.2. Feladat: Tojás	20
1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)	21
2. Megoldás: (Az egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával)	22
3.2. Térfogatszámítás.....	26
3.2.1. Feladat: Őszibarack.....	26
1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)	26
2. Megoldás: (Az egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával)	36

3.2.2. Feladat: Üvegtál	39
1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)	39
2. Megoldás: (Az egyetemi Analízis eszközeinek felhasználásával)	40
3.2.3. Feladat: Gábiel harsonájának térfogata.....	42
1. Megoldás: (Integrálszámítás segítségével).....	43
2. Megoldás: (Durva becslés – Végtelen sorok segítségével)	44
3.3. Felszínszámítás	46
3.3.1. Feladat: Gábiel harsonájának felszíne	46
Megoldás: (Durva becslés – Végtelen sorok segítségével)	46
4. fejezet: A feladatok feldolgozása az iskolában.....	49
4.1. A feladatok megoldásához szükséges tananyag a kerettantervben, érettségi követelményekben	49
4.2. A feladatok feldolgozása szakkörön	52
4.2.1. Általános iskola 7-8. osztály	52
1. óra: Körzőhasználat, kör kerülete- és területe.	52
2. óra: A henger felszíne és térfogata.	53
3. óra: Torta felszíne és térfogata.	54
4.2.1. Gimnázium 12. osztály, emelt szintű érettségire készülők	56
1. óra: Területszámítás 1.....	56
2. óra: Területszámítás 2. – Fessünk tojást!	56
3. óra: Gömb és csonkakúp térfogatának meghatározása.....	57
4. óra: Mi múlik a sűrűségen?	58
5. óra: Integrálszámítás, függvény alatti terület meghatározása.....	59
6. óra: Integrálszámítás, forgástest térfogatának meghatározása.	60
7. óra: Érdekesség – Kitekintés az egyetemi analízisre – Gábiel harsonája.	61
5. fejezet: Összefoglalás	62
Irodalomjegyzék	63
Képjegyzék	65
Melléklet.....	66

1. fejezet: Bevezetés

A szakdolgozatomban az analízis néhány alkalmazását mutatom be olyan feladatokon keresztül, amelyek megoldhatóak általános- és középiskolában tanult módszerekkel, valamint az egyetemi analízis kurzusok során tanult fogalmak, tételek segítségével is. Tanárként ezzel az lenne a célom, hogy a matematika iránt érdeklődő tanulóknak – akik esetleg később a tárgy valamely területével szeretnének tovább foglalkozni – megmutathassam az egyszerűbb megoldások mellett a felsőbb matematikával való kapcsolódási pontokat, és ezzel együtt a tantárgy szépségét.

Háromféle témakörből mutatok be néhány alkalmazást, amelyeknek analízist alkalmazó megoldásai során főként az integrálszámítás felhasználásával dolgozom: ez a terület-, a térfogat-, valamint a felszínszámítás.

A dolgozat felépítése során elsőként az elméleti alapfogalmakat tekintjük át. Minden olyan analízissel, valamint kis részben geometriával kapcsolatos tudnivalót sorra veszünk, amire szükségünk lehet a feladatok kapcsán – mintegy alapot teremtve a dolgozat többi részének –, majd utána következik a dolgozat fő része, amely a munkám legnagyobb részét képezi: a feladatok, amelyekhez jó részben kétféle megoldás tartozik. A következő fejezetben a feladatok szakköri feldolgozását tekintjük át néhány oldalon, végül pedig összegzem a tapasztalataimat. Az egyik feladat egyetemi módszerekkel megoldott változata a mellékletben kapott helyet, a hosszadalmas, bonyolultabb számításai miatt.

Az elméleti áttekintésben az egyetemi jegyzeteimet (*Bevezető analízis 2.* [2], *Egyváltozós analízis 1-2.* [3] és [4], valamint *Bevezetés a geometriába* [5]), továbbá Sikolya Eszter *Analízis jegyzet* [1], Hajós György: *Bevezetés a geometriába* [6], Laczkovich Miklós és T. Sós Vera *Valós analízis I.* [7] című könyveit használom fel. A dokumentumban szereplő ábrákat, képeket (a szakköri képek kivételével) saját magam készítettem, ebben a Geogebra, illetve a Microsoft Office Word programja volt a segítségemre. A szakköri képek forrásjegyzéke a Képjegyzékben érhető el.

Az alkalmazások során egy kivétellel (a Gábrriel harsonájával kapcsolatos térfogat- illetve felszínszámítási feladat, mely során leginkább Julian F. Fleron megoldását elemeztem) önállóan dolgoztam ki. A feladatok egy része a *Szórakoztató szakköri feladatok* című – Gémes Margit által vezetett – szabadon választható tantárgy [8] feladatai közül került ki, illetve szerepelnek saját ötletből származó példák is a dolgozatban.

2. fejezet: Fogalmi áttekintés, felhasznált tételek, definíciók

Ahogy a bevezetésben már említettem szakdolgozatomban szereplő feladatok egyik megoldásában leginkább az egyetemi analízis, illetve néhány esetben a geometria eszközeit fogom használni. A könnyebb áttekinthetőség érdekében ebben a fejezetben gyűjtöttem össze azokat a fogalmakat, állításokat, amelyekre szükségem lesz, és a szakdolgozat során az itt leírt sorszám alapján fogok majd hivatkozni rájuk. Az ebben a fejezetben szereplő fogalmakat az egyetemi tanulmányaim során használt tankönyvekből, illetve az egyetemi jegyzeteimből gyűjtöttem össze. Az idézett állításokat, tételeket bizonyítás nélkül közlöm.

Az összes feladat azon megoldásában, ahol az egyetemen tanult analízisbeli eszközök felhasználásával oldom meg a feladatokat, elsősorban függvényekkel fogok dolgozni, ezért következnek először az ezekkel kapcsolatos fontos fogalmak. A témakör összefoglalásához a *Bevezető analízis* 2. tantárgy során írt jegyzeteimet [2], illetve az [1]-es sorszámú irodalom 14-15. oldalát használtam fel.

2.1. Függvények

A *függvény* (más néven *leképezés*, *hozzárendelés*) fogalmát alapfogalomnak tekintjük, a halmazok közötti egyértelmű hozzárendelést értjük alatta.

Az x -hez hozzárendelt elemet $f(x)$ -szel jelöljük. Ha X és Y tetszőleges halmazok, akkor $f: X \rightarrow Y$ egy olyan függvény, amelyre $\forall x \in D(f) = X$ esetén $f(x) \in Y$.

Tehát szavakkal leírva X, Y tetszőleges halmazok, és az f függvény az X halmaz minden eleméhez hozzárendeli az Y halmaznak pontosan egy elemét.

2.1.1. Definíció: $D(f) = X$, $D(f) \neq \emptyset$ jelöli az f függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$D(f) = \{x \in X: x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az X egy nem üres részhalmaza.

2.1.2. Definíció: Az f függvény $R(f)$ -el jelölt *értékkészlete* Y -nak részhalmaza és

$$R(f) = \{y \in Y: y = f(x) \text{ valamely } x \in D(f)\text{-re}\}.$$

2.1.3. Definíció: A $C \subset X$ halmaz f függvény *általi képe* $f(C) = \{f(x): x \in C\}$.

2.1.4. Definíció: Egy $f: X \rightarrow Y$ függvény *grafikonja* a $D(f) \times R(f)$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol x az f értelmezési tartományából való.

Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza.

A szakdolgozat során szükségünk lesz az integrálszámítás egy alkalmazására – az improprius integrálásra –, azonban ehhez a függvények határértékét is fogunk alkalmazni, így a következőekben ezt fogjuk definiálni, amelynek definiálásához *Egyváltozós analízis I.* előadásjegyzetet [3] használom.

2.2. Függvények határértéke

2.2.1. Környezet és pontozott környezet

2.2.1. Definíció:

$a \in \mathbb{R}$ környezetei: $(a - \delta, a + \delta)$ ($\delta > 0$)

$a \in \mathbb{R}$ pontozott környezetei: $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$

$+\infty$ környezetei: $(K, +\infty)$ ($K \in \mathbb{R}$)

$+\infty$ pontozott környezetei: $(K, +\infty)$ ($K \in \mathbb{R}$)

$-\infty$ környezetei: $(-\infty, K)$ ($K \in \mathbb{R}$)

$-\infty$ pontozott környezetei: $(-\infty, K)$ ($K \in \mathbb{R}$)

2.2.2. Jelölés:

$a + 0$ (a^+ , $a +$) pontozott környezetei az $(a, a + \delta)$ intervallumok (más szóval az a -nak *jobb oldali pontozott környezetei*).

$a - 0$ (a^- , $a -$) pontozott környezetei $(a - \delta, a)$ intervallumok (azaz az a -nak *bal oldali pontozott környezetei*).

2.2.2. Határérték fogalma

2.2.3. Definíció: Legyen f értelmezve az a pont egy kipontozott környezetében. Ekkor az mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban vett *határértéke* a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x$ esetén $(0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

2.2.4. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

2.2.5. Definíció (*Egységes definíció*): Legyen $\alpha = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a + 0 \\ a - 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$ valamelyike és $\beta = \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

valamelyike. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, ha f értelmezve van α egy pontozott környezetében, továbbá a β bármely V környezetéhez van az α -nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x (x \in \dot{U} \Rightarrow f(x) \in V)$.

A primitív függvényhez szükségünk van a derivált fogalmára, így a következő pontban ezt írom fel, amelyhez az *Egyváltozós analízis 1.* előadás jegyzetét [3] használok fel.

2.3. Differenciálszámítás

2.3.1. A derivált fogalma

2.3.1. Definíció: Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható* (deriválható) az a pontban, ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

és véges. Ez a határérték az f *differenciahányadosa* (deriváltja) az a pontban.

2.3.2. Jelölés: $f'(a)$ vagy $\frac{df}{dx}(a)$

A terület- illetve a térfogatszámítás nagyon fontos analízisbeli eszköze az integrálszámítás, ami az egyik legfontosabb része a szakdolgozatomban szereplő feladatok megoldásának, ezért most ezt fogom összefoglalni az egyetemen *Egyváltozós analízis 2.* előadás [4] során tanult, illetve az [1] számú irodalom 172, 159. oldalán, valamint a [7] számú könyv 316-320. oldalán szereplő definíciókkal, tételekkel, állításokkal.

2.4. Integrálszámítás

Először a primitív függvénnyel (határozatlan integrállal) kapcsolatos fontos információkat gyűjtöttem össze. A differenciálszámítás során az f függvényből a deriválási szabályok alkalmazásával kapjuk meg az f' függvényt. Az integrálás során az f' függvényből fogjuk megkapni az f függvényt.

2.4.1. Primitív függvény

2.4.1. Definíció: Az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *primitív függvénye*, ha $F' = f$ az (a, b) intervallumon.

2.4.2. Tétel: Ha f -nek F primitív függvénye (a, b) -n, akkor f összes primitív függvénye $F + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. (A primitív függvény additív konstans erejéig egyértelmű.)

2.4.3. Definíció: Tegyük fel, hogy f -nek van primitív függvénye (a, b) -n. Ekkor f primitív függvényeinek halmazát az f függvény *határozatlan integráljának* nevezzük.

2.4.4. Definíció: Adott f függvény esetén jelölje

$$\int f$$

(„integrál” f) az f függvény *primitív függvényeinek halmazát* (a, b) -n.

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x) dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

2.4.5. Megjegyzés: Ha $F' = f$, akkor $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, illetve $\int f$ jelölheti az f egy primitív függvényét.

2.4.6. Tétel: Alapintegrálok:

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{ha } \alpha \neq -1, x > 0 \\ \ln|x| + C, & \text{ha } \alpha = -1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, (x \in (-1, 1))$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

2.4.7. Állítás (Integrálás és műveletek): Ha f -nek és g -nek van primitív függvénye, akkor az $f + g$ -nek és a $\lambda \cdot f$ -nek is van, és egy primitív függvényükre fennáll

$$1. \quad \int (f + g) = \int f + \int g,$$

$$2. \int (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int f, \quad (\text{ahol } \lambda \in \mathbb{R}).$$

2.4.8. Állítás (*Lineáris helyettesítés*): Ha $F' = f$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C, \quad (\text{ahol } a, b \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges, } a \neq 0).$$

2.4.9. Állítás: Ha f differenciálható, akkor

$$1. \int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{ha } \alpha \neq -1 \text{ és } f > 0.$$

$$2. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad \text{ha } f(x) \neq 0 \forall x\text{-re.}$$

2.4.10. Tétel (*Parciális integrálás*): Legyenek f és g differenciálhatók az (a, b) intervallumban, és tegyük fel, hogy $\exists f \cdot g'$ -nek primitív függvénye (a, b) -n. Ekkor

$$\int f' \cdot g = f' \cdot g - \int f \cdot g'.$$

2.4.11. Tétel (*Helyettesítéssel integrálás elve*): Legyen $F' = f$, és g differenciálható függvény, ahol $R(g) \subset D(f)$. Ekkor

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) + C.$$

Másképpen felírva:

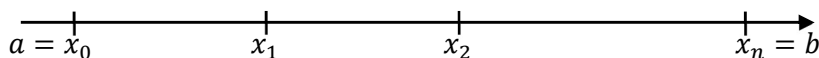
$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

A következő fontos téma, amit használni fogok a szakdolgozatomban az integrálszámítás témakörén belül, az a Riemann-integrál, és a vele kapcsolatos definíciók, tételek.

2.4.2. Riemann-integrál

2.4.12. Definíció: Az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum egy *felosztása* $F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ véges sorozat, ahol

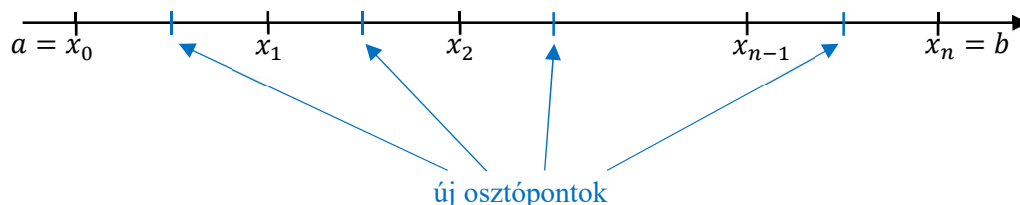
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$



Az x_i -k a felosztás *osztópontjai*, az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok a felosztás *osztóintervallumai*.

2.4.13. Definíció: A felosztás *finomsága*: $\delta(F) := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$.
osztóintervallum hossza

2.4.14. Definíció: A G felosztás az F felosztásnak *finomítása*, ha G az F -ből véges sok (lehet 0 is) osztópont hozzávételével adódik. Ez ekvivalens azzal, hogy F minden osztópontja a G -nek is osztópontja.



2.4.15. Definíció: Az alábbiakban legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adott korlátos függvény, korlátos függvény, és legyen F egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor az f függvénynek az F felosztáshoz tartozó *alsó összege*

$$s_F := \sum_{i=1}^n \underbrace{\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f}_{\in \mathbb{R}, \text{ mert korlátos}} (x_i - x_{i-1}),$$

az f függvény F -hez tartozó *felső összege* pedig

$$S_F := \sum_{i=1}^n \underbrace{\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f}_{\in \mathbb{R}, \text{ mert korlátos}} (x_i - x_{i-1}).$$

2.4.16. Állítás: Új osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkenhet, a felső nem növekedhet.

2.4.17. Következmény: $s_F \leq S_G \forall F, G$ felosztásra.

2.4.18. Következmény: Az $\{s_F : F \text{ felosztás}\}$ felülről korlátos, $\{S_F : F \text{ felosztás}\}$ alulról korlátos halmazok.

2.4.19. Definíció: Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény *alsó integrálja* az $[a, b]$ intervallumon

$$\int_a^b f := \sup\{s_F : F \text{ felosztás}\},$$

és *felső integrálja* az $[a, b]$ intervallumon

$$\int_a^{\bar{b}} f := \inf\{S_F: F \text{ felosztás}\}.$$

2.4.20. Definíció: Egy korlátos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *Riemann-integrálható* vagy *integrálható*, ha

$$\int_a^b f = \int_a^{\bar{b}} f.$$

Ekkor f *Riemann-integrálja* az $[a, b]$ intervallumon az alsó és felső integrálok közös értéke:

$$\int_a^b f := \int_a^b f = \int_a^{\bar{b}} f,$$

és jelölése az alábbi módon történik:

$$\int_a^b f \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

2.4.21. Tétel (*A Riemann-integrálra vonatkozó műveletek*):

Ha f, g függvények Riemann-integrálhatók az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f + g$ és $\lambda \cdot f$ is integrálható $[a, b]$ -n, és

1. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$
2. $\int_a^b (\lambda \cdot f) = \lambda \int_a^b f.$

2.4.22. Tétel (*A szorzat integrálhatósága*): Ha f, g integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f \cdot g$ is integrálható $[a, b]$ -n.

2.4.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata

2.4.23. Tétel (*Newton–Leibniz-tétel*): Ha az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, és F függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, valamint folytonos az $[a, b]$ -n, és $F' = f$ az (a, b) -n, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b.$$

2.4.24. Tétel (*Parciális integrálás Riemann-integrálra*): Tegyük fel, hogy az f és g függvények folytonosak $[a, b]$ -n, differenciálhatóak (a, b) -n, és f', g' integrálhatóak $[a, b]$ -n. Ekkor

$$\int_a^b f' \cdot g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'.$$

2.4.25. Tétel (*Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra*): Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$ -n, g differenciálható (a, b) -n, és g integrálható $[a, b]$ -n. Ekkor

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

A terület- és térfogatszámítás során szükségünk lesz a Riemann-integrál néhány alkalmazására, most az ehhez szükséges elméletet tekintjük át.

2.4.4. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

2.4.26. Definíció: Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \leq g$ függvények. Az $N_{f,g}$ halmazt *normáltartománynak* nevezzük, ha

$$N_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

2.4.27. Tétel: Ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények integrálhatóak, akkor $N_{f,g}$ -nek van területe, és ez a terület a következőképpen írható fel:

$$T(N_{f,g}) = \int_a^b (g - f).$$

2.4.28. Definíció: Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, és $f \geq 0$. Ekkor az f grafikonjának az x tengely körüli elforgatásával nyert *forgástest*:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: a \leq x \leq b; y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

2.4.29. Tétel: Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $f \geq 0$, és f integrálható $[a, b]$ -n, akkor az előbbi forgástestnek van térfogata, és ez a térfogat a következőképpen írható fel:

$$\int_a^b \pi \cdot f^2(x) dx.$$

2.4.30. Definíció: Tegyük fel, hogy $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható minden $[a, u] \subset [a, b)$ intervallumon. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény *improprius integrálja* az $[a, b)$ intervallumon létezik és véges, ha

$$\exists \lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

A következő témakört csak röviden érintjük. Ezek a végtelen sorok, amelyekről az *Egyváltozós analízis* 2. előadás során tanultunk, és az ott írt jegyzeteimből idézem a szükséges definíciókat, tételeket.

2.5. Sorok

2.5.1. Végtelen sorok

2.5.1. Definíció: Legyen (a_n) valós számsorozat. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor részletösszegei*:

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 & s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 & s_n &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ s_2 &:= a_1 + a_2 & & \dots & & \end{aligned}$$

és (s_n) -nel jelöljük a *részletösszegek sorozatát*.

2.5.2. Definíció: Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ *végtelen sor konvergens*, és összege $A \in \mathbb{R}$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A$, azaz a részletösszegek sorozata konvergens, és határértéke A .

2.5.3. Definíció: Ha (s_n) divergens, akkor a $\sum a_n$ *végtelen sor divergens*.

Ha $s_n \rightarrow \infty$ (vagy $s_n \rightarrow -\infty$), akkor a sor összege ∞ ($-\infty$).

2.5.4. Jelölés:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

2.5.5. Tétel (*Triviális kritérium – a sor konvergenciájának szükséges feltétele*): Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $a_n \rightarrow 0$. (Tehát a sor tagjaiból képzett sorozat szükségképpen 0-hoz tart, ha a sor konvergens.)

2.5.6. Tétel: Ha $a_n \geq 0 \forall n$ -re, akkor a $\sum a_n$ sornak van összege ($A \in \mathbb{R}$ vagy $A = +\infty$), és a sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata felülről korlátos.

Végül pedig néhány geometriával kapcsolatos fogalmat kell áttekintenünk: Az egyenes és a kör egyenletét, illetve – hogy a kör másik egyenletét is megkapjuk – az ellipszis egyenletét, melynek speciális esete lesz a kör másik egyenlete. Ezek a fogalmak az [5] könyv 8. és 332-333. (egyenes), 30. és 343. (kör), 405. oldaláról (ellipszis) származnak.

2.6. Geometriai áttekintés

2.6.1. Egyenes

Legyen a tér pontjainak halmaza X . Az X részhalmazai az alakzatok (ponthalmazok).

Tételek: a *pont*, az *egyenes* és a *sík*. Ezek alapfogalmak, ezért nem definiáljuk őket.

Ha mégis definiálni szeretnénk, az *egyenes* egy mindkét irányba végtelenbe nyúló vonal.

2.6.1. Definíció: Az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző, egymással esetleg ellentétes irányú vektorok mindegyikét az egyenes *irányvektorának* mondjuk.

Ha $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ az egyenes két pontja, akkor $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ az egyenes egy irányvektora.

2.6.2. Definíció: Ha az egyenes az y tengellyel nem párhuzamos, akkor

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

az egyenes *iránytangense*.

2.6.3. Tétel: A $P_0(x_0, y_0)$ ponton áthaladó, az y tengellyel nem párhuzamos, m iránytangensű egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

2.6.2. Kör

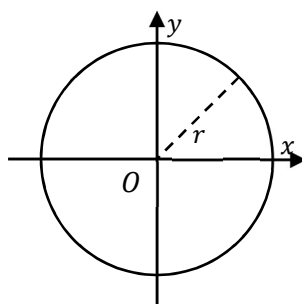
2.6.4. Definíció: Legyen rögzítve egy C pont (a kör *középpontja*) a tér egy síkjában. A *kör* (*körvonal*) azon pontok mértani helye a síkban, amelyek az C ponttól adott pozitív r *sugárnyi* távolságra vannak.

2.6.5. Tétel: A $C(a, b)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

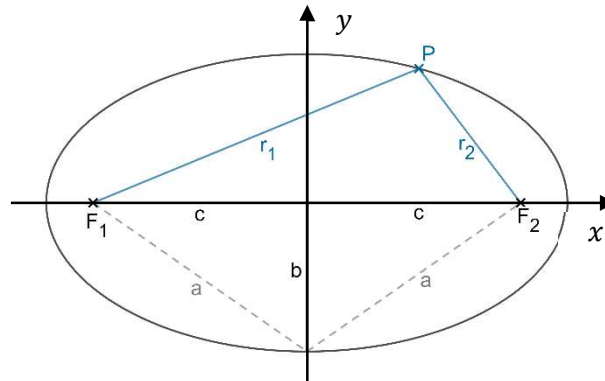
2.6.6. Állítás: A *kezdőpont* (origó) körül írt r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

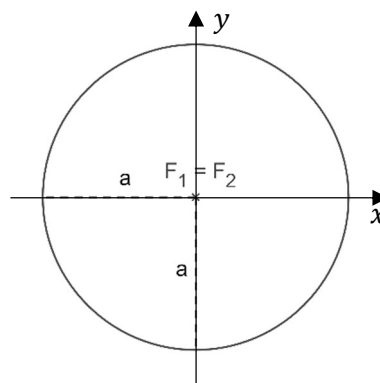


2.6.3. Kúpszeletek

2.6.7. Definíció: Legyen adott a tér egy síkjában két pont, F_1 és F_2 (fókuszpontok), valamint egy a pozitív valós szám (fél nagytengelyhossz), amelyre teljesül, hogy $2a > F_1F_2$. Az *ellipszis* azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek a két fókuszponttól mért távolsága összegül $2a$ -t ad (ami a két fókuszpont távolságánál nagyobb).



2.6.8. Megjegyzés: Ha az F_1 és F_2 fókuszpontok egybeesnek, egy a sugarú *kört* kapunk.



2.6.9. Tétel: Ha a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye, akkor kanonikus egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.6.10. Speciális eset: Kör esetén a nagy és kis féltengely is a sugár hosszával egyezik meg, ebben az esetben a kör kanonikus egyenlete

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Ez ekvivalens az 2.6.5. Állításban szereplő egyenlettel.

3. fejezet: Alkalmazások

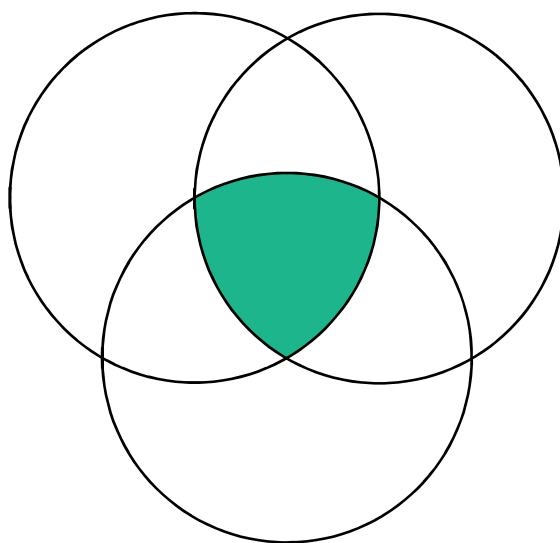
Ebben a fejezetben alkalmazásokat nézünk meg, melyek megoldása során az előző fejezetben ismertetett definíciókat, tételeket, állításokat fogjuk felhasználni. Először a szélső érték, utána a területszámítás, majd a térfogatszámítás, végül pedig a felszínszámítás témaköréből nézünk meg néhány feladatot.

3.1. Területszámítás

A következő feladat szövegét a [8] *Szórakoztató szakköri feladatok* c. egyetemi kurzus 4. feladatsorából írtam ki, ahol a gyakorlatvezető Gémes Margit volt.

3.1.1. Feladat: Körök

Bendegúz egy lapra úgy rajzolt 3 azonos sugarú kört, hogy bármely 2 kör metszéspontja egybeessék a harmadik kör középpontjával. Vajon nagyobb-e a három kör metszetének a területe, mint egy kör területének a negyede?

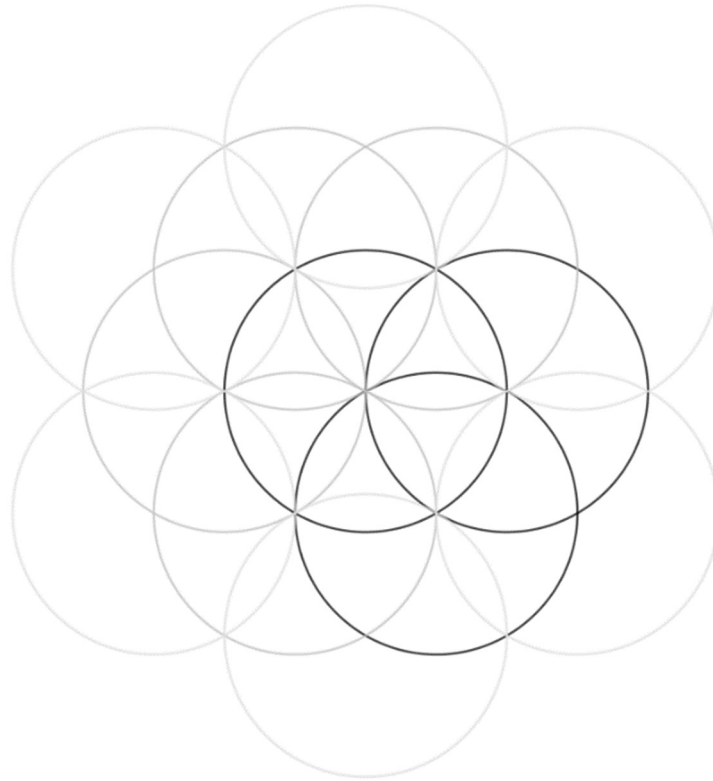


Erre a feladatra kétféle megoldást nézünk meg. Az első megoldásban nem használok fel tételeket. Itt csak a saját gondolatmenetem, és körzővel való próbálkozás alapján haladva oldom meg a feladatot. (A feladat megoldásának lejegyzése után találtam Gémes Margit honlapján egy ehhez hasonló megoldást, ami szintén a körök felbontásán alapul, csak rövidebben, kevesebb magyarázattal leírva. Ezt a [10] sorszámu forrásnál szereplő linken lehet elérni.) A második megoldásban általános- és középiskolai eszközöket bevetve jutok végeredményre.

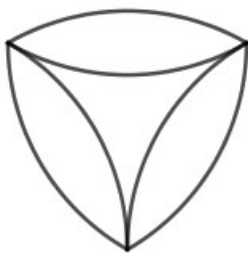
Készítettem egy harmadik megoldást is, amelyben az egyetemi analízis tanulmányaim során szerzett ismereteimet használom fel, és ezek alkalmazásával oldom meg a feladatot, viszont sok oldalnyi számolást tartalmaz, ezért ez a dolgozat mellékletében tekinthető meg.

1. Megoldás: (Körző felhasználásával, tételek felhasználása nélkül)

Egészítsük ki az alábbi módon a fenti ábrát körző segítségével!



Azért van szükség erre a kiegészítésre, mert így a kört – illetve a metszetet is – feloszthatjuk körívekkel határolt részekre. Ezeket a későbbiekben könnyebb megemlíteni végett az alábbi módon nevezzük el:



metszet



„szírom”



„közép”

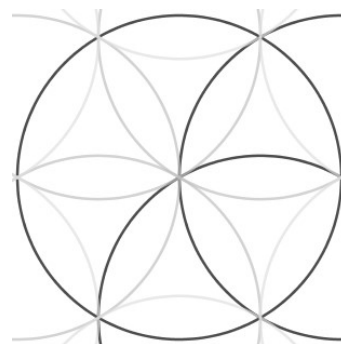
Ha megnézzük azt az ábrát, amit már felosztottuk a fenti módszerrel, akkor láthatjuk, hogy a három kör metszetében 3 db „szirom” és 1 db „közép” van.

Ha felosztunk egy egész kört is ilyen részekre, akkor abban 12 „szirom” és 6 db „közép” lesz.

Az egész kör negyede $\frac{12}{4} = 3$ „szirom”, és $\frac{6}{4} = 1,5$ „közép”

alakzatot tartalmaz. Ez 0,5 „közép”-pel (egy közép felével) nagyobb, mint a metszet területe.

Ebből már látszik, hogy a három kör metszetének területe kisebb, mint a kör területének negyede, tehát a feladat kérdésére nemleges a válasz. ■



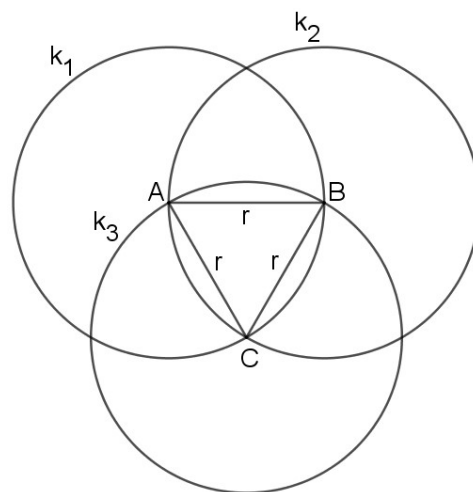
2. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)

A területképleteket általános- és középiskolában (nem matematika tagozatos osztályban) általában nem vezetjük le, így most a kész képleteket használjuk fel a feladat megoldásához, amelyek a [9] számú könyv 54, 59 és 60. oldalán találhatók meg.

A kör területét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$T_{\text{kör}} = r^2 \pi$$

A körök A , B , C betűkkel jelölt metszéspontjait összekötve szabályos háromszöget kapunk, melynek mindhárom oldala a három (azonos sugarú) kör sugarával, r -rel egyenlő. A háromszög területét úgy számítjuk ki, hogy az alapot megszorozzuk a hozzá tartozó magassággal, majd ennek a felét vesszük. A feladatban szereplő háromszög területét ennek felhasználásával az alábbi módon számíthatjuk ki:



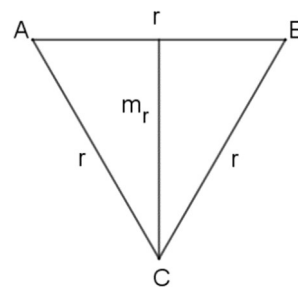
$$T_{\text{háromszög}} = \frac{r \cdot m_r}{2}$$

A magasság kiszámításához Pitagorasz tételét használjuk fel:

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + m_r^2 = r^2$$

$$m_r^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{2^2 r^2}{2^2} - \frac{r^2}{2^2} = \frac{4r^2 - r^2}{2^2} = \frac{3r^2}{2^2} = 3 \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$m_r = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

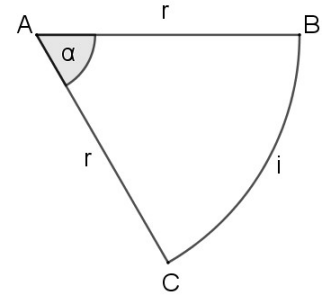


Ezt behelyettesítve a területképletbe a következőt kapjuk:

$$T_{háromszög} = \frac{r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

A k_1 kör BC körívének hosszát az $i = \alpha \cdot r$ képlettel határozhatjuk meg, ahol α a szög radiánban mért nagysága. Ennek felhasználásával a körcikk területe a következőképpen írható fel:

$$T_{körcikk} = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$



Mivel a szabályos háromszög mindhárom csúcsához tartozó szöge megegyezik, és tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege 180° , így mindhárom szöge

$$\alpha = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Mivel tudjuk, hogy a 180° radiánban felírva π -vel egyenlő, így az α szög radiánban felírva

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Tehát a körcikk területe

$$T_{körcikk} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot r^2}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot r^2$$

Ebből kivonva a szabályos háromszög területét, megkapjuk az i körívhez tartozó körszelet területét.

$$T_{körszelet} = T_{körcikk} - T_{háromszög} = \frac{\pi}{6} \cdot r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{2\pi r^2 - 3\sqrt{3}r^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} r^2$$

A három kör metszetének területe:

$$\begin{aligned} T_{metszet} &= 3 \cdot T_{körszelet} + T_{háromszög} = 3 \cdot \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \\ &= \frac{2\pi - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} r^2 \end{aligned}$$

A kör területének negyede:

$$\frac{T_{kör}}{4} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

Az összefüggés a metszet területe és a kör területének negyede között:

↑	$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} r^2$	$\square$	$\frac{r^2 \pi}{4}$	$/ \cdot 4$
	$(2\pi - 2\sqrt{3}) r^2$	$\square$	$r^2 \pi$	$/ : r^2 \quad (r > 0)$
	$2\pi - 2\sqrt{3}$	$\square$	π	$/ - \pi$
	$\pi - 2\sqrt{3}$	$\square$	0	$/ + 2\sqrt{3}$
	$3,14 \approx \pi$	$\square$	$2\sqrt{3} \approx 3,46$	

Mivel $3,14 < 3,46$, ezért az egyenlőtlenség során végig a $<$ jelet írhatjuk a négyzetek helyére. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az első sorban sem változik az reláció iránya.

Tehát ebből a megoldásból is az derül ki, hogy a három kör metszetének területe kisebb, mint a kör területének negyede. ■

A következő feladat szövege saját ötletből származik. Ahogy az ellipszis egyenletét írtam az elméleti áttekintést tartalmazó fejezetben – ahhoz, hogy a speciális eseteként létrejövő kör egyenletéhez jussunk –, eszembe jutott, hogy fel lehetne használni az ellipszist, mint tojáshoz hasonló formát. Analízishez kapcsolódva pedig szintén az ellipszis alsó és felső ívét normáltartományként alkalmazva kiszámíthatjuk az ellipszis területét. A megoldásként kapott területeket pedig akár össze is hasonlíthatjuk.

3.1.2. Feladat: Tojás

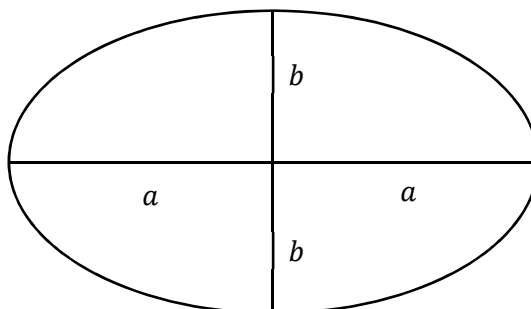
Tojáshoz hasonló formákat szeretnénk kivágni papírból, hogy később kidíszíthessük húsvétra. Téglalap alakú papírjaink vannak, amelyeknek oldalai 4 cm és 7 cm hosszúak.

- Határozzuk meg egy "tojás" területét!*
- Ha 70 db papírunk van, számítsuk ki, mekkora területet kell lefestenünk, hogy tudjuk, mennyi festékre lesz szükségünk!*
- A maradék papírból hány tojás jönne még ki, és utána mekkora területű papír maradna, amit már nem tudunk hasznosítani?*



1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)

a) feladatrészt



A feladat megoldása során egy olyan ellipszissel fogunk dolgozni, amelynek nagy tengelye 7 cm , kis tengelye pedig 4 cm hosszú. A [9] könyv 60. oldalán találjuk az ellipszis területének meghatározásához szükséges képletet:

$$T_{\text{ellipszis}} = \pi \cdot a \cdot b$$

Mivel az ellipszis nagy tengelye $2a$, kis tengelye pedig $2b$ hosszú, így a és b hosszát úgy kapjuk meg, hogy megfelezzük őket. Így $a = 7\text{ cm} : 2 = 3,5\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm} : 2 = 2\text{ cm}$.

Tehát az ellipszis területe:

$$T_{\text{ellipszis}} = \pi \cdot 3,5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = \pi \cdot 7\text{ cm}^2 \approx 21,99\text{ cm}^2.$$

Tehát egy tojás területe $21,99\text{ cm}^2$.

b) feladatrészt

Ha 1 db tojás területe $21,99\text{ cm}^2$, akkor 70 tojás területe a következőképpen számítható ki:

<i>Tojások</i>	Darabszám	Terület
	1 db tojás	$21,99\text{ cm}^2$
	70 db tojás	$x\text{ cm}^2$

$$T_{70\text{tojás}} = \frac{70 \cdot 19,79\text{ cm}^2}{1} = 1\,539,3\text{ cm}^2$$

70 db tojás területe $1\,539,3\text{ cm}^2$.

c) feladatrészt

Ennek a feladatnak a megoldásához először a téglalap területét kell kiszámítanunk, amelynek képlete szintén a [9] számú irodalomba, csak most az előző, 59. oldalon található meg (más betűket használok, mert az a és b jelölést már az ellipsziszénél is használtuk:

$$T_{\text{téglalap}} = x \cdot y$$

Ebbe a képletbe helyettesítjük be a téglalap adatait: $x = 7\text{ cm}$, $y = 4\text{ cm}$.

$$T_{\text{téglalap}} = 7\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2.$$

Ezután egy tojás papír területét kivonjuk a téglalap területéből így megkapjuk a maradék papír területét.

$$T_{\text{maradék}} = T_{\text{téglalap}} - T_{\text{ellipszis}} = 28\text{ cm}^2 - 21,99\text{ cm}^2 = 6,01\text{ cm}^2.$$

Mivel 70 db papírunk van, ezt is meg kell szoroznunk 70-nel, hogy az összes maradék papír területét megkapjuk:

$$T_{70\text{maradék}} = 70 \cdot 6,01\text{ cm}^2 = 420,7\text{ cm}^2.$$

Ahhoz, hogy megkapjuk, hogy ebből mennyi tojás jönne még ki, el kell osztanunk egy tojás területével:

$$420,7\text{ cm}^2 : 21,99\text{ cm}^2 \approx 19,13\text{ db}$$

Tehát összesen 19 egész tojás jön még ki belőle. Ahhoz, hogy megkapjuk, mennyi a területe a maradék papírnak, azt kell kiszámolnunk, hogy 19 db tojásnak hány cm^2 a területe.

$$T_{19\text{tojás}} = 19 \cdot 21,99\text{ cm}^2 = 417,81\text{ cm}^2.$$

Ezt pedig már csak ki kell vonnunk a 70 tojás maradékából:

$$T_{\text{véglegesmaradék}} = T_{70\text{maradék}} - T_{19\text{tojás}} = 420,7\text{ cm}^2 - 417,81\text{ cm}^2 = 2,89\text{ cm}^2.$$

Azt kaptuk megoldásként, hogy összesen 19 db tojás jönne még ki a tojások maradékából, és végül $2,89\text{ cm}^2$ papír maradna, amit már nem tudunk felhasználni. ■

2. Megoldás: (Az egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával)

a) feladatrész

A feladat megoldásához az ellipszis kanonikus egyenletét fogjuk használni, amelyet a **2.6.9.**

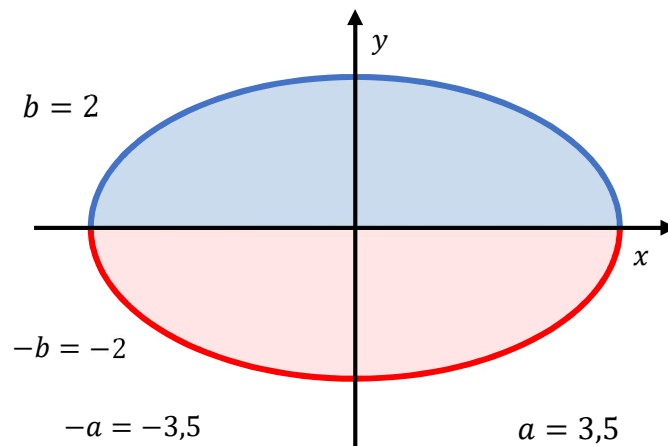
Tételben írtunk fel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ahol a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye. Mivel megvannak a papír méretei, ezeket használhatjuk a nagy- és kistengely hosszaként. Ebben az esetben

$$a = \frac{7\text{ cm}}{2} = 3,5\text{ cm} \qquad \text{és} \qquad b = \frac{4\text{ cm}}{2} = 2\text{ cm}.$$

Először az ellipszis ívét felbontjuk két részre: egy felső, és egy alsó ellipsziszívre. A 3.1.1. feladat 3. megoldásához hasonlóan (ami a mellékletben található) – ahogy a körívnél is volt már erről szó – nem létezik olyan függvény, amelynek a grafikonja ellipszis, viszont olyan igen, aminek a grafikonja a kékkel, illetve a pirossal jelölt ellipsziszív.



A következőekben az ezen két ellipsziszívet meghatározó függvényt fogjuk levezetni ekvivalens átalakításokkal. Ehhez a fent kiszámolt a és b értékét helyettesítjük be a szintén fent található egyenletbe, majd az alábbi műveleteket végezzük el:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3,5^2} + \frac{y^2}{2^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{12,25} + \frac{y^2}{4} &= 1 && \begin{array}{l} / \cdot 12,25 \\ / \cdot 4 \end{array} \\ 4x^2 + 12,25y^2 &= 12,25 \cdot 4 && / -4x^2 \\ 12,25y^2 &= 49 - 4x^2 && / : 12,25 \\ y^2 &= \frac{49 - 4x^2}{12,25} && / \sqrt{} \\ |y| &= \sqrt{4 - \frac{4x^2}{12,25}} \\ y &= \pm \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} \end{aligned}$$

Tehát az ellipszisíveket a következő függvényekkel írhatjuk fel:

$$\text{\textit{Felső ellipszisív:}} \quad f(x) = \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} \quad x \in [-3,5; 3,5]$$

$$\text{\textit{Alsó ellipszisív:}} \quad g(x) = -\sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} \quad x \in [-3,5; 3,5]$$

Ezután pedig a két ív által közbezárt normáltartomány segítségével határozzuk meg az ellipszis területét. (**2.4.26. Definíció**)

A normáltartomány területének kiszámításához pedig a **2.4.27. Tételt** fogjuk felhasználni:

$$\begin{aligned} T_{\text{ellipszis}} &= t(N_{f,g}) = \int_{-a}^a (g - f) = \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} dx - \int_{-3,5}^{3,5} -\sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} dx = \\ &= \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} dx + \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} dx = \int_{-3,5}^{3,5} 2 \cdot \sqrt{4 - \frac{16x^2}{49}} dx = \\ &= 2 \cdot \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{\frac{196}{49} - \frac{16x^2}{49}} dx = 2 \cdot \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{\frac{196}{49} \cdot \left(1 - \frac{16x^2}{196}\right)} dx = \\ &= 2 \cdot \int_{-3,5}^{3,5} \frac{14}{7} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4x}{14}\right)^2} dx = 2 \cdot \int_{-3,5}^{3,5} 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{7}\right)^2} dx = 4 \cdot \int_{-3,5}^{3,5} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}x\right)^2} dx \end{aligned}$$

Erre alkalmazzuk a $\frac{2}{7}x = \sin t$, azaz $x = \frac{7}{2}\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítést. Mivel $dx = \frac{7}{2}\cos t dt$, ezért

$$4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7}{2} \cos t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} \sin t\right)^2} dt = 14 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} dt$$

Mivel $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, így $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$$= 14 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sqrt{\cos^2 t} dt = 14 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot |\cos t| dt =$$

Mivel $\cos \left| \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right| \geq 0$, ezért

$$\begin{aligned}
 &= 7 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos^2 t \, dt = 7 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) \, dt = 7 \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &\quad \boxed{
 \begin{aligned}
 \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\
 \cos^2 t &= \cos 2t + \frac{\sin^2 t}{1 - \cos^2 t} \\
 (\sin^2 t + \cos^2 t &= 1) \\
 2\cos^2 t &= \cos 2t + 1
 \end{aligned}
 } \\
 &= 7 \left(\frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 7 \left(\frac{\sin \pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin -\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 7 \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= 7 \cdot \pi \approx 21,99 \, \text{cm}^2
 \end{aligned}$$

Tehát az ellipszis területe: $T_{\text{ellipszis}} = 7 \cdot \pi \approx 21,99 \, \text{cm}^2$

b) és c) feladatrész

Ez a két feladatrész egyetemi eszközök nélkül oldható meg, és a megoldása ugyanaz, mint az előző megoldás b) és c) feladatrésze. ■

3.2. Térfogatszámítás

A következő feladat a [8] *Szórakoztató szakköri feladatok* c. egyetemi kurzus 9. feladatsorából való, ahol a gyakorlatvezető Gémes Margit volt.

3.2.1. Feladat: Őszibarack

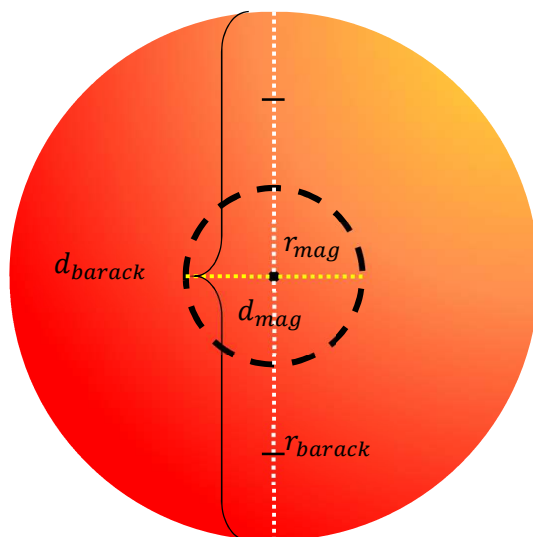
Őszibarackot vásárolunk. A nagyok átmérője 10 cm, a kicsik átmérője 7 cm. A nagyok kilogrammja 800 forint, a kicsiké 500 forint. Modellezzük a barackot is, és a magját is gömbbel, és tegyük fel, hogy mag átmérője a teljes gyümölcs átmérőjének a harmada.

- a) Melyiket érdemes venniünk, ha az egyetlen szempontunk az, hogy minél több őszibarackot ehessünk ugyanannyi pénzért úgy, hogy a barackok sűrűsége megegyezik?
- b) Miben változik a megoldásunk abban az esetben, ha eltérő a két barack sűrűsége?

Ennél a feladatnál elsőként az általános- illetve középiskolában szereplő fogalmakat, képleteket használva, a második esetben pedig gömb forgástest tulajdonságát kihasználva – forgástest térfogataként – integrálszámítás segítségével jutunk megoldásra.

1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)

Először is tekintsük meg egy ábrán a barack, illetve a benne található mag modelljét (mindkettőt gömbként ábrázolva), amin a mag átmérője $\frac{1}{3}$ része a barack átmérőjének.



Az **3.1.1. Feladat 2.** megoldásához hasonlóan a kiszámításhoz szükséges képleteket a [9] könyvben található formában fogjuk használni. Az ehhez a feladathoz szükséges gömb térfogatának képlete a 67. oldalról származik:

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \pi}{3}$$

A feladat szövegéből tudjuk, hogy a nagy őszibarack átmérője $d_{nagy} = 10\text{ cm}$, tehát a sugara $r_{nagy} = 5\text{ cm}$, a kicsié pedig $d_{kicsi} = 7\text{ cm}$, tehát a sugara $r_{kicsi} = 3,5\text{ cm}$. A magok átmérője a teljes gyümölcs átmérőjének harmada, tehát $d_{nagymag} = \frac{10}{3} \approx 3,33\text{ cm}$, így $r_{nagymag} = \frac{5}{3} \approx 1,67\text{ cm}$. A kicsi barackoké pedig $d_{kismag} = \frac{7}{3} \approx 2,33\text{ cm}$, így $r_{kismag} = \frac{3,5}{3} \approx 1,17\text{ cm}$. Ezek alapján a barackok húsának térfogata úgy számolható ki, hogy a barack térfogatából kivonjuk a mag térfogatát.

Tehát a nagy őszibarack térfogata (a maggal együtt):

$$V_{nagy} = \frac{4 \cdot 5^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 125 \pi}{3} = \frac{500 \pi}{3} \approx 523,599\text{ cm}^3$$

A magjának térfogata:

$$V_{nagymag} = \frac{4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot \frac{5^3}{3^3} \pi}{3} = \frac{4 \cdot \frac{125}{27} \pi}{3} = \frac{500 \pi}{81} \approx 19,39\text{ cm}^3$$

A nagy barack húsának térfogata:

$$V_{nagyhús} = V_{nagy} - V_{nagymag} \approx 523,599 - 19,39 = 504,209\text{ cm}^3$$

A kicsi őszibarack térfogata:

$$V_{kicsi} = \frac{4 \cdot 3,5^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 42,875 \pi}{3} = \frac{171,5 \pi}{3} = \frac{538,78}{3} \approx 179,59\text{ cm}^3$$

A magjának térfogata:

$$V_{kismag} = \frac{4 \cdot \left(\frac{3,5}{3}\right)^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot \frac{3,5^3}{3^3} \pi}{3} = \frac{4 \cdot \frac{42,875}{27} \pi}{3} = \frac{171,5 \pi}{81} \approx 6,65\text{ cm}^3$$

A kis barack húsának térfogata:

$$V_{kishús} = V_{kicsi} - V_{kismag} \approx 179,59 - 6,65 = 172,94\text{ cm}^3$$

a) feladatrész

Egy általam talált, [11]-es forrásként szereplő cikk alapján $0,998 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 1\text{ g/cm}^3$ az őszibarack sűrűsége, ezért körülbelül 1 000 cm^3 barack felel meg $\approx 1\text{ kg} = 1\text{ 000 g}$ -nak. Mivel az a) részben a barackok sűrűsége megegyezik, nem szükséges tömegben számolnunk, hanem maradhatunk a térfogathoz, hiszen a mérőszámok ugyanazok maradnak. A fenti (1 000 cm^3 -es) térfogathoz legközelebb 2 db nagy barack térfogata áll:

$$V_{2nagy} = 2 \cdot 523,599\text{ cm}^3 = 1\text{ 047,198 cm}^3$$

melyek húsa

$$V_{2nagyhús} = 2 \cdot 504,209 \text{ cm}^3 = 1008,418 \text{ cm}^3$$

Ennek ára a következőképpen számítható ki:

Ha $1 \text{ kg} \approx 1\,000 \text{ cm}^3$ nagy barack 800 Ft-ba kerül, akkor $1\,047,198 \text{ cm}^3$ (melynek húsa, amit meg tudunk enni $2 \cdot 504,209 \text{ cm}^3 = 1\,008,418 \text{ cm}^3$ -es)

Nagy barack	{	Térfogat	Ár
		$\approx 1\,000 \text{ cm}^3$	800 Ft
		$1\,047,198 \text{ cm}^3$	x_{nagy}

$$\frac{1\,047,198 \text{ cm}^3 \cdot 800 \text{ Ft}}{1\,000 \text{ cm}^3} = 837,76 \text{ Ft} \approx 840 \text{ Ft}.$$

Ha $179,59 \text{ cm}^3$ -es 1 db kis barack, akkor közel $1 \text{ kg} \approx 1\,000 \text{ cm}^3$ tömegű barack darabszáma $\frac{1\,000 \text{ cm}^3}{179,59 \text{ cm}^3} = 5,57 \approx 6 \text{ db}$.

$$V_{6kicsi} = 6 \cdot 179,59 \text{ cm}^3 = 1\,077,54 \text{ cm}^3$$

Ennek húsa, amit meg tudunk enni

$$V_{6kishús} = 6 \cdot 172,94 \text{ cm}^3 = 1037,64 \text{ cm}^3$$

Ha $1 \text{ kg} \approx 1\,000 \text{ cm}^3$ kis barack 500 Ft-ba kerül, akkor $1\,077,54 \text{ cm}^3$ (melynek húsa $1037,64 \text{ cm}^3$ -es):

Kis barack	{	Térfogat	Ár
		$1\,000 \text{ cm}^3$	500 Ft
		$1\,077,54 \text{ cm}^3$	x_{kicsi}

$$\frac{1\,077,54 \text{ cm}^3 \cdot 500 \text{ Ft}}{1\,000 \text{ cm}^3} = 538,77 \text{ Ft} \approx 540 \text{ Ft}.$$

Ezzel körülbelül 1 kg tömegű barack térfogatát határoztuk meg (egész barackok esetén) külön a kis-, illetve nagy barackra vonatkoztatva. Most pedig azt számoljuk ki, hogy 1 000 Ft-ért milyen térfogatú barackot (y_{nagy} és y_{kicsi}), illetve barackhúst (z_{nagy} és z_{kicsi}) kapunk, hogy lássuk, melyiket érdemes megvenni (melyik esetben jutunk több barackhúshoz):

Nagy barack	{	Ár	Teljes barack	Barackhús
		835 Ft	$1\,047,198 \text{ cm}^3$	$1\,008,418 \text{ cm}^3$
		1 000 Ft	y_{nagy}	z_{nagy}

$$y_{nagy} = \frac{1\,000\text{ Ft} \cdot 1\,047,198\text{ cm}^3}{835\text{ Ft}} \approx 1\,254,13\text{ cm}^3$$

$$z_{nagy} = \frac{1\,000\text{ Ft} \cdot 1\,008,418\text{ cm}^3}{835\text{ Ft}} \approx 1\,207,69\text{ cm}^3$$

Kis barack	Ár	Teljes barack	Barackhús
	540 Ft	1 077,54 cm ³	1 037,64 cm ³
	1 000 Ft	y_{kicsi}	z_{kicsi}

$$y_{kicsi} = \frac{1\,000\text{ Ft} \cdot 1\,077,54\text{ cm}^3}{540\text{ Ft}} \approx 1\,995,44\text{ cm}^3$$

$$z_{kicsi} = \frac{1\,000\text{ Ft} \cdot 1\,037,64\text{ cm}^3}{540\text{ Ft}} \approx 1\,921,56\text{ cm}^3$$

A számításunk végén azt kaptuk eredményként, hogy 1 000 Ft-ért 1 254,13 cm³ térfogatú nagy barackot (amelynek húsa 1207,69 cm³), illetve ugyanezen az áron 1 995,44 cm³ térfogatú kis méretű barackot (1921,56 cm³ hússal) tudunk venni.

A kettő különbsége:

$$|z_{nagy} - z_{kicsi}| = |1\,207,69\text{ cm}^3 - 1\,921,56\text{ cm}^3| = 713,87\text{ cm}^3$$

Tehát kis barackból 713,87 cm³-rel többet tudunk enni ugyanannyi pénzért, mint nagy barackból. ■

b) feladatrészt

Az előző feladatrésztben azt néztük meg, hogy akkor melyik barackot érdemes megvenni, ha a sűrűségük azonos. Most olyan eseteket próbálunk ki, amelyben a sűrűségek különbözőek. A mag térfogatát most minden esetben külön nézzük a hús térfogatától, és a két barack magjának sűrűsége azonos lesz. (Csak a hús sűrűsége lesz eltérő.)

Először azokat az adatokat nézzük végig, amelyekből minden esetről kiindulunk:

1 db nagy őszibarack térfogatadatai

Teljes nagy barack	$V_{nagy} = 523,599\text{ cm}^3$
Magja	$V_{nagymag} = 19,39\text{ cm}^3$
Húsa	$V_{nagyhús} = 504,209\text{ cm}^3$

$$V_{nagy} = V_{nagymag} + V_{nagyhús}$$

1 db kicsi őszibarack térfogatadatai

Teljes kicsi barack	$V_{kicsi} = 179,59 \text{ cm}^3$
Magja	$V_{kismag} = 6,65 \text{ cm}^3$
Húsa	$V_{kishús} = 172,94 \text{ cm}^3$

$$V_{kicsi} = V_{kismag} + V_{kishús}$$

Aztán pedig azt számoljuk ki, hogy 1 000 Ft-os áron mekkora lesz a barackok tömege (maggal együtt).

Nagy barack	Tömeg	Ár
	1 kg	800 Ft
	x	1 000 Ft

$$\frac{1\,000 \text{ Ft} \cdot 1 \text{ kg}}{800 \text{ Ft}} = \frac{5}{4} \text{ kg} = 1,25 \text{ kg} = 1\,250 \text{ g}$$

Kicsi barack	Tömeg	Ár
	1 kg	500 Ft
	x	1 000 Ft

$$\frac{1\,000 \text{ Ft} \cdot 1 \text{ kg}}{500 \text{ Ft}} = 2 \text{ kg} = 2\,000 \text{ g}$$

1. eset: Kis barack húsának sűrűsége a nagyobb

A sűrűségek legyenek a következők:

Kis barack húsának sűrűsége	$\rho_k = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Nagy barack húsának sűrűsége	$\rho_n = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Mag sűrűsége	$\rho_m = 1,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

A tömeget a következő fizikából tanult képlettel tudjuk kiszámolni:

$$m = \rho \cdot V$$

Ezt a képletet külön kell alkalmazni a nagy barack húsára és magjára, majd ezek összegeként kapjuk meg a teljes barack tömegét.

$$m_{nhús} = \rho_n \cdot V_{nagy \text{ hús}} = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 504,209 \text{ cm}^3 = 453,79 \text{ g}$$

$$m_{n\text{mag}} = \rho_m \cdot V_{n\text{agymag}} = 1,4 \frac{g}{cm^3} \cdot 19,39 cm^3 = 27,146 g$$

$$m_n = m_{nhús} + m_{n\text{mag}} = 453,79 g + 27,146 g = 480,936 g$$

Utána ugyanezt fogjuk elvégezni a kis barackra is:

$$m_{khús} = \rho_k \cdot V_{kishús} = 1,2 \frac{g}{cm^3} \cdot 172,94 cm^3 = 207,528 g$$

$$m_{k\text{mag}} = \rho_m \cdot V_{k\text{smag}} = 1,4 \frac{g}{cm^3} \cdot 6,65 cm^3 = 9,31 g$$

$$m_k = m_{khús} + m_{k\text{mag}} = 207,528 g + 9,31 g = 216,838 g$$

Most pedig megnézzük, hogy az 1 000 Ft-os áron melyikből hány darabot kapunk (ehhez fent már kiszámoltuk, hogy az áruk alapján hány g fér bele 1 000 Ft-ba). Mivel a barackokat egészben árusítják, így kerekíteni fogunk:

Nagy barack	$1\,250 g : 480,936 g \approx 2,6 db \approx 3 db$
Kicsi barack	$2\,000 g : 216,838 g \approx 9,22 db \approx 9 db$

Végül pedig arra vagyunk kíváncsiak, mennyi lesz a hústömeg a kétféle méretű baracknál 1 000 Ft-ból, hiszen ebből tudjuk meg, hogy melyiket érte meg megvenni. Ehhez meg kell szorozni a darabszámot az előbb kiszámolt barackhústömegekkel.

Először **nem egész** barackra nézzük meg:

Nagy barack	$m_{nhús1000Ft} = 2,6 db \cdot 453,79 g \approx 1\,179,854 g$
Kicsi barack	$m_{khús1000Ft} = 9,22 db \cdot 207,528 g \approx 1\,913,4 g$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhús1000Ft} - m_{khús1000} | = |1\,179,854 g - 1\,913,4 g| = \mathbf{733,546 g}$$

Egész barackokkal számolva pedig (nyilván így az ár is változik a tömegbeli eltérések miatt):

Nagy barack	$m_{nhúskb1000Ft} = 3 db \cdot 453,79 g \approx 1\,361,37 g$
Kicsi barack	$m_{khúskb1000Ft} = 9 db \cdot 207,528 g \approx 1\,867,752 g$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhúskb1000Ft} - m_{khúskb1000Ft}| = |1\,361,37 g - 1\,867,752 g| = 506,382 g$$

Tehát így méginkább a kicsi barackot érdemes venni.

2. eset: Nagy barack húsának sűrűsége a nagyobb

A sűrűségek legyenek a következők:

Kis barack húsának sűrűsége	$\rho_k = 0,4 \frac{g}{cm^3}$
Nagy barack húsának sűrűsége	$\rho_n = 2 \frac{g}{cm^3}$
Mag sűrűsége	$\rho_m = 3 \frac{g}{cm^3}$

Ugyanúgy kezdjük, ahogy az előző esetben: először a nagy barack tömegadatait számoljuk ki:

$$m_{nhús} = \rho_n \cdot V_{nagyhús} = 2 \frac{g}{cm^3} \cdot 504,209 cm^3 = 1\,008,418 g$$

$$m_{nmag} = \rho_m \cdot V_{nagymag} = 3 \frac{g}{cm^3} \cdot 19,39 cm^3 = 58,17 g$$

$$m_n = m_{nhús} + m_{nmag} = 1\,008,418 g + 58,17 g = 1\,066,588 g$$

Utána ugyanezt végezzük el a kis barackra is:

$$m_{khús} = \rho_k \cdot V_{kishús} = 0,4 \frac{g}{cm^3} \cdot 172,94 cm^3 = 69,176 g$$

$$m_{kmag} = \rho_m \cdot V_{kismag} = 3 \frac{g}{cm^3} \cdot 6,65 cm^3 = 19,95 g$$

$$m_k = m_{khús} + m_{kmag} = 69,176 g + 19,95 g = 89,126 g$$

Most pedig megnézzük, hogy az 1 000 Ft-os áron melyikből hány darabot kapunk:

Nagy barack	$1\,250 g : 1\,066,588 g \approx 1,17 db \approx 1 db$
Kicsi barack	$2\,000 g : 89,126 g \approx 22,44 db \approx 22 db$

A hústömeg 1 000 Ft-ból (nem egész számú barackkal számolva):

Nagy barack	$m_{nhús1000Ft} = 1,17 db \cdot 1\,008,418 g \approx 1\,179,85 g$
Kicsi barack	$m_{khús1000Ft} = 22,44 db \cdot 69,176 g \approx 1\,549,54 g$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhús1000Ft} - m_{khús1000Ft}| = |1\,179,85 g - 1\,549,54 g| = \mathbf{369,69 g}$$

Egész barackokkal számolva a következő hústömegeket kapjuk (így az ár is változik):

Nagy barack	$m_{nhúskb1000Ft} = 1 \text{ db} \cdot 1\,008,418 \text{ g} \approx 1\,008,418 \text{ g}$
Kicsi barack	$m_{khúskb1000Ft} = 22 \text{ db} \cdot 69,176 \text{ g} \approx 1\,521,872 \text{ g}$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhúskb1000Ft} - m_{khúskb1000Ft}| = |1\,008,418 \text{ g} - 1\,521,872 \text{ g}| = 513,454 \text{ g}$$

Tehát így még mindig a kicsi barackot érdemes venni, de már kevesebb az árkülönbség.

3. eset: Nagy barack hújának sűrűsége sokkal nagyobb

A sűrűségek legyenek a következők:

Kis barack hújának sűrűsége	$\rho_k = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Nagy barack hújának sűrűsége	$\rho_n = 3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Mag sűrűsége	$\rho_m = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Ugyanúgy kezdjük, ahogy az előző esetben: először a nagy barack tömegadatait számoljuk ki:

$$m_{nhús} = \rho_n \cdot V_{nagyhús} = 3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 504,209 \text{ cm}^3 = 1\,512,627 \text{ g}$$

$$m_{nmag} = \rho_m \cdot V_{nagymag} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 19,39 \text{ cm}^3 = 77,56 \text{ g}$$

$$m_n = m_{nhús} + m_{nmag} = 1\,512,627 \text{ g} + 77,56 \text{ g} = 1\,590,187 \text{ g}$$

Utána ugyanezt végezzük el a kis barackra is:

$$m_{khús} = \rho_k \cdot V_{kishús} = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 172,94 \text{ cm}^3 = 34,588 \text{ g}$$

$$m_{kmag} = \rho_m \cdot V_{kismag} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 6,65 \text{ cm}^3 = 26,6 \text{ g}$$

$$m_k = m_{khús} + m_{kmag} = 34,588 \text{ g} + 26,6 \text{ g} = 61,188 \text{ g}$$

Most pedig megnézzük, hogy az 1 000 Ft-os áron melyikből hány darabot:

Nagy barack	$1\,250 \text{ g} : 1\,590,187 \text{ g} \approx 0,79 \text{ db} \approx 1 \text{ db}$
Kicsi barack	$2\,000 \text{ g} : 61,188 \text{ g} \approx 32,686 \text{ db} \approx 33 \text{ db}$

A hústömeg 1 000 Ft-ból (nem egész barackokkal számolva):

Nagy barack	$m_{nhús1000Ft} = 0,79 \text{ db} \cdot 1\,512,627 \text{ g} \approx 1\,194,98 \text{ g}$
Kicsi barack	$m_{khús1000Ft} = 32,686 \text{ db} \cdot 34,588 \text{ g} \approx 1\,130,54 \text{ g}$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhús1000Ft} - m_{khús1000Ft}| = |1\,194,98 \text{ g} - 1\,130,54 \text{ g}| = \mathbf{64,44 \text{ g}}$$

Egész barackokkal számolva pedig (az ár megváltozásával):

Nagy barack	$m_{nhúskb1000Ft} = 1 \text{ db} \cdot 1\,512,627 \text{ g} \approx 1\,512,627 \text{ g}$
Kicsi barack	$m_{khúskb1000Ft} = 33 \text{ db} \cdot 34,588 \text{ g} \approx 1\,141,4 \text{ g}$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhúskb1000Ft} - m_{khúskb1000Ft}| = |1\,512,627 \text{ g} - 1\,141,4 \text{ g}| = 371,227 \text{ g}$$

Tehát most már a nagy barackot érdemes venni.

4. eset (utolsó): Nagy barack húsának sűrűsége ismeretlen

A sűrűségek legyenek a következők:

Kis barack húsának sűrűsége	$\rho_k = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Nagy barack húsának sűrűsége	$\rho_n = x \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Mag sűrűsége	$\rho_m = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Ugyanúgy kezdjük, ahogy az előző esetben: először a nagy barack tömegadatait számoljuk ki:

$$m_{nhús} = \rho_n \cdot V_{nagyhús} = x \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 504,209 \text{ cm}^3 = 504,209 \cdot x \text{ g}$$

$$m_{nmag} = \rho_m \cdot V_{nagymag} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 19,39 \text{ cm}^3 = 77,56 \text{ g}$$

$$m_n = m_{nhús} + m_{nmag} = 504,209 \cdot x \text{ g} + 77,56 \text{ g}$$

A kis barack sűrűsége maradt az, ami az előzőben:

$$m_{khús} = \rho_k \cdot V_{kishús} = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 172,94 \text{ cm}^3 = 34,588 \text{ g}$$

$$m_{kmag} = \rho_m \cdot V_{kismag} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 6,65 \text{ cm}^3 = 26,6 \text{ g}$$

$$m_k = m_{khús} + m_{kmag} = 34,588 \text{ g} + 26,6 \text{ g} = 61,188 \text{ g}$$

Most pedig megnézzük, hogy az 1 000 Ft-os áron melyikből hány darabot kapunk:

Nagy barack	$1\,250\text{ g} : (504,209 \cdot x\text{ g} + 77,56\text{ g})\text{ db}$
Kicsi barack	$2\,000\text{ g} : 61,188\text{ g} \approx 32,686\text{ db} \approx 33\text{ db}$

A hústömeg 1 000 Ft-ból:

Nagy barack	$m_{nhús1000Ft} = 1\,250\text{ g} : (504,209 \cdot x\text{ g} + 77,56\text{ g}) \cdot 504,209 \cdot x\text{ g}$
Kicsi barack	$m_{khús1000Ft} = 32,686\text{ db} \cdot 34,588\text{ g} \approx 1\,130,54\text{ g}$

Akkor éri meg egyformán mindkét barack vásárlása, ha azonos áron ugyanolyan tömegű barackhúst tudunk enni mindkettőből. Tehát

$$m_{nhús1000Ft} = m_{khús1000Ft}$$

$$1\,250 : (504,209x + 77,56) \cdot 504,209x = 1\,130,54$$

$$\frac{1\,250}{504,209x + 77,56} \cdot 504,209x = 1\,130,54$$

$$\frac{630\,261,25x}{504,209x + 77,56} = 1\,130,54 \quad / \cdot (504,209x + 77,56)$$

$$630\,261,25x = 1\,130,54 \cdot (504,209x + 77,56)$$

$$630\,261,25x = 570\,028,443x + 87\,684,68 \quad / -570\,028,443x$$

$$60\,232,757x = 87\,684,68 \quad / : 60\,232,757$$

$$x = 1,46 = \rho_n$$

Most csak a nagy barack adataival fogunk számolni, hiszen a kis barack sűrűsége nem változott az előző feladatban szereplőhöz képest, tehát ahhoz az ott kiszámolt értékeket fogjuk használni, nem számoljuk ki még egyszer.

Próbáljuk ezt a sűrűséget behelyettesíteni a nagy barack tömegadatainak kiszámításánál:

$$m_{nhús} = \rho_n \cdot V_{nagy\text{ ús}} = 1,46 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 504,209\text{ cm}^3 = 743,45\text{ g}$$

$$m_{nmag} = \rho_m \cdot V_{nagymag} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 19,39\text{ cm}^3 = 77,56\text{ g}$$

$$m_n = m_{nhús} + m_{nmag} = 743,45\text{ g} + 77,56\text{ g} = 821,01\text{ g}$$

Most pedig megnézzük, hogy az 1 000 Ft-os áron hány darabot kapunk:

Nagy barack	$1\,250\text{ g} : 821,01\text{ g} \approx 1,52\text{ db} \approx 2\text{ db}$
--------------------	--

A hústömeg 1 000 Ft-ból (nem egész barack esetén):

Nagy barack

$$m_{nhús1000Ft} = 1,52 \cdot 743,45 \text{ g} = 1\,130,044 \text{ g}$$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhús1000Ft} - m_{khús1000Ft}| = |1\,130,044 \text{ g} - 1\,130,54 \text{ g}| = \mathbf{0,496 \text{ g}}$$

Egész barackkal számolva (kb. 2 000 Ft esetén) pedig

Nagy barack

$$m_{nhús2000Ft} = 3 \cdot 743,45 \text{ g} = 2\,230,35 \text{ g}$$

Kis barack

$$m_{khús2000Ft} = 66 \text{ db} \cdot 34,588 \text{ g} \approx 2\,282,8 \text{ g}$$

A kettő különbsége:

$$|m_{nhús2000} - m_{khús2000Ft}| = |2\,230,35 \text{ g} - 2\,282,8 \text{ g}| = 52,45 \text{ g}$$

Tehát most közel azonos tömegűt kaptunk mindkettőből, úgyhogy így ugyanannyira éri meg megvásárolni őket. ■

2. Megoldás: (Az egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával)

a) feladatrész

Ebben a megoldásban, mivel nem általános gömbökkel számolunk – mint ahogy a **2.1.1. feladat** esetében általános körök területével dolgoztunk –, ez a megoldás csak abban tér el az előzőtől, hogy a gömb térfogatának képletét integrálszámítással vezetjük végig. Az ezután szereplő számításokkal – ahol a konkrét adatokat helyettesítjük be a képletbe – már ugyanúgy dolgozunk tovább, mint az 1. megoldás esetén, így azt már nem fogom teljes egészében még egyszer leírni.

A gömb térfogatának kiszámításához először az origó középpontú kör egyenletére van szükségünk, amely az **2.6.6. Állítás** alapján:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Vagy kanonikus alakban – az ellipszis **2.6.10. Speciális** eseteként – a következő alakban írható fel:

$$(2) \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

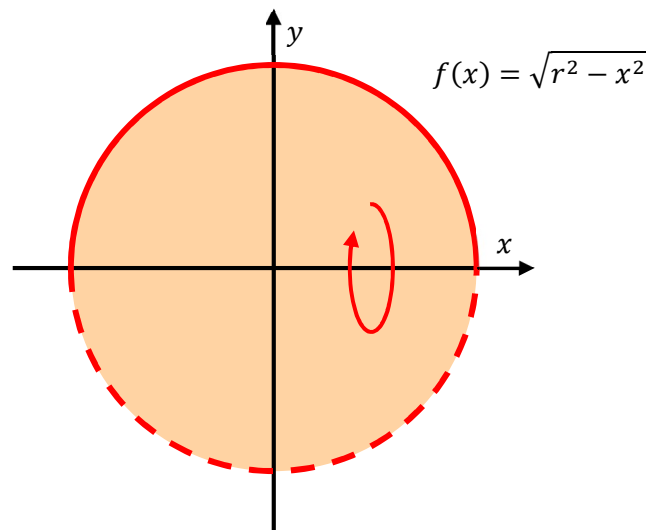
Mindkét alak esetében $r > 0$.

Mivel nincs olyan függvény, melynek a grafikonja egy kör lenne, olyan viszont van, amelynek a grafikonja félkör, ezért a kört két félkörre bonthatjuk fel, ezeket a függvényeket

pedig úgy kaphatjuk meg, ha az előzőleg felírt kör egyenletéből kifejezzük az y -t. Most az (1) egyenletet fogjuk ehhez felhasználni segítségképpen:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 && / -x^2 \\y^2 &= r^2 - x^2 && / \sqrt{} \\|y| &= \sqrt{r^2 - x^2} \\y &= \pm \sqrt{r^2 - x^2}\end{aligned}$$

Ha a felső félkör egyenletét forgatjuk meg az x tengely körül, akkor épp a nekünk szükséges gömböt kapjuk meg, így a következő ábra alapján fogunk dolgozni:



A barackok térfogatának kiszámításakor integrálni fogunk, amihez a szükséges elméleti áttekintést az **2.4. Integrálszámítás** cím alatt találjuk meg. Mivel a gömb forgástest, így a forgástest térfogatának kiszámításához szükséges **2.4.29. Tételben** szereplő szabályra van szükségünk a gömb térfogatának kiszámításához:

$$\begin{aligned}V &= \int_{-r}^r \pi \cdot f^2(x) dx = \int_{-r}^r \pi \cdot (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \\&= \pi \cdot \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \cdot \int_{-r}^r x^2 dx = r^2 \pi \int_{-r}^r 1 dx - \pi \cdot \int_{-r}^r x^2 dx = r^2 \pi \cdot [x]_{-r}^r - \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \\&= r^2 \pi \cdot ((r) - (-r)) - \pi \cdot \left(\left(\frac{r^3}{3} \right) - \left(\frac{(-r)^3}{3} \right) \right) = r^2 \pi \cdot (r + r) - \pi \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \left(\frac{-r^3}{3} \right) \right) = \\&= r^2 \pi \cdot 2r - \pi \cdot \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right) = 2r^3 \pi - \frac{2r^3 \pi}{3} = \frac{6r^3 \pi}{3} - \frac{2r^3 \pi}{3} = \frac{4r^3 \pi}{3}\end{aligned}$$

A nagy barack sugara $r = 5$ cm, tehát az előzőleg kiszámolt eredménybe behelyettesítve megkapjuk a térfogatát:

$$T_{nagy} = \frac{4 \cdot 5^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 125 \pi}{3} = \frac{500 \pi}{3} \approx 523,599 \text{ cm}^3$$

A kis barack sugara $r = 3,5$ cm, tehát a térfogata:

$$T_{kicsi} = \frac{4 \cdot 3,5^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 42,875 \pi}{3} = \frac{171,5 \pi}{3} \approx 179,59 \text{ cm}^3$$

A barackmagok térfogatához pedig szintén az imént kiszámolt képletet használjuk, annyi különbséggel, hogy tudjuk, hogy a barackok magjának átmérője a barack átmérőjének harmada, így a sugaruk pedig a barack sugarának harmada lesz. Tehát a nagy barack magjának sugara $r = \frac{5}{3}$ cm, a kis barack magjának sugara pedig $r = \frac{3,5}{3} = \frac{7}{6}$ cm

A nagy barack magjának térfogata tehát:

$$T_{nagy} = \frac{4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 125 \pi}{3} = \frac{500 \pi}{3} \approx 523,599 \text{ cm}^3$$

A kis barack magjának térfogata pedig:

$$T_{kicsi} = \frac{4 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 42,875 \pi}{3} = \frac{171,5 \pi}{3} \approx 179,59 \text{ cm}^3$$

A feladat megoldása innentől ugyanaz, mint az előző megoldás esetében, így ezt már nem írom le még egyszer.

A megoldás végén ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előző megoldás során, tehát hogy 1 000 Ft-ért 1 254,13 cm^3 térfogatú nagy barackot, illetve ugyanezen az áron 1 995,44 cm^3 térfogatú kis méretű barackot tudunk venni.

Így kis barackból sokkal többet tudunk enni ugyanannyi pénzért, mint nagy barackból.

b) feladatrész

Ugyanúgy oldható meg, ahogy az 1. megoldásban szereplő b) feladatrészben, így ezt már nem írom le még egyszer. ■

A következő feladathoz az inspirációt egy általam vásárolt üvegtál adta, ami a feladatban szereplő tállal azonos méretekkkel rendelkezik. A feladat szövegét ezen ötlettől vezérelve fogalmaztam meg.

3.2.2. Feladat: Üvegtál

Egy ismert lakberendezési boltban üvegtálat vásároltunk ahhoz, hogy Karácsonyra puncot készíthessünk bele a vendégeknek. A tál csonkakúp formájú, amelynek az alja egy 14 cm átmérőjű körlap, a tetején lévő kör átmérője ennek duplája, a magassága pedig 15 cm-es. Szeretnénk meghatározni az űrtartalmát, hogy tudjuk, mennyi puncot készítsünk.

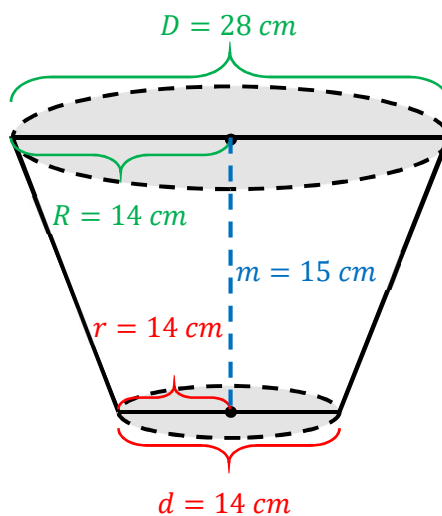
1. Megoldás: (Általános- és középiskolai eszközök felhasználásával)

A tál adatai a következők:

Az aljának átmérője: $d = 14 \text{ cm}$, tehát a sugara $r = 7 \text{ cm}$. Tudjuk, hogy a tetején lévő körlap átmérője duplája az alján lévő körlap átmérőjének, tehát $D = 28 \text{ cm}$, így a sugara $R = 14 \text{ cm}$.

A csonkakúp **magassága** $m = 15 \text{ cm}$ hosszú.

A feladat megoldása előtt nézzük meg a megoldáshoz tartozó ábrát az adatokkal:



A feladatban használt képleteket szintén a [9] könyvből kimásolva használjuk. Az ezen feladathoz szükséges csonkakúp térfogatát a 66. oldalon találjuk meg:

$$V = \frac{\pi \cdot m}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr).$$

A képletbe a fenti adatokat behelyettesítve kapjuk a következő eredményt:

$$V = \frac{\pi \cdot 15 \text{ cm}}{3} \cdot ((14 \text{ cm})^2 + (7 \text{ cm})^2 + 14 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm}) =$$

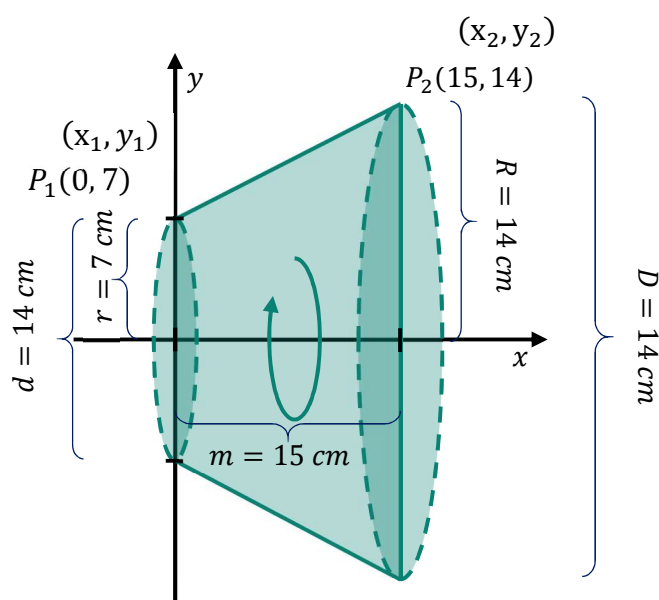
$$= 5 \text{ cm} \cdot \pi \cdot (196 \text{ cm}^2 + 49 \text{ cm}^2 + 98 \text{ cm}^2) = 5 \text{ cm} \cdot \pi \cdot 343 \text{ cm}^2 = 1715 \text{ cm}^3 \cdot \pi \approx \\ \approx 5387,83 \text{ cm}^3 \approx 5,39 \text{ dm}^3$$

Mivel víz esetén $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$, ezért $5,39 \text{ dm}^3 = 5,39 \text{ l}$.

Tehát 5,39 l pucss fél az üvegtálba. ■

2. Megoldás: (Az egyetemi Analízis eszközeinek felhasználásával)

A könnyebb számolás érdekében jó, ha van egy részletes ábránk, ami alapján könnyebben végig gondolhatjuk a megoldás részleteit. Mivel a csonkakúp is forgástest, így a térfogatát ismét a forgástest térfogatára vonatkozó tétel segítségével fogjuk meghatározni. Ehhez a következő ábrára van szükségünk:



A feladat megoldása során először két ponton (P_1 és P_2 pontokon) átmenő egyenes egyenletét kell felírnunk, majd – a forgástest térfogatának kiszámításához – ezt az egyenest forgatjuk meg a $[0, 15]$ intervallumon az x tengely körül. Így kapjuk meg végül a tál térfogatát.

A két pont a fenti adatok alapján: $P_1(0, 7)$ és $P_2(15, 14)$.

Az egyenes egyenletéhez az **2.6.2. Definícióban** szereplő iránytangenszt számoljuk ki:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 7}{15 - 0} = \frac{7}{15}$$

majd az iránytangenszt felhasználó egyenes egyenletét (**2.6.3. Tétel**) írjuk fel:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

P_0 pontként a P_1 pontot fogjuk használni.

$$y - 7 = \frac{7}{15}(x - 0) \quad /+7$$

$$f(x) = y = \frac{7x}{15} + 7$$

Most pedig a forgástest térfogatát fogjuk kiszámítani az **2.4.29. Tétel** segítségével:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \pi \cdot f^2(x) dx \\ & \int_0^{15} \pi \cdot \left(\frac{7x}{15} + 7 \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{15} \frac{49x^2}{225} + 2 \cdot 7 \cdot \frac{7x}{15} + 49 dx = \\ & = \pi \cdot \int_0^{15} \frac{49x^2}{225} dx + \pi \cdot \int_0^{15} \frac{98x}{15} dx + \pi \cdot \int_0^{15} 49 dx = \\ & = \frac{49}{225} \pi \cdot \int_0^{15} x^2 dx + \frac{98}{15} \pi \cdot \int_0^{15} x dx + 49\pi \cdot \int_0^{15} 1 dx = \\ & = \frac{49}{225} \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{15} + \frac{98}{15} \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{15} + 49\pi \cdot [x]_0^{15} = \\ & = \frac{49}{225} \pi \cdot \left(\frac{15^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \frac{98}{15} \pi \cdot \left(\frac{15^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 49\pi \cdot (15 - 0) = \\ & = \frac{49}{225} \pi \cdot \left(\frac{3375}{3} - 0 \right) + \frac{98}{15} \pi \cdot \left(\frac{225}{2} - 0 \right) + 49\pi \cdot (15 - 0) = \\ & = \frac{49}{225} \pi \cdot (1125) + \frac{98}{15} \pi \cdot \left(\frac{225}{2} \right) + 49\pi \cdot (15) = \\ & = \frac{1125 \cdot 49}{225} \pi + \frac{225 \cdot 98}{2 \cdot 15} \pi + 15 \cdot 49\pi = \frac{55125}{225} \pi + \frac{22050}{30} \pi + 735\pi = \\ & = 245\pi + 735\pi + 735\pi = 1715\pi \approx 5387,83 \text{ cm}^3 \approx 5,39 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Mivel víz esetén $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$, ezért

$$5,39 \text{ dm}^3 = 5,39 \text{ l}$$

Tehát 5,39 l puncs fér bele a tálba. ■

A következő feladathoz tartozó [13]-as forrásba az interneten való böngészés során botlottam bele, és nagyon érdekesnek találtam.

Mielőtt a feladatra térnénk, egy kis matematikatörténeti bevezetőt tekintsünk át ezzel kapcsolatosan. Az ehhez kapcsolódó forrás a [14]-es, [15]-ös és a [16]-os pontban érhető el.

Evangelista Torricelli (1608-1647) olasz tudós, aki először Galilei egyik ismert tanítványától, Benedetto Castellitől, később pedig magától Galileitől tanult rengeteget matematikából, mechanikából fizikából. Az ő nevéhez fűződik a Torricelli-tétel fizikából: egy tartály alján, kis nyíláson kifolyó víz – illetve később általánosította bármilyen folyadékra – kiömlési sebessége akkora, mintha a víz az edény folyadékszintjének magasságából szabadon esett volna. (Ehhez a Galilei által felismert szabadesési törvényt vette alapul.) Ezen kívül ő készítette el az első higanyos barométert is.

1641-ben a matematikában is fontos eredményt ért el: felfedezett egy olyan térbeli alakzatot, aminek a térfogata véges, míg a felszíne végtelen. Ez a test **Gábrriel harsonája** (Gábrriel arkangyal után), vagy más néven Torricelli trombitájaként lett ismert. Ez egy olyan „trombita”, aminek legnagyobb kör alakú metszetének sugara 1 dm-es, viszont végtelen hosszú, és az átmérője egyre keskenyedik. Habár nincs vége, mégis tele tudjuk tölteni véges mennyiségű folyadékkal, de ha le szeretnénk festeni, azt már nem tudjuk megtenni, mert végtelen mennyiségű festékre lenne szükségünk.

Ehhez kapcsolódva a következő feladatban a térfogatát, a **3.3. Felszínszámítás** fejezetben pedig a felszínét fogjuk kiszámítani.

3.2.3. Feladat: Gábrriel harsonájának térfogata

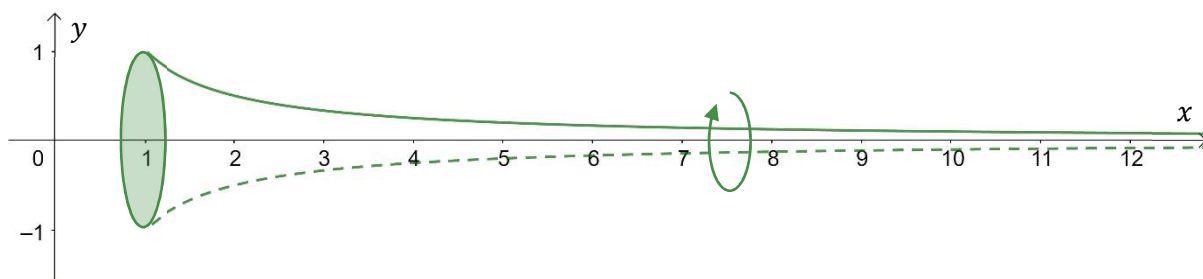
Számítsuk ki, hogy ha teletöltenénk, mennyi víz férne el Gábrriel harsonájában!

a) *Úgy kapjuk meg a feladathoz szükséges testet, ha megforgatjuk meg az x tengely körül az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt az $[1, \infty)$ intervallumon.*

b) *Ha lenne egy ilyen formájú, de csak 4 dm magasságú vázánk, amelynek a teteje a szélesebb fele, abban mennyi víz férne el?*

1. Megoldás: (Integrálszámítás segítségével)

a) feladatrész



Mivel most is forgástest térfogatát fogjuk kiszámítani, ezért az **2.4.29. Tétel** segítségével lesz szükségünk:

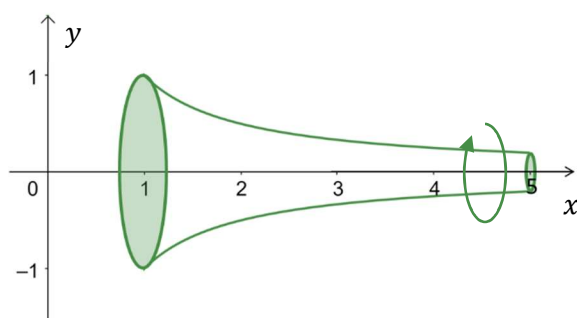
$$\int_a^b \pi \cdot f^2(x) dx.$$

Ezután pedig improprius integrálás (**2.4.30. Definíció**) segítségével fogjuk kiszámítani a harsona térfogatát:

$$\begin{aligned} V_{\text{harsona}} &= \int_1^{\infty} \pi \cdot \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u x^{-2} dx = \pi \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^u = \\ &= \pi \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \pi \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{u} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \pi \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) = \pi \cdot (0 + 1) = \\ &= \pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

Ha egy beosztás 1 dm-t jelöl az ábrán, akkor a feladatban szereplő harsonában az imént kiszámoltak alapján $\pi \text{ dm}^3 \approx 3,14 \text{ dm}^3$, vagyis körülbelül 3,14 l víz férne el.

b) feladatrész



A váza térfogatához viszont már nem kell improprius integrál, hiszen véges a magassága (4 dm hosszú, tehát az [1, 5] intervallumon fogjuk integrálni). Ez pedig a következő módon számítható ki Riemann-integrál segítségével:

$$V_{\text{váza}} = \int_1^5 \pi \cdot \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \int_1^5 x^{-2} dx = \pi \cdot [-x^{-1}]_1^5 = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_1^5 =$$

$$= \pi \cdot \left(\left(-\frac{1}{5} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \pi \cdot \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) = \pi \cdot \left(\frac{4}{5} \right) = 0,8 \cdot \pi \approx 2,51 \text{ dm}^3$$

Tehát a vázában körülbelül 2,51 l víz fér el. ■

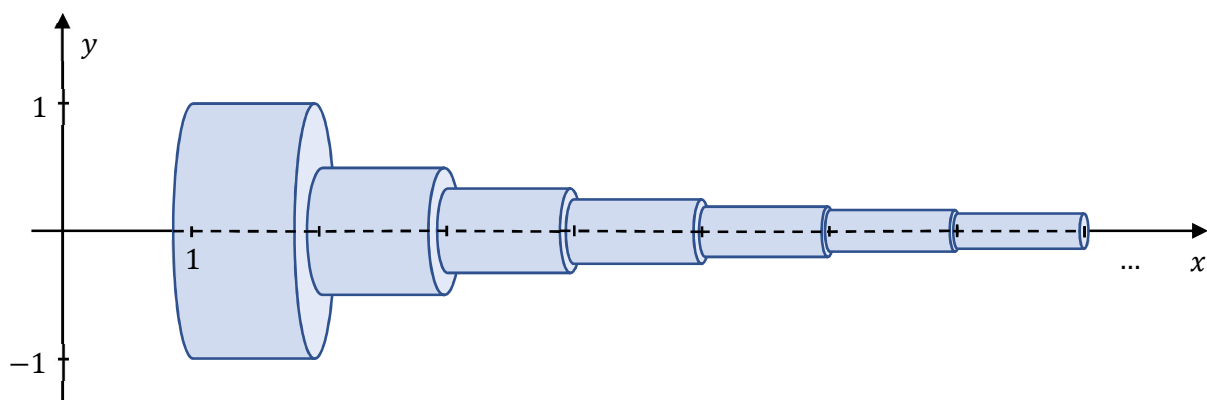
A következő megoldás Julian F. Fleron, a Westfield State College matematikaprofesszorának nevéhez kötődik (weboldalát lásd a [16]-os sorszámnál), aki egy 1999-ben megjelent cikkében írta le számításait (ld. a [13]-es pontnál az irodalomjegyzékben). **Gábrriel esküvői tortájaként** hivatkozik arra a térbeli alakzatra, amellyel Gábrriel harsonáját közelítette. (Az ábrát lerajzolva egy végtelen sor hengerből álló, emeletes esküvői tortára hasonlító testet kapunk.) A „torta” azonos magasságú hengerekből áll, amelyeknek egyre kisebb a sugara. A professzor végül végtelen sorok felhasználásával jutott végeredményre. Az ő levezetésének elemzése fog a következő oldalakon történni.

2. Megoldás: (Durva becslés – Végtelen sorok segítségével)

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt – amelyet most az $[1, \infty)$ intervallumon értelmezzünk, Fleron az alábbi függvénnyel közelítette:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \\ \vdots & \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } n \leq x \leq n+1 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ezt a függvényt szintén az x tengely körül forgatta meg, és az így kapta meg az előbb említett Gábrriel esküvői tortájának elnevezett alakzatot.



A „végtelen torta” – ahogy a fenti ábrán is látszik – 1 dm magasságú, de egyre kisebb átmérőjű hengerekből áll, ahol az n . henger térfogata $\pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 dm^3$. Így a térfogatuk összegét a következő végtelen sor összegeként számíthatjuk ki:

$$V_{torta} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 dm^3 = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} dm^3$$

Erről a végtelen sorról tanultuk az *Egyváltozós analízis 2.* tárgy során, hogy konvergens, és ezt a következő becsléssel bizonyítottuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{n \cdot (n-1)}, \quad \text{ahol } n > 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= \underbrace{1}_{\uparrow\uparrow} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \\ \frac{1}{k \cdot (k-1)} &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (\text{parciális törtekre bontás}) \end{aligned}$$

Ekkor mivel az $s_n \leq 2 \forall n$ -re – tehát felülről korlátos – az 2.4.6. Tétel miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergens sor, és az összege ≤ 2 . Ezen kívül azt is tudjuk, hogy az összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64.$$

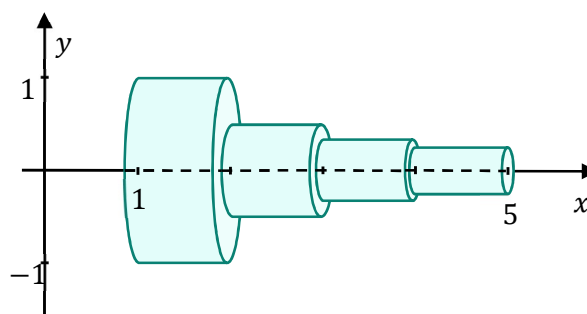
Tehát a keresett térfogat:

$$V_{torta} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} dm^3 = \pi \cdot \frac{\pi^2}{6} dm^3 = \frac{\pi^3}{6} dm^3 \approx 5,17 dm^3$$

Gábiel esküvői tortájának térfogata tehát körülbelül $5,17 dm^3$, tehát ha egy ilyen alakú végtelen edényt szeretnénk megtölteni vízzel, akkor kb. $5,17 \text{ l}$ víz férne bele. Mivel ez durva becslés, ezért nem kaptuk ugyanazt értéket, mint az előző megoldásban.

b) feladatrész

A 4 dm magasságú (4 hengerből álló) váza térfogata pedig a következő módon számolható ki:



$$\begin{aligned}
 V_{v\acute{a}za} &= \pi \cdot \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^2} = \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) = \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) = \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{4 \cdot 9 \cdot 16 + 9 \cdot 16 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 16}\right) = \pi \cdot \left(\frac{576 + 144 + 64 + 36}{576}\right) = \pi \cdot \left(\frac{820}{576}\right) \approx \\
 &\approx \pi \cdot 1,42 \approx 4,47
 \end{aligned}$$

Tehát körülbelül 4,47 l víz fér bele egy ilyen – 4 emeletes torta alakú – vázába. ■

A következő, és egyben utolsó témakör következik, amiben a felszínszámításról lesz szó.

3.3. Felszínszámítás

A **3.2.3. Feladat**ban szereplő Gábrriel harsonájának szeretnénk ebben az esetben a felszínét kiszámítani.

3.3.1. Feladat: Gábrriel harsonájának felszíne

Számítsuk ki, hogy mekkora területet kellene lefestenünk, ha **Gábrriel harsonáját** szeretnénk lefesteni kívülről!

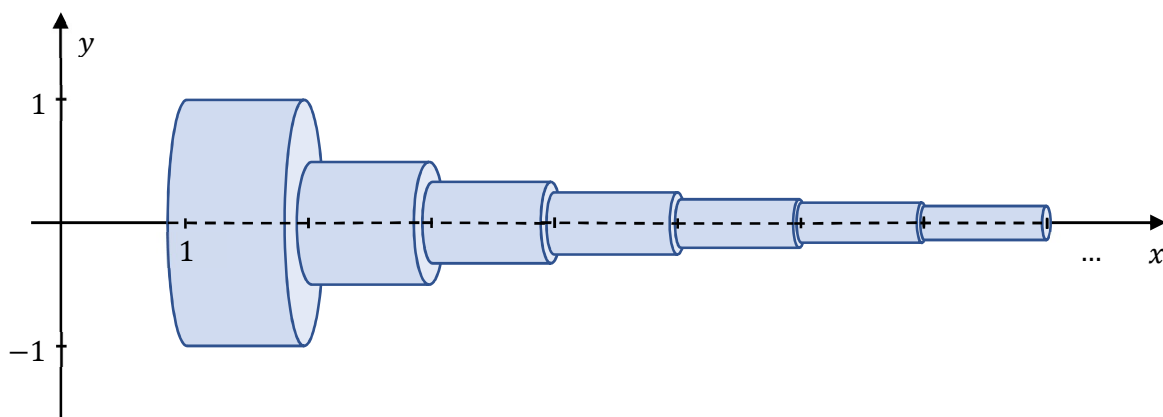
a) Úgy kapjuk meg a feladathoz szükséges testet, ahogy a 3.2.3. Feladat a) részében. Ennek szeretnénk most kiszámítani a felszínét.

b) Ha lenne egy ilyen formájú, de csak 4 dm magasságú vázánk, amelynek a teteje a szélesebb fele, akkor mekkora területet kellene lefesteni?

Most is Julian F. Fléron ötletét fogjuk használni, hogy a kérdéses végeredményre jussunk. Tehát **3.2.3. Feladat** második megoldásában is szereplő Gábrriel esküvői tortájával fogunk dolgozni.

Megoldás: (Durva becslés – Végtelen sorok segítségével)

a) feladatrész



A felszín kiszámításánál először a tortalapok tetejének a területösszegét fogjuk kiszámolni. Az n . tortalap tetejének területe a $\pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 dm^2$, mert minden lap tetejéből – felülnézetből – egy körgyűrűt látunk, amelynek külső átmérője az adott (n -edik) tortalap átmérője, belső átmérője pedig a felette lévő ($n+1$ -edik) tortalap. Tehát az összes tortalap tetejének területösszegét a következő végtelen sorral számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} T_{\text{összteteje}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \right] dm^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \right] dm^2 = \\ &= \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] dm^2 \\ s_n &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \end{aligned}$$

Ha átzárójelezzük a fenti összeget, akkor azzal már teleszkopikus összegként tovább tudunk számolni:

$$\begin{aligned} &= 1 + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 1, \text{ ha } n \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Tehát

$$T_{\text{összteteje}} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \pi dm^2.$$

Most pedig a hengerek palástjainak területösszegét kell kiszámolnunk:

$$T_{\text{összpalást}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} dm^2$$

Ehhez pedig a *harmonikus sor* összegét kellene tudnunk. *Egyváltozós analízis 2.* előadáson tanultunk, hogy a harmonikus sor *divergens*, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, mert

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 + \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n\text{-re}$$

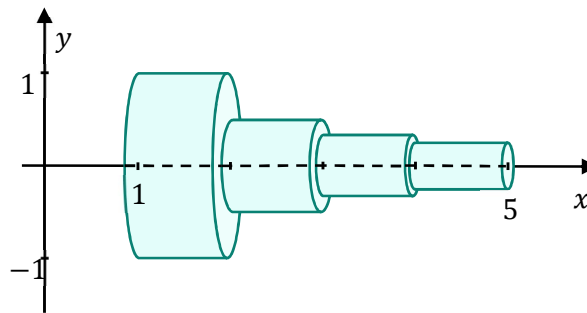
Tehát (s_n) felülről nem korlátos, így az **2.5.6. Tétel** miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Tehát Gábiel esküvői tortájának felszíne végtelen, és mivel ez egy alsó becslés Gábiel harsonájára, így az is végtelen felszínű. Tehát nincs annyi festék, amennyivel be lehetne festeni Gábiel harsonáját.

b) feladatrész

A váza esetén viszont véges (4 dm-es) magassággal számolunk:



A váza összes körének az alulnézetből is látszó területe a következőképpen számítható ki:

$$T_{\text{vázaösszalja}} = \pi \cdot \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \frac{1}{5^2} \right] =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} \right] =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \right) \right] = \pi \cdot 1 = \pi$$

A palástok összterülete pedig a következőképpen számolható ki:

$$T_{\text{vázaösszpalást}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi \cdot \left(\frac{12 + 6 + 4 + 3}{12} \right) = 2\pi \cdot \frac{25}{12} \approx 13,09$$

$$A = T_{\text{vázaösszteteje}} + T_{\text{vázaösszpalást}} \approx \pi + 13,09 \approx 16,43 \text{ dm}^2$$

Tehát a váza esetén véges eredményt kaptunk a felszínre, körülbelül $16,43 \text{ dm}^2$ -nyi területet kell lefestenünk, amihez viszont már tudunk elegendő festéket venni. ■

4. fejezet: A feladatok feldolgozása az iskolában

4.1. A feladatok megoldásához szükséges tananyag a kerettantervben, érettségi követelményekben

A közoktatásban ebben a tanévben (2022-2023) még kétféle kerettanterv van jelen. A 2020-ban megjelent Nemzeti Alaptanterv kerettantervét felmenő rendszerben (2020.09.01-től) vezették be az iskolákba, így idén az 1-2-3., 5-6-7. és 9-10-11. osztályos diákok tanulnak eszerint, a 4., 8. és 12. osztályt végzők még az előző, 2012-es NAT alapján haladnak. Emiatt azokra, akik ebben a tanévben fognak érettségizni, még a „régí” vizsgakövetelmények vonatkoznak, azonban akik későbbi tanévekben fognak végezni, már az új követelmények ismeretében készülhetnek az érettségire.

A szakdolgozat feladataihoz a felső tagozatos (5-8. évfolyam) és a középiskolai (8-12. évfolyam) matematika tantárgyra vonatkozó követelmények, változások vonatkoznak, ezen belül pedig a szakdolgozathoz a terület- (kör és ellipszis), térfogat- (gömb, csonkakúp és henger), illetve a felszínszámítás (henger), valamint az integrálszámítás (függvény alatti terület, forgástest térfogata, improprius integrálás) és a végtelen sorok témaköre szükséges, így ezeket fogjuk áttekinteni.

Míg a 2012-es NAT esetében alap- és emelt óraszám szerint külön tanterv áll rendelkezésre, utóbbiból külön A és B változattal – amelyekből csak a 9-12. osztályos gimnáziumi A változatban szerepelnek az analízis elemei –, a 2020-as szerint már csak egyféle jelent meg, amelyben az analízis egyáltalán nem jelenik meg. Ezen kívül más módosítások is történtek, ezeket táblázatban fogom rendszerezni a számunkra szükséges témakörök szerint (forrás – 2012-es NAT szerint: 5-8. évfolyam [18], 9-12. évfolyam [19]; 2020-as NAT szerint: 5-8. évfolyam [20], 9-12. évfolyam [21]):

	2012-es NAT	2020-as NAT
Kör területe, egyenlete (Körzőhasználat)	A körzőhasználat már az 5-6. osztályban megjelenik mindhárom változatban. Az alap és az emelt óraszám esetén is 7-8. osztályos tananyag a kör kerületével együtt a területe is. A kör egyenlete 11-12. osztályos tananyag.	A körzőhasználat itt is 5-6. osztályos tananyag. A 7-8. osztály esetén csak a körrel kapcsolatos fogalmak jelennek meg, a kör kerületének és területének kiszámítása csak a 9-10. osztályban képezi a tanterv részét. A kör egyenlete 11-12. osztályos tananyag.
Ellipszis területe	Nem szerepel a kerettantervben.	Nem szerepel a kerettantervben.

	2012-es NAT	2020-as NAT
Gömb térfogata	Az alap óraszámánál csak a gömb részei kerülnek elő 7-8. osztályban, a felszínét és a térfogatát 11-12. osztályban tanulják meg kiszámítani. Emelt óraszámánál már 7-8. osztályban tanulják a felszínt és a térfogatot is.	11-12. osztályban tanulják a gömb felszínét, térfogatát.
Csonkakúp térfogata	Az alap és az emelt óraszám esetén kúp felszíne és térfogata 7-8. osztályos, a csonkakúp felszíne és térfogata pedig 11-12. osztályos tananyag.	A kúp és a csonkakúp felszíne és térfogata is 11-12. osztályban kerül elő.
Henger térfogata és felszíne	Az alap és az emelt óraszám esetén is 7-8. osztályos tananyag.	11-12. osztályos tananyag.
Integrálszámítás (függvény alatti terület, forgástest térfogata)	Az emelt óraszámú tanterv A változatában szerepel a függvény alatti terület és a forgástest térfogatának meghatározása (henger, kúp, csonkakúp, gömb, gömbszelet térfogata).	Nem szerepel a kerettantervben.
Végteles sorok	Az emelt óraszámú tanterv A változatában szerepelnek a hatványsorok, melyeket formálisan meghatároznak integrálással. Ezen kívül tanulnak a hatványsorok szerepéről a matematikában, fizikában, informatikában.	Nem szerepel a kerettantervben.

Ahogy már fent említettem, és láttuk is, a kerettantervek nagy részében nem szerepelnek az emelt szintű érettségien kért plusz ismeretek (csak a 2012-es NAT szerinti emelt óraszámú A változatában), ezért az érettségi követelményeit is érdemes megtekinteni. A két NAT szerinti követelményrendszer elolvasása során azt tapasztaltam, hogy ezekben a témakörökben csak a kör egyenleténél van egy apróbb változás, más esetben megegyeznek. Az is észrevehető, hogy az integrálszámítás és a végtelen sorok témaköréből kevesebbet kérnek számon az érettségien, mint amennyi a kerettantervben szerepel.

Most a közép- és az emelt szintű érettségi közötti különbségeket fogom táblázatos formátumban szemléltetni, szintén az általunk használt témaköröket vizsgálva. Az emelt szintnél csak a további követelményeket fogom ismertetni, hiszen a középszintű követelményeket teljes egészében tartalmazza az emelt szintű érettségi is. (Forrás – 2012-es NAT szerint [22], 2020-as NAT szerint [23].)

	Középszint	Emelt szint
Kör területe, egyenlete	Ki kell tudni számolni a kör, körcikk, körszelet területét és területét; fel kell tudni írni adott középpontú és sugarú kör egyenletét. (2012-es NAT szerint meg kell tudni határozni egy kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát.)	Le kell tudni vezetni a kör egyenletét. Ismerni kell a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatát. Meg kell tudni határozni egy kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát.
Ellipszis területe	Egyáltalán nem szerepel az érettségi követelmények között.	Egyáltalán nem szerepel az érettségi követelmények között.
Gömb térfogata	Ki kell tudni számítani gömb térfogatát és felszínét.	Nem szerepel magasabb követelmény a középszintű érettségihez képest.
Csonkakúp térfogata	Ki kell tudni számítani a forgáskúp és a csonkakúp térfogatát és felszínét.	Nem szerepel magasabb követelmény a középszintű érettségihez képest.
Henger térfogata és felszíne	Ki kell tudni számítani a henger térfogatát és felszínét.	Nem szerepel magasabb követelmény a középszintű érettségihez képest.
Integrálszámítás (függvény alatti terület, forgástest térfogata)	Középszinten nem szerepel az érettségi követelmények között.	A polinomfüggvények, a szinusz és a koszinusz függvény grafikonja alatti területet ki kell tudni számolni.
Végtelen sorok	Középszinten nem szerepel az érettségi követelmények között.	Ismerni és alkalmazni kell a végtelen mértani sor fogalmát és összegét egyszerűbb feladatokban.

Arról sajnos nem lehet semmit tudni a 2020-as NAT szerinti kerettanterv alapján, hogy akik emelt szintű érettségit szeretnének tenni, milyen tanterv alapján haladjanak. Majd a következő tanévben megjelenő 12. osztályos tankönyvekből lehet következtetni rá, addig a tanárookra van bízva, hogy az érettségi követelményen kívül tanítanak-e több analízist az iskolában.

Az általam feldolgozott feladatok között vannak olyanok, amit ezek alapján akár az általános iskola 7-8. osztályában is bevihetünk szakkörre – gondolok itt a 2.1.1. *Körök feladat 1. megoldására*, vagy ha módosítjuk Julian F. Fleron Gábiel esküvői tortáját 3-4 emeletes tortára, annak a felszínét, térfogatát is ki tudjuk számolni a tanult eszközökkel –, a többi feladat általános- és középiskolai eszközökkel elkészített változatát a gimnázium 11-12. osztályában akár középszinten érettségizőknek is ajánlhatjuk szakköri példaként. Viszont az egyetemi analízist tartalmazó megoldásokat, illetve a Gábiel harsonájával

kapcsolatos feladatokat csak azoknak ajánlom, akik emelt szinten szeretnének érettségizni, vagy matematika tagozatos osztályba járnak, és ezen a területen szeretnének továbbtanulni.

A következőekben két szakköri tervet fogok bemutatni a feladatok feldolgozására. Az egyikben általános iskolai szakkör (7-8. osztály), a másikban pedig gimnáziumi szakkör (12. osztály) terve lesz látható.

4.2. A feladatok feldolgozása szakkörön

4.2.1. Általános iskola 7-8. osztály

1. óra: Körzőhasználat, kör kerülete- és területe.

Az óra célja: A körzőhasználat, valamint a kör kerületének és területének átisméltése.

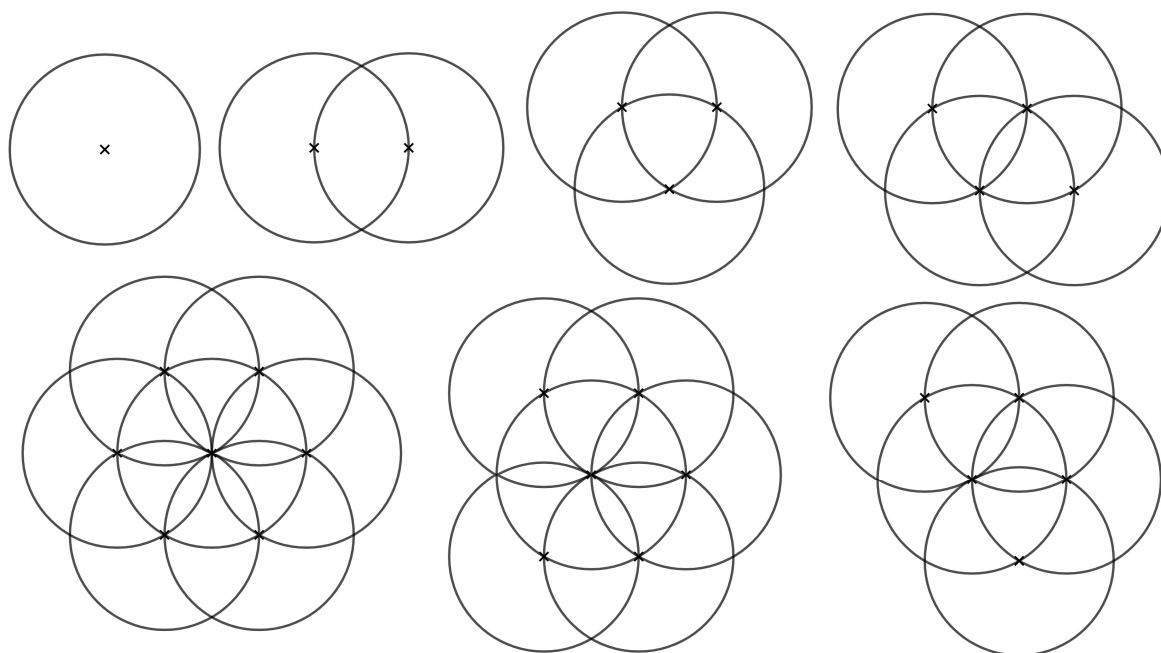
Előzmények: Már 5-6. osztályban használták a körzőt szerkesztésre, illetve tanórán tanulták kör területének kiszámítását.

Munkaforma: A bevezető feladatnál egyéni munka, utána pármunka vagy csoportmunka, végül frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangoló, bevezető feladatként ábrákat rajzolunk körző segítségével. (kb. 10 perc)

1. feladat:



2. Az óra fő része:

2. feladat: 3.1.1. Körök feladat 1. megoldása párban vagy csoportban (kb. 15-20 perc).

Kör kerület- és területképletének felidézése (2-3 perc).

A kör kerülete	A kör területe
$K = 2 \cdot r \cdot \pi$	$T = r^2 \cdot \pi$

3. feladat: Számítsd ki a 4 cm, illetve a 6 cm sugarú kör kerületét és területét! (Kb. 8 perc)

3. Befejezés: A szakkörön tanultak összefoglalása, kvíz megoldása kör kerületével, területével, illetve a kör részeivel kapcsolatban.

2. óra: A henger felszíne és térfogata.

Az óra célja: A henger felszínének és térfogatának kiszámítása.

Előzmények: Az előző szakkörön átismételt kör kerülete, területe, illetve a tanórán már tanulták a henger felszínét és térfogatát.

Munkaforma: Pármunka vagy csoportmunka, az óra végén frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangoló, bevezető feladatként lottó feladat, amelyben kör és téglalap kerületét, területét, valamint területből négyzet oldalhosszát kell kiszámítani. (15-17 perc)

1. feladat: Határozd meg a következő feladatok megoldását, és a helyes eredményt jelöld be a lottószelvényen!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

- 1. feladat:** Számítsd ki az 5 cm sugarú kör kerületét egészen kerekítve (a kerekítés szabályainak megfelelően)!
- 2. feladat:** Számítsd ki az 5 cm sugarú kör területét egészen kerekítve (a kerekítés szabályainak megfelelően)!
- 3. feladat:** Számítsd ki az 5 cm és 12 cm oldalhosszúságú téglalap kerületét!
- 4. feladat:** Számítsd ki az 5 cm és 12 cm oldalhosszúságú téglalap területét!
- 5. feladat:** Számítsd ki a 49 cm² területű négyzet oldalainak hosszát!

A megoldások: 31, 79, 34, 60, 7.

2. Az óra fő része:

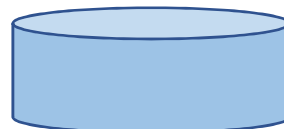
A henger felszín- és térfogatképletének felidézése (2-3 perc).

A henger felszíne	A henger térfogata
$K = r^2\pi + 2r\pi \cdot m = 2r\pi \cdot (r + m)$	$T = r^2\pi \cdot m$

2. feladat: Számítsd ki a henger térfogatát és felszínét, ha az adatai:

- a) sugara 14 cm, magassága 10 cm hosszú,
- b) sugara 12 cm, magassága 10 cm hosszú,
- c) sugara 10 cm, magassága 10 cm hosszú,
- d) sugara 8 cm, magassága 10 cm hosszú.

(kb. 20 perc)



3. Befejezés: A szakkörön tanultak összefoglalása, kvíz megoldása téglalap kerületével, területével, illetve a henger felszínével, térfogatával, részeivel kapcsolatban.

3. óra: Torta felszíne és térfogata.

Az óra célja: A hengerek egymásra építésével kapott test felszínének és térfogatának kiszámítása.

Előzmények: Az előző szakkörön átismételt henger térfogata, felszíne.

Munkaforma: Pármunka vagy csoportmunka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: (7-8 perc)

A hengerekből, amivel az előző órán dolgoztunk, először 2, 3, 4, és végül 5 (ha belefér az időbe) emeletes tortát építünk. Különbség csak a téglalapok magasságában lesz a múlt órai feladatokhoz képest. Az így kapott alakzatoknak (tortáknak) fogjuk kiszámítani a felszínét, valamint a térfogatát.

Bevezetesként azt fogjuk megbeszélni, hogy pontosan hogyan kell számolnunk, hogy a helyes eredményt kapjuk. Felszínénél miért nem elég, ha csak összeadjuk a hengerek felszínét?

A pár/csoportmunka során borítékokból kivett képkockák hátulján lévő eredmények közül kell megkeresni a tanulóknak az ő eredményükhöz passzolót. Az óra végén a képkockákból egy nagy kép részlete jön ki, amiből ki kell találniuk, hogy az eredeti (nagy képen) milyen állat lehet. A csoportok megoldásai közötti különbség a téglalapok magasságainak eltérése miatt lesz.

2. Az óra fő része:

Feladat: Számítsd ki a torta térfogatát és felszínét, ha a tészták magassága:

1. csoport: 6 cm 2. csoport: 7 cm 3. csoport: 8 cm

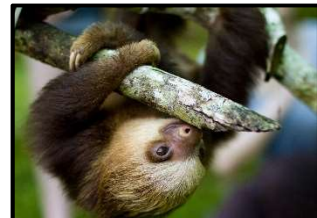
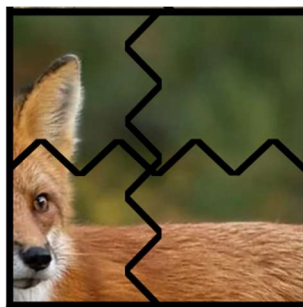
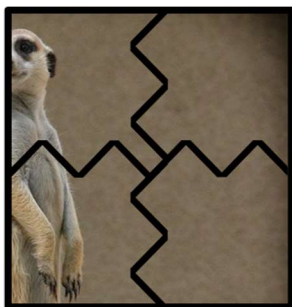
Sugaraik pedig:

- a) 14 cm, 12 cm,
- b) 14 cm, 12 cm, 10 cm,
- c) 14 cm, 12 cm, 10 cm, 8 cm,
- d) 14 cm, 12 cm, 10 cm, 8 cm, 6 cm hosszú.

(kb. 35 perc)



A megoldás végén a következő képeket kapják a csoportok:



3. **Befejezés:** A képek felismerése, majd összerakása és felragasztása papírra, a tanóra értékelése.

A képek forrása az [a], [b] és [c] pontban található a képjegyzékben.

4.2.1. Gimnázium 12. osztály, emelt szintű érettségire készülők

1. óra: Területszámítás 1.

Az óra célja: A területszámítás átismétlése.

Előzmények: Kör és háromszög területe, Pitagorasz-tétel, körív hossza, körcikk területe.

Munkaforma: A bevezető feladatnál egyéni munka, utána frontális munka, majd pármunka vagy csoportmunka, végül újra frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangelő, bevezető feladat: kvíz a szükséges, korábban már tanult képletekkel kapcsolatban (az előzményben írtak szerint) (kb. 5-7 perc).

2. Az óra fő része:

1. feladat: 3.1.1. Körök feladat 2. megoldása párban vagy csoportban, ehhez szükség van a Bevezetésben átismételt képletekre (kb. 20 perc).

A feladat közös megbeszélése (kb. 10 perc).

3. Befejezés: A szakköri órán tanultak összefoglalása.

2. óra: Területszámítás 2. – Fessünk tojást!

Az óra célja: Az ellipszis részeinek, definíciójának megismerése; területének kiszámítása képlet felhasználásával.

Előzmények: A kör területe, amelyet előző órán átismételtünk.

Munkaforma: A bevezető feladatnál egyéni munka, utána pármunka vagy csoportmunka, végül frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangelő, bevezető feladat: kvíz a kör területével kapcsolatban (adott sugarú körök területét kell gyorsan kiszámolni, számológép is használható) (kb. 5 perc).

2. Az óra fő része: (kb. 7-8 perc)

Először az ellipsziszről ejtünk néhány szót. Felrajzoljuk, megbeszéljük a definícióját, részeit – **2.6.7. Definíció** –, majd a területének kiszámításához szükséges képletet beszéljük meg:

$$T = a \cdot b \cdot \pi$$

1. feladat: 3.1.2. Tojás feladat 1. megoldása párban vagy csoportban (kb. 15 perc).

A feladat közös megbeszélése (kb. 10 perc).

3. Befejezés: A szakköri órán tanultak összefoglalása. Kvíz az ellipszis részeiről, területképletéről.

3. óra: Gömb és csonkakúp térfogatának meghatározása.

Az óra célja: Gömb és csonkakúp térfogatának meghatározása, kapcsolódás a mindennapi élethez.

Előzmények: Szakkörön: kör kerülete, területe, ellipszis területe. Matematika órán már tanulták a gömb és a csonkakúp térfogatát.

Munkaforma: Pármunka vagy csoportmunka, végül frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangelő, bevezető feladat: lottó feladat, amelyben kör kerületét, területét, az ellipszis területét, valamint a gömb felszínét és térfogatát kell kiszámítani. (kb. 15 perc)

A 3. feladatnál vigyázni kell, át kell számolni, mennyi lesz a félnagy tengely és a félkistengely, csak úgy lehet jó eredményt kapni.

1. feladat: Határozd meg a következő feladatok megoldását, és a helyes eredményt jelöld be a lottószelvényen!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

- 1. feladat:** Számítsd ki a 7 cm sugarú kör *kerületét* egészre kerekítve (a kerekítés szabályainak megfelelően)!
- 2. feladat:** Számítsd ki az 3 cm sugarú kör *területét* egészre kerekítve (a kerekítés szabályainak megfelelően)!
- 3. feladat:** Számítsd ki az 8 cm -es kistengelyű és 14 cm -es nagytengelyű ellipszis *területét*!
- 4. feladat:** Számítsd ki a 2 cm sugarú gömb *felszínét*!
- 5. feladat:** Számítsd ki a 2 cm sugarú gömb *térfogatát*!

A megoldások: 44, 28, 88, 50, 34.

2. Az óra fő része:

Felrajzolunk egy gömböt és egy csonkakúpot, majd közösen átismétljük a gömb és a csonkakúp felszínének és térfogatának képletét (kb. 3-5 perc):

A gömb felszíne	A gömb térfogata
$A = 4 \cdot r^2 \pi$	$V = \frac{4 \cdot r^3 \pi}{3}$
A csonkakúp felszíne	A csonkakúp térfogata
$A = \pi \cdot [R^2 + r^2 + a \cdot (R + r)]$	$V = \frac{\pi \cdot m}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$

2. feladat: 3.2.1. Őszibarack feladat 1. megoldásának a) részének megoldása párban/csoportban, a gömb térfogatképletének felhasználásával. (kb. 15 perc)

3. feladat: 3.2.2. Üvegtál feladat 1. megoldása párban/csoportban, a csonkakúp térfogatképletének felhasználásával. Ha nem sikerül befejezni, otthon folytathatják a diákok. (kb. 10 perc)

3. Befejezés: Eredmények összehasonlítása, szakköri órán tanultak összefoglalása.

4. óra: Mi múlik a sűrűségen?

Az óra célja: Az előző órai barackos feladat megoldása abban az esetben, ha a két barack sűrűsége különbözik.

Előzmények: Az előző órai feladatot folytatjuk, a b) feladatrésszel; fizikából tanulták a sűrűség kiszámításának képletét.

Munkaforma: Frontális munka, utána pármunka vagy csoportmunka, végül újra frontális munka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Az előző órán kiszámolt, b) feladatrésszhez is szükséges eredmények összegyűjtése., valamint a tömeg kifejezése sűrűség és térfogat segítségével: $m = \rho \cdot V$ (7-8 perc).

2. Az óra fő része:

1. feladat: 3.2.1. feladat 1. megoldásának b) része: (kb. 20 perc)

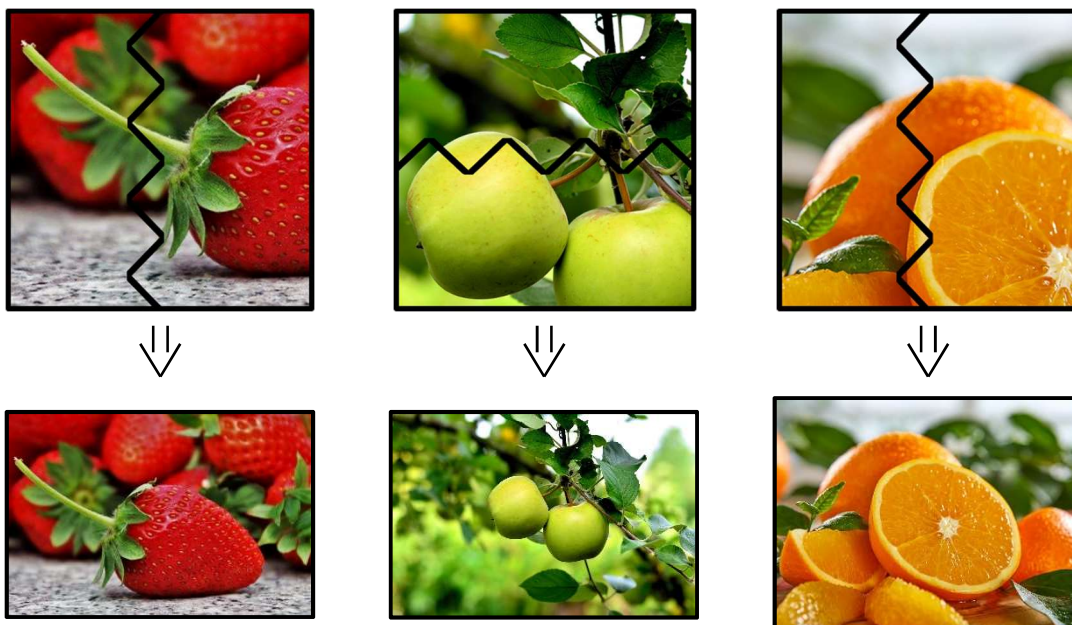
Pár/csoportmunkában fogják megbeszélni a diákok az 1. megoldás b) részében szereplő eseteket. Az általános iskolai szakkör 3. szakköréhez hasonlóan most is borítékokat kapnak a diákok, benne képkockákkal, melyeknek a hátulján eredmények szerepelnek. A feladat végén minden csoport az általa kiszámított eredményeket – az 1 000 Ft-os áron vásárolt kis- és nagy barack tömegét – megkeresi a következő oldalon látható képkockák hátulján, és így most két képkocka fogja adni a számolás végén a képrészletet, melyet az óra végén fel kell tudni ismerni. Végül fel is ragasztják őket a kapott papírra.

A számításhoz szükséges sűrűségadatok csoportonként:

Barack	1. csoport	2. csoport	3. csoport
Kicsi	$\rho_k = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_k = 0,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_k = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Nagy	$\rho_n = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_n = 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_n = 3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Barack	1. csoport	2. csoport	3. csoport
Mag	$\rho_m = 1,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_m = 3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\rho_m = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

A megoldás végén a következő képeket kapják a csoportok:



3. Befejezés: A képek felismerése, majd összerakása és felragasztása papírra, a tanóra értékelése.

A képek forrása a [d], [e] és [f] pontban található a képjegyzékben.

5. óra: Integrálszámítás, függvény alatti terület meghatározása.

Az óra célja: Az integrálszámítás és a függvény alatti terület meghatározásának ismételése.

Előzmények: Differenciálszámítás, határozatlan és határozott integrálás, Newton-Leibniz formula, függvény alatti terület meghatározása.

Munkaforma: A bevezető feladatnál egyéni munka, utána frontális munka, végül pármunka vagy csoportmunka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangoló, bevezető feladat: kvíz az integrálási szabályokkal, és néhány alapintegrállal kapcsolatban (5-7 perc).

2. Az óra fő része:

Először összegyűjtjük a legfontosabb integrálszámítással kapcsolatos tudnivalót, amire szükségünk lehet a függvény alatti terület kiszámításához.

1. feladat: Számítsuk ki közösen az $f(x) = -x^2 + 4$ függvény $[-2, 2]$ intervallumon vett területét! (kb. 7-8 perc)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 -x^2 + 4 \, dx &= \int_{-2}^2 -x^2 \, dx + \int_{-2}^2 4 \, dx = -\int_{-2}^2 x^2 \, dx + 4 \cdot \int_{-2}^2 1 \, dx = \\ &= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 + 4 \cdot [x]_{-2}^2 = -\left(\left(\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3}\right)\right) + 4 \cdot (2 - (-2)) = \\ &= -\left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right) + 4 \cdot 4 = -\frac{16}{3} + 16 = -\frac{16}{3} + \frac{48}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,67\end{aligned}$$

2. feladat: A 3.1.2. Tojás feladat 2. megoldásának kiszámolása ugyanezen módszer segítségével.

Kifejezzük az ellipszis egyenletéből (**2.6.9. Tétel**) a félellipszis egyenletét, mert nincs olyan függvény, amelynek a grafikonja ellipszis lenne.

Megbeszéljük a **2.4.26. Definícióban** szereplő *normáltartomány* fogalmát, illetve **2.4.27. Tétel** alapján számoljuk ki az ellipszis területét. (kb. 20 perc).

3. feladat: Számítsd ki a kör területét normáltartomány segítségével!

Csoportmunkában próbálják megoldani a tanulók a feladatot az előző, közösen megbeszélt feladat alapján. Ha nem megy nekik, akkor közösen kifejezzük a kör egyenletéből (**2.6.6. Állítás**) a félkör egyenletét, mert nincs olyan függvény, amelynek a grafikonja kör lenne.

Ha nem sikerül befejezni, befejezhetik otthon az ellipszis területe alapján.

3. Befejezés: Ha sikerül végezniük, összehasonlítjuk az eredményeket, utána összefoglaljuk a szakköri órán tanultakat.

6. óra: Integrálszámítás, forgástest térfogatának meghatározása.

Az óra célja: A forgástest térfogatának ismételése.

Előzmények: Differenciálszámítás, határozatlan és határozott integrálás, Newton-Leibniz formula, függvény alatti terület meghatározása, forgástest térfogata.

Munkaforma: A bevezető feladtnál egyéni munka, utána frontális munka, végül pármunka vagy csoportmunka.

Az óra menete:

1. Bevezetés: Ráhangoló, bevezető feladat: a múlt óraihoz hasonló kvíz az integrálási szabályokkal, és néhány alapintegrállal kapcsolatban (5-7 perc).

2. Az óra fő része:

Először átismételjük a forgástest térfogatát a **2.4.29. Tétel** alapján. Ezután a múlt órán csoportmunkaként kiadott félkör egyenletét vesszük elő, és ezt fogjuk függvényként megforgatni az x tengely körül. Az így kapott forgástest térfogatát csoportmunkaként fogják meghatározni a tanulók, mégpedig a következőképpen:

1. feladat: A 3.2.1. Őszibarack feladat 2. megoldásának elkészítése, az ott szereplő adatokkal (kb. 15-20 perc).

Ezután az egyenes iránytangensét (**2.6.2. Definíció**), és az ezzel felírt egyenletét (**2.6.3. Tétel**) ismételjük át (kb. 5 perc).

2. feladat: A 3.2.2. Üvegtál feladat 2. megoldásának elkészítése párban (kb. 10 perc).

3. Befejezés: Összehasonlítjuk az eredményeket, utána összefoglaljuk a szakköri órán tanultakat.

7. óra: Érdekesség – Kitekintés az egyetemi analízisre – Gábrriel harsonája.

Az óra célja: Érdekesség megismerése a felszín-és térfogatszámítás témakörében.

Előzmények: Differenciálszámítás, határozatlan és határozott integrálás, Newton-Leibniz formula, függvény alatti terület meghatározása, forgástest térfogata, hatványsorok.

Munkaforma: Frontális munka.

Az óra menete:

Diasorral prezentálva megnézzük a Gábrriel harsonája paradoxont.

1. Bevezetés: Egy kis matematikatörténeti áttekintés Evangelista Torricelliről, illetve Gábrriel harsonájáról (5-7 perc).

2. Az óra fő része:

1. feladat: A 3.2.3. Gábrriel harsonája feladat 1. megoldásának áttekintése diasoron keresztül: térfogatszámítás forgástest térfogatával (kb. 15 perc).

2. feladat: A 3.2.3. Gábrriel harsonája feladat 2. megoldásának áttekintése (Julian F. Fleron megoldása alapján): térfogatszámítás végtelen sorok alkalmazásával (kb. 10 perc).

3. feladat: A 3.3.1. Gábrriel harsonája feladat megoldásának áttekintése (Julian F. Fleron megoldása alapján): felszínszámítás végtelen sorok alkalmazásával (kb. 10 perc).

3. Befejezés: Összehasonlítjuk az eredményeket, utána összefoglaljuk a szakköri órán tanultakat.

5. fejezet: Összefoglalás

A szakdolgozatomban próbáltam minél szélesebb skálán mozogva megmutatni a terület-, térfogat- és felszínszámítás témakörén belül szereplő általános- és középiskolai módszerekkel is megoldható matematika feladatok kapcsolódási pontjait az egyetemi analízis eszközeivel, amelybe a matematika iránt érdeklődő diákok már az emelt szintű érettségire való készülés során bepillantást nyerhetnek például szakkör formájában. Ugyan ez csak egy szelete volt azon feladatoknak, amelyek ezen kétféle megoldási módszerrel is megoldhatóak, de ízelítőként szolgálhat azoknak, akik már régóta érdeklődnek a tantárgy iránt, és kíváncsiak arra, hogyan fejlődhetnek tovább. Ezen feladatok feldolgozására egy általános iskolai, és egy gimnáziumi (emelt szintű érettségire készülőknek) szakkör tervének ajánlását is bemutattam.

Végül itt is megemlíteném azt a feladatot, ami egy kicsit kilóg a többi közül: a Gáriel harsonájáról szóló példa, amely inkább azt a célt szolgálta, hogy ezzel is megmutathassam, milyen szépségei vannak a matematikának, és hogy akár olyan eredmények is születhetnek egy feladat megoldása során, amire nem is gondolnánk. Hiszen a feladat egy paradoxon, mert hogy létezhet olyan tárgy, amit meg lehet tölteni véges térfogatú folyadékkal, de nem tudjuk befesteni, mert végtelen mennyiségű festékre lenne szükségünk hozzá?

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Dr. Sikolya Eszter: *Analízis jegyzet*, 2017. szeptember 20.,
(https://sikolyaeszt.web.elte.hu/oktatas/Sikolya_Analízis_jegyzet, letöltés dátuma: 2022.03.17.)
- [2] *Bevezető analízis* 2. c. egyetemi kurzus előadásjegyzete, előadó: Dr. Besenyei Ádám, 2015. tavaszi félév, illetve Dr. Keleti Tamás, 2016. tavaszi félév (Függvények)
- [3] *Egyváltozós analízis* 1. c. egyetemi kurzus előadásjegyzete, előadó: Dr. Besenyei Ádám, 2017. őszi félév (Differenciálszámítás)
- [4] *Egyváltozós analízis* 2. c. egyetemi kurzus előadásjegyzete, előadó: Dr. Besenyei Ádám, 2018. tavaszi félév (Integrálszámítás)
- [5] *Bevezetés a geometriába* c. egyetemi kurzus előadásjegyzete, előadó: Dr. Verhóczy László, 2014. tavaszi félév; Dr. Moussong Gábor, 2015. tavaszi félév
- [6] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, Hatodik kiadás, 1979.
- [7] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex, 2012.
- [8] *Szórakoztató szakköri feladatok* c. egyetemi kurzus feladatsorai, gyakorlatvezető: Gémes Margit, 2021. tavaszi félév (4. feladatsor 7. feladat, 7. feladatsor 1. feladat és 9. feladatsor 1. feladat)
- [9] Dr. Hack Frigyes (matematika, informatika), Dr. Fülöp Ferenc (fizika), Kugler Sándorné (fizika), dr. Radnai Gyula (fizika), Urbán János (fizika), Dr. Szabados László (csillagászat), dr. Nemerényi Antal (földrajz), dr. Balázs Lóránt (kémia), Dr. Büki András (kémia): *Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2., javított kiadás, 2008.
- [10] Gémes Margit: *Ívhossz számítás a sörccsap mellett*, Tanárklub, 2014. tavasz, 4. oldal
(https://margitgemes.web.elte.hu/Tanarklub_ivhossz_140226_bovebb.pdf, utolsó megtekintés dátuma: 2022.08.06. 20:23)
- [11] *Water content by weight of some common fruits and vegetables*
(https://www.researchgate.net/figure/Water-content-by-weight-of-some-common-fruits-and-vegetables_tbl4_317014767, utolsó megtekintés dátuma: 2022.06.29, 19:28)
- [12] A. Pérez-López, S.H. Chávez-Franco, C.A. Villaseñor-Perea, T. Espinosa-Solares, L.H. Hernández-Gómez, C. Lobato-Calleros: *Respiration rate and mechanical properties of peach fruit during storage at three maturity stages*, Journal of Food Engineering 142, 2014,
(https://www.academia.edu/19069954/Respiration_rate_and_mechanical_properties_of_peach_fruit_during_storage_at_three_maturity_stages, 114. oldal, utolsó megtekintés dátuma: 2022.06.29, 19:42)
- [13] Julian F. Fleron: *Gabriel's Wedding Cake*, The College Mathematics Journal, January 1999, Volume 30, Number 1, pp. 35-38. (<https://www.matharticles.com/ma/ma044.pdf>, utolsó megtekintés dátuma: 2022.10.31. 20:21)

- [14] J. J. O'Connor and E. F. Robertson: *Evangelista Torricelli (1608 – 1647) - Biography - MacTutor History of Mathematics*, utolsó módosítás dátuma: 2002 november (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Torricelli/>, utolsó megtekintés dátma: 2022.11.14. 22:40)
- [15] Materny Károly összeállítása alapján: *Evangelista Torricelli (1608–1647)* (<http://www.puskas.hu/ttk/elet/85.html>, utolsó megtekintés dátuma: 2022.11.14. 22:48)
- [16] Andrew Boyd: No. 2856: *Torricelli's Trumpet*, Engines of Our Ingenuity (<https://uh.edu/engines/epi2856.htm>, utolsó megtekintés dátuma: 2022.11.15. 9:31)
- [17] Julian F. Fleron, a Westfield State College matematikaprofesszorának weboldala (https://www.westfield.ma.edu/math/MathWeb/faculty/PersonalPages/fleron/jf_home.asp.html, utolsó megtekintés dátuma: 2022.11.15., 17:58)
- [18] A 2012-es NAT-hoz illeszkedő kerettantervek – 2. melléklet – Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára (https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html, utolsó megtekintés dátuma – 2022.11.26. 21:23)
- [19] A 2012-es NAT-hoz illeszkedő kerettantervek – 3. melléklet – Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára (https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html, utolsó megtekintés dátuma – 2022.11.26. 21:14)
- [20] A 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók – Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyama számára – Matematika (Felső tagozat – alap óraszám) (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx, letöltés dátuma: 2022.11.26. 19:42)
- [21] A 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók – Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára – Matematika (Középiskola – alap óraszám) (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_K.docx, letöltés dátuma: 2022.11.26. 19:42)
- [22] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2023. október-novemberi vizsgaidőszakig érvényes vizsgakövetelményei (2012-es Nat-ra épülő vizsgakövetelmények) – Matematika (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakövetelmenyek2017/matematika_vk.pdf, utolsó megtekintés dátuma: 2022.11.26. 22:51)
- [23] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2024. május-júniusi vizsgaidőszaktól érvényes vizsgakövetelményei (2020-as Nat-ra épülő vizsgakövetelmények) – Matematika (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakövetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf, utolsó megtekintés dátuma: 2022.11.26. 22:51)

KÉPJEGYZÉK

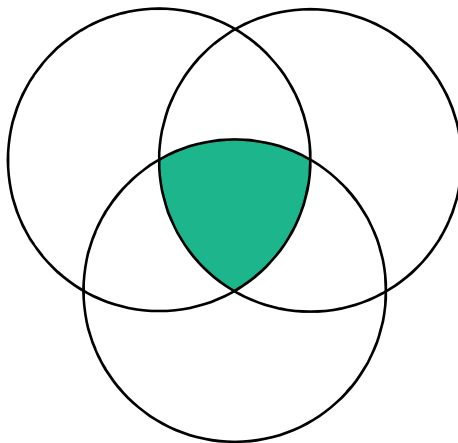
- [a] Szurikáta: <http://www.allatkertialapitvany.hu/orokbefogadható-allatok/wadadisi/>
- [b] Lajhár: <https://wallpaperaccess.com/baby-sloth>
- [c] Róka: https://columbustelegram.com/a-fox-in-my-yard/article_e6446df4-8e58-5750-aae3-81e56f900d10.html
- [d] Eper: <https://eperinfo.hu/eper/>
- [e] Zöldalma: <https://www.needpix.com/photo/1766832/apple-green-apple-apple-tree-fruit-healthy-harvest-eat-fresh-apple-garden>
- [f] Narancs: <https://www.halegroves.com/navel-oranges/p/halenaiveloranges/>

MELLÉKLET

A mellékletben a **3.1.1. feladat** egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával elkészített megoldása látható, amely csak hosszú számításokkal készíthető el, azonban az egyetemi eszközök célja pont az lenne, hogy minél egyszerűbben oldhassuk meg vele a feladatokat, ez pedig egy sok oldalas megoldás, ezért szerepel itt.

3.1.1. Feladat: Körök

Bendegúz egy lapra úgy rajzolt 3 azonos sugarú kört, hogy bármely 2 kör metszéspontja egybeessen a harmadik kör középpontjával. Vajon nagyobb-e a három kör metszetének a területe, mint egy kör területének a negyede?



3. Megoldás: (Az egyetemi analízis eszközeinek felhasználásával)

A körlemez (körlap) területének kiszámításához először *az origó középpontú kör egyenletére* van szükségünk, amely az **2.6.6. Állítás** alapján:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Vagy kanonikus alakban–az ellipszis **2.6.10. Speciális** eseteként – a következő alakban írható fel:

$$(2) \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Mindkét alak esetében $r > 0$.

A kör területének kiszámításához az alsó- vagy felső félkörlemez területét kell kiszámítanunk.

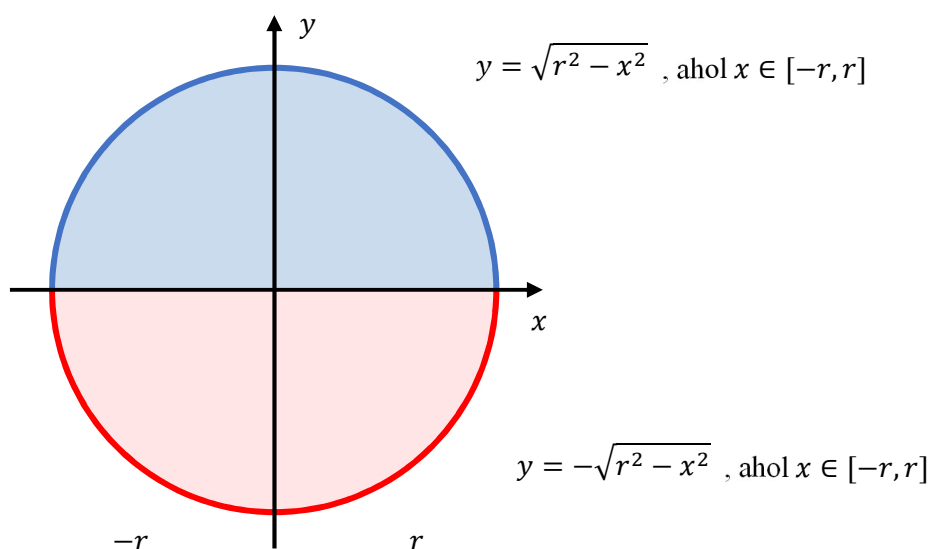
Azért így dolgozunk, mert nincs olyan függvény, melynek a grafikonja egy kör lenne. Olyan függvény viszont van, amelynek a grafikonja félkör. A kört két félkörre bonthatjuk fel, ezeket a függvényeket pedig úgy kaphatjuk meg, ha az előzőleg felírt kör egyenletéből kifejezzük az y -t. Most az (1) egyenletet fogjuk ehhez felhasználni segítségképpen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad / -x^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad / \sqrt{}$$

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



A kör területének kiszámításához az **2.4.26. Definíció**ban említett normáltartomány területét kell kiszámolni. A kör az alábbi egyenletű függvénygörbék között fekvő normáltartomány:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

$$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

A normáltartomány területe az **2.4.27. Tétel**ben szereplő módon számítható ki:

$$T_{\text{kör}} = t(N_{f,g}) = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx - \int_{-r}^r -\sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Tehát integrálszámítást fogunk végezni a megoldás során. (Az ehhez szükséges elméleti alapokat az **2.4. Integrálszámítás** címszó alatt találhatjuk meg a 2. fejezet elméleti áttekintésében.)

A (2) köregyenletet felhasználva alakítsuk át a kifejezésünket a következőre:

$$T_{\text{kör}} = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-r}^r 2r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx$$

Ezután alkalmazzuk az $x = r \cdot \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítést. Mivel $dx = 2r \cos t dt$, ezért

$$T_{\text{kör}} = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r \cdot \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos t \cdot |\cos t| dt$$

Mivel $\cos \left| \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right| \geq 0$, ezért

$$T_{\text{kör}} = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos^2 t dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = r^2 \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ \cos^2 t &= \cos 2t + \underbrace{\sin^2 t}_{1 - \cos^2 t} \\ (\sin^2 t + \cos^2 t &= 1) \\ 2\cos^2 t &= \cos 2t + 1 \end{aligned}$$

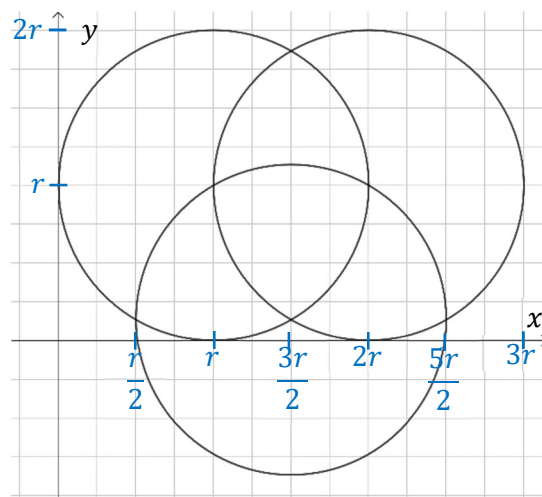
$$= r^2 \left(\frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = r^2 \left(\frac{\sin \pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin -\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= r^2 \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = r^2 \pi$$

A kör területének negyede pedig ebből adódóan:

$$T_{\text{negyedkör}} = \frac{T_{\text{kör}}}{4} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

Ezután a három kör metszetének területét szeretnénk kiszámolni, melyhez az alábbi ábrát fogjuk használni tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ sugarú körök esetére:



Ehhez először is szükségünk lesz a körök egyenletére. Ehhez az (1) egyenletet használjuk fel.

1. kör egyenlete: $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$,

2. kör egyenlete: $(x - r - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$, azaz $(x - 2r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

A 3. kör egyenletéhez először meg kell határoznunk a középpontjának koordinátáit, mégpedig úgy, hogy az előző két kör metszéspontjainak koordinátáit számítsuk ki. Ehhez egy két egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. egyenlet: } (x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \\ \text{II. egyenlet: } (x - 2r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \end{array} \right\} \text{A II. egyenletből kivonjuk az I. egyenletet.}$$

$$(x - 2r)^2 - (x - r)^2 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 2rx + 4r^2 - (x^2 - 2rx + r^2) = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 2rx + 4r^2 - x^2 + 2rx - r^2 = 0$$

$$-2rx + 3r^2 = 0$$

$$2rx = 3r^2 \quad / : 2r$$

$$x = \frac{3}{2}r$$

Ezzel a középpont x koordinátáját megkaptuk, az y koordinátát pedig úgy tudhatjuk meg, ha az I. vagy II. egyenletbe behelyettesítjük az előzőleg kapott x értéket. Most az első egyenletbe fogjuk helyettesíteni.

$$\left(\frac{3}{2}r - r\right)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{1}{2}r\right)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

$$\frac{1}{4}r^2 + y^2 - 2ry + r^2 = r^2 \quad / -r^2$$

$$\frac{1}{4}r^2 + y^2 - 2ry = 0$$

$$y^2 - 2ry + \frac{1}{4}r^2 = 0$$

Ezt az egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fogjuk megoldani, ahol $a = 1$, $b = -2r$, és $c = \frac{1}{4}r^2$.

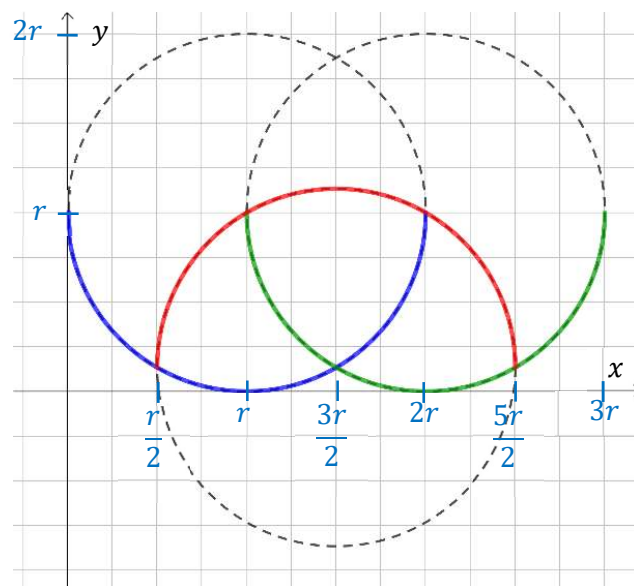
$$y_{1,2} = \frac{-(-2r) \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}r^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - r^2}}{2} = \frac{2r \pm \sqrt{3r^2}}{2} = \frac{2r \pm r\sqrt{3}}{2} = \frac{r(2 \pm \sqrt{3})}{2}$$

ahol $y_1 = \frac{r(2 + \sqrt{3})}{2}$, és $y_2 = \frac{r(2 - \sqrt{3})}{2}$

Nekünk most az alsó metszéspont y koordinátája fog kelleni, így a

$$3. \text{ kör egyenlete: } \left(x - \frac{3}{2}r\right)^2 + \left(y - \frac{r(2 - \sqrt{3})}{2}\right)^2 = r^2$$

Nekünk most elég az első és a második kör esetén az alsó félkört, a harmadik kör esetén pedig a felső félkört nézni, lásd a következő ábrán színes félkörökkel jelölt részeket:



Ezeknek az egyenlete a következőképpen fog alakulni:

1. kör alsó félköre:

$$\begin{aligned} (x - r)^2 + (y - r)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2rx + r^2 + y^2 - 2ry + r^2 &= r^2 & / -r^2 \\ y^2 - 2ry + x^2 - 2rx + r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Most szintén a másodfokú egyenlet megoldóképletével fogunk dolgozni, ahol

$$a = 1, \quad b = -2r, \quad c = x^2 - 2rx + r^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-2r) \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 2rx + r^2)}}{2 \cdot 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4x^2 + 8rx - 4r^2}}{2} = \frac{2r \pm \sqrt{-4x^2 + 8rx}}{2} = \frac{2r \pm \sqrt{4(2rx - x^2)}}{2} = \\
&= \frac{2r \pm 2\sqrt{2rx - x^2}}{2} = r \pm \sqrt{2rx - x^2}
\end{aligned}$$

Innen az *első kör* alsó félkörének egyenlete: $r - \sqrt{2rx - x^2}$, ahol $x \in [0, 2r]$

A második kör alsó félkörének egyenlete hasonlóan alakul:

$$\begin{aligned}
(x - 2r)^2 + (y - r)^2 &= r^2 \\
x^2 - 4rx + 4r^2 + y^2 - 2ry + r^2 &= r^2 & / -r^2 \\
y^2 - 2ry + x^2 - 4rx + 4r^2 &= 0
\end{aligned}$$

Ebben az esetben is a másodfokú egyenlet megoldóképletét fogjuk használni, ahol

$$\begin{aligned}
a &= 1, & b &= -2r, & c &= x^2 - 4rx + 4r^2 \\
y_{1,2} &= \frac{-(-2r) \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 4rx + 4r^2)}}{2 \cdot 1} = \\
&= \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4x^2 + 16rx - 16r^2}}{2} = \frac{2r \pm \sqrt{-4x^2 + 16rx - 12r^2}}{2} = \\
&= \frac{2r \pm \sqrt{4(4rx - x^2 - 3r^2)}}{2} = \frac{2r \pm 2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2}}{2} = r \pm \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2}
\end{aligned}$$

A *második kör* alsó félkörének egyenlete: $r - \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2}$, ahol $x \in [r, 3r]$

A harmadik kör felső félkörének egyenlete pedig a következőképpen számítható ki:

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{3}{2}r\right)^2 + \left(y - \frac{r(2 - \sqrt{3})}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\left(x - \frac{3}{2}r\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}(r(2 - \sqrt{3}))\right)^2 &= r^2 \\
x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}rx + \frac{9}{4}r^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(r(2 - \sqrt{3}))y + \left(\frac{1}{2}(r(2 - \sqrt{3}))\right)^2 &= r^2 \\
x^2 - 3rx + \frac{9}{4}r^2 + y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + \frac{1}{4}r^2(2 - \sqrt{3})^2 &= r^2 \\
y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + \frac{1}{4}r^2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + x^2 - 3rx + \frac{9}{4}r^2 &= r^2 \\
y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + \frac{1}{4}r^2(7 - 4\sqrt{3}) + x^2 - 3rx + \frac{9}{4}r^2 &= r^2
\end{aligned}$$

$$y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + \frac{7}{4}r^2 - \frac{4\sqrt{3}}{4}r^2 + x^2 - 3rx + \frac{9}{4}r^2 = r^2$$

$$y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + \frac{16}{4}r^2 - \sqrt{3}r^2 + x^2 - 3rx = r^2$$

$$y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + 4r^2 - \sqrt{3}r^2 + x^2 - 3rx = r^2 \quad /-r^2$$

$$y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + 3r^2 - \sqrt{3}r^2 + x^2 - 3rx = 0$$

$$y^2 - (2 - \sqrt{3})ry + x^2 - 3rx + (3 - \sqrt{3})r^2 = 0$$

Most is a másodfokú egyenlet megoldóképletét fogjuk használni, ahol

$$a = 1, \quad b = -(2 - \sqrt{3})r, \quad c = x^2 - 3rx + (3 - \sqrt{3})r^2$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-(-(2 - \sqrt{3})r) \pm \sqrt{(-(2 - \sqrt{3})r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 3rx + (3 - \sqrt{3})r^2)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 r^2 - 4(x^2 - 3rx + 3r^2 - \sqrt{3}r^2)}}{2} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{(4 - 4\sqrt{3} + 3)r^2 - 4x^2 + 12rx - 12r^2 + 4\sqrt{3}r^2}}{2} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{(7 - 4\sqrt{3})r^2 - 4x^2 + 12rx - 12r^2 + 4\sqrt{3}r^2}}{2} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{7r^2 - 4\sqrt{3}r^2 - 4x^2 + 12rx - 12r^2 + 4\sqrt{3}r^2}}{2} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{7r^2 - 4x^2 + 12rx - 12r^2}}{2} = \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{-5r^2 - 4x^2 + 12rx}}{2} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})r \pm \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2} \end{aligned}$$

A harmadik kör felső félkörének egyenlete:
$$\frac{(2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2}$$

$$\text{ahol } x \in \left[\frac{1}{2}r, \frac{3}{2}r \right]$$

Ahhoz, hogy ki tudjuk számítani a három kör metszetének területét, először a félkörök metszéspontjainak x koordinátáit kell meghatároznunk.

Az 1. és a 2. kör alsó félkörének metszéspontja:

$$r - \sqrt{2rx - x^2} = r - \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} \quad /-r$$

$$-\sqrt{2rx - x^2} = -\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2}$$

Ezután az egyenletet úgy alakítjuk, hogy mindkét oldalon eltűnjön a negatív előjel a gyökkifejezés elől:

$$\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = \sqrt{2rx - x^2} \quad /(\)^2$$

Most pedig az egyenlet mindkét oldalán négyzetre emelünk:

$$4rx - x^2 - 3r^2 = 2rx - x^2 \quad /+x^2$$

$$4rx - 3r^2 = 2rx \quad /-2rx$$

$$2rx - 3r^2 = 0 \quad /+3r^2$$

$$2rx = 3r^2 \quad /:2r$$

$$x = \frac{3}{2}r$$

Tehát a metszéspont x koordinátája: $x = \frac{3}{2}r$

Az 1. kör alsó félkörének és a 3. kör felső félkörének metszéspontja:

$$r - \sqrt{2rx - x^2} = \frac{(2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2} \quad /\cdot 2$$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 2-vel, hogy a jobb oldalon eltűnjön a törtkifejezés:

$$2r - 2\sqrt{2rx - x^2} = (2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}$$

$$2r - 2\sqrt{2rx - x^2} = 2r - \sqrt{3}r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /-2r$$

$$-2\sqrt{2rx - x^2} = -\sqrt{3}r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /+\sqrt{3}r$$

$$\sqrt{3}r - 2\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /(\)^2$$

Most az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük:

$$3r^2 - 2 \cdot \sqrt{3}r \cdot 2\sqrt{2rx - x^2} + 4(2rx - x^2) = -4x^2 + 12rx - 5r^2$$

$$3r^2 - \sqrt{3}\sqrt{2rx - x^2} \cdot 4r + 8rx - 4x^2 = -4x^2 + 12rx - 5r^2 \quad /+4x^2$$

$$3r^2 - \sqrt{3}\sqrt{2rx - x^2} \cdot 4r + 8rx = 12rx - 5r^2 \quad /+5r^2$$

$$8r^2 - \sqrt{3}\sqrt{2rx - x^2} \cdot 4r + 8rx = 12rx$$

$$8r^2 - \sqrt{3 \cdot (2rx - x^2)} \cdot 4r + 8rx = 12rx \quad /-12rx$$

$$8r^2 - \sqrt{6rx - 3x^2} \cdot 4r - 4rx = 0 \quad /+\sqrt{6rx - 3x^2} \cdot 4r$$

$$8r^2 - 4rx = \sqrt{6rx - 3x^2} \cdot 4r \quad /: 4r$$

$$2r - x = \sqrt{6rx - 3x^2} \quad /(\quad)^2$$

$$4r^2 - 2 \cdot 2r \cdot x + x^2 = 6rx - 3x^2$$

$$4r^2 - 4rx + x^2 = 6rx - 3x^2 \quad /+3x^2$$

$$4r^2 - 4rx + 4x^2 = 6rx \quad /-6rx$$

$$4r^2 - 10rx + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 10rx + 4r^2 = 0 \quad /: 2$$

$$2x^2 - 5rx + 2r^2 = 0$$

Most az x-re fogjuk használni a másodfokú egyenlet megoldóképletét, ahol

$$a = 2, \quad b = -5r, \quad c = 2r^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5r) \pm \sqrt{(-5r)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2r^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5r \pm \sqrt{25r^2 - 16r^2}}{4} = \frac{5r \pm \sqrt{9r^2}}{4} = \frac{5r \pm 3r}{4}$$

$$x_1 = \frac{5r + 3r}{4} = \frac{8r}{4} = 2r$$

Tehát a két metszéspont x koordinátája:

$$x_2 = \frac{5r - 3r}{4} = \frac{2r}{4} = \frac{1}{2}r$$

Nekünk innen az x_1 koordinátára lesz szükségünk a metszet területének kiszámításához.

A 2. kör alsó félkörének és a 3. kör felső félkörének metszéspontja:

$$r - \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = \frac{(2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2r - 2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = (2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}$$

$$2r - 2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = 2r - \sqrt{3}r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /-2r$$

$$-2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = -\sqrt{3}r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /+\sqrt{3}r$$

$$\sqrt{3}r - 2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} = \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2} \quad /(\quad)^2$$

$$\begin{aligned} 3r^2 - 2\sqrt{3}r \cdot 2\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} + 4(4rx - x^2 - 3r^2) \\ = -4x^2 + 12rx - 5r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3r^2 - \sqrt{3}\sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} \cdot 4r + 16rx - 4x^2 - 12r^2 \\ = -4x^2 + 12rx - 5r^2 \end{aligned}$$

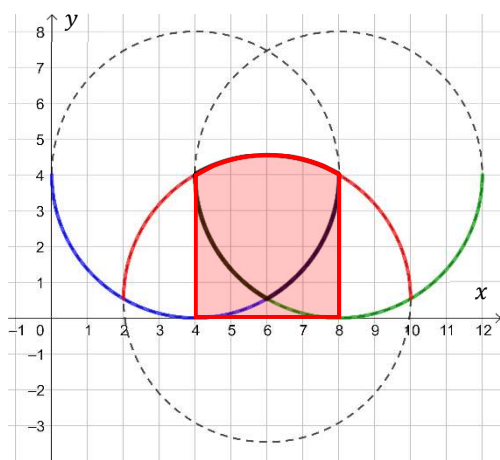
$$\begin{aligned}
& -9r^2 - \sqrt{3 \cdot (4rx - x^2 - 3r^2)} \cdot 4r + 16rx - 4x^2 \\
& \quad = -4x^2 + 12rx - 5r^2 \\
& -9r^2 - \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r + 16rx - 4x^2 \quad \quad \quad /+4x^2 \\
& \quad = -4x^2 + 12rx - 5r^2 \\
& -9r^2 - \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r + 16rx = 12rx - 5r^2 \quad \quad \quad /+5r^2 \\
& -4r^2 - \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r + 16rx = 12rx \quad \quad \quad /-12rx \\
& -4r^2 - \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r + 4rx = 0 \quad \quad \quad /+\sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r \\
& \quad 4rx - 4r^2 = \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \cdot 4r \quad \quad \quad /:4r \\
& \quad \quad x - r = \sqrt{12rx - 3x^2 - 9r^2} \quad \quad \quad /(\quad)^2 \\
& \quad \quad x^2 - 2xr + r^2 = 12rx - 3x^2 - 9r^2 \quad \quad \quad /+3x^2 \\
& \quad \quad 4x^2 - 2xr + r^2 = 12rx - 9r^2 \quad \quad \quad /+9r^2 \\
& \quad \quad 4x^2 - 2xr + 10r^2 = 12rx \quad \quad \quad /-12rx \\
& \quad \quad 4x^2 - 14xr + 10r^2 = 0 \quad \quad \quad /:r \\
& \quad \quad 2x^2 - 7xr + 5r^2 = 0
\end{aligned}$$

Most szintén az x-re fogjuk használni a másodfokú egyenlet megoldóképletét, ahol

$$\begin{aligned}
a &= 2, & b &= -7r, & c &= 5r^2 \\
x_{1,2} &= \frac{-(-7r) \pm \sqrt{(-7r)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5r^2}}{2 \cdot 2} = \frac{7r \pm \sqrt{49r^2 - 40r^2}}{4} = \frac{7r \pm \sqrt{9r^2}}{4} = \frac{7r \pm 3r}{4} \\
& & x_1 &= \frac{7r + 3r}{4} = \frac{10r}{4} = \frac{5}{2}r \\
& \textbf{Tehát a két metszéspont x koordinátája:} & x_2 &= \frac{7r - 3r}{4} = \frac{4r}{4} = r
\end{aligned}$$

Nekünk innen az x_2 koordinátára lesz szükségünk a metszet területének kiszámításához.

Most pedig a következőképpen határozhatjuk meg a metszet területét a függvények alatti terület kiszámításával a megfelelő intervallumokon:

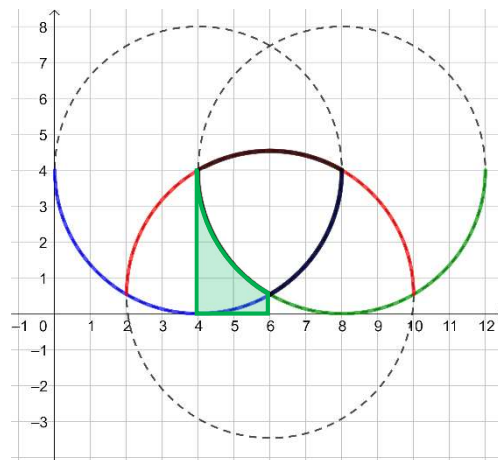


1. lépés: A harmadik kör felső félkörét

$f(x)$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2}$$

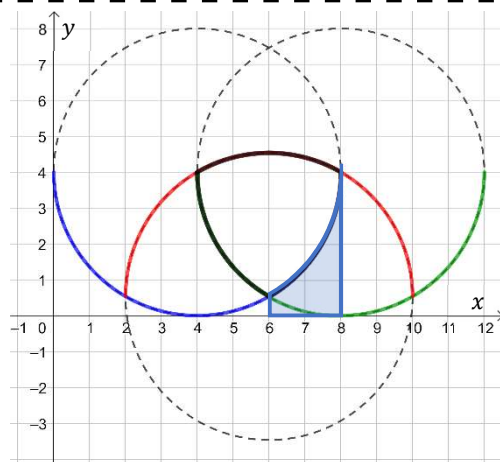
integráljuk az $x \in [r, 2r]$ intervallumon.



2. lépés: A második kör alsó félkörét

$$g(x) = r - \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2}$$

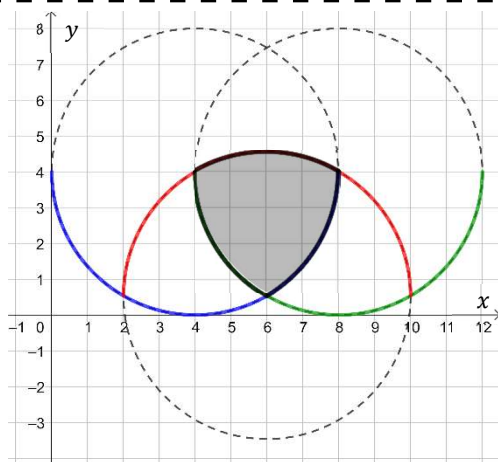
integráljuk az $x \in [r, \frac{3}{2}r]$ intervallumon.



3. lépés: Az első kör alsó félkörét

$$h(x) = r - \sqrt{2rx - x^2}$$

integráljuk az $x \in [\frac{3}{2}r, 2r]$ intervallumon.



4. lépés: Végül pedig a következőképpen számolhatjuk ki a metszet területét:

$$\int_r^{2r} f(x) dx - \left(\int_r^{\frac{3}{2}r} g(x) dx + \int_{\frac{3}{2}r}^{2r} h(x) dx \right)$$

A következőkben csak az 1. lépésben leírt görbe alatti területet fogjuk részletesen kiszámolni, a 2. és 3. lépésben lévő területeknél csak a végeredményt, mert a számolás azonos módon történik.

$$\begin{aligned}
\int_r^{2r} f(x) dx &= \int_r^{2r} \frac{(2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 5r^2}}{2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_r^{2r} (2 - \sqrt{3})r + \sqrt{-4x^2 + 12rx - 9r^2 + 4r^2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{3})r \cdot \int_r^{2r} 1 dx + \frac{1}{2} \cdot \int_r^{2r} \sqrt{4r^2 - (2x - 3r)^2} dx =
\end{aligned}$$

Helyettesítéssel integrálás

$$t = 2x - 3r$$

$$\frac{dt}{dx} = 2$$

$$dt = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r \cdot [x]_r^{2r} + \frac{1}{2} \cdot \int_r^{2r} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - t^2} dt = \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r \cdot ((2r) - (r)) + \frac{1}{4} \cdot \int_r^{2r} \sqrt{4r^2 - t^2} dt =
\end{aligned}$$

Helyettesítéssel integrálás

$$\frac{t}{2r} = \sin(u)$$

$$u = \arcsin\left(\frac{t}{2r}\right)$$

$$t = 2r \cdot \sin(u)$$

$$dt = 2r \cdot \cos(u) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{1}{4} \cdot \int_r^{2r} 2r \cdot \cos(u) \sqrt{4r^2 - (2r \cdot \sin(u))^2} du = \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{1}{4} \cdot 2r \cdot \int_r^{2r} \cos(u) \sqrt{4r^2 - 4r^2 \cdot \sin^2(u)} du =
\end{aligned}$$

A következő trigonometrikus összefüggést használjuk fel:

$$\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1 \quad / \cdot 4r^2$$

$$4r^2 \cdot \sin^2(u) + 4r^2 \cdot \cos^2(u) = 4r^2 \quad / -r^2 \cdot \sin^2(u)$$

$$4r^2 \cdot \cos^2(u) = 4r^2 - 4r^2 \cdot \sin^2(u)$$

Ezt behelyettesítjük a megfelelő helyre:

$$\begin{aligned} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{2r}{4} \cdot \int_r^{2r} \cos(u) \sqrt{4r^2 \cdot \cos^2(u)} du = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{2r}{4} \cdot \int_r^{2r} 2r \cdot \cos^2(u) du \\ &= \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{4r^2}{4} \cdot \int_r^{2r} \cos^2(u) du = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + r^2 \cdot \int_r^{2r} \cos^2(u) du = \end{aligned}$$

Most pedig az előzőleg is említett

$$\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$$

összefüggést, illetve a

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$$

addíciós képletet alkalmazva kapjuk a

$$\begin{aligned} \cos^2(u) &= \cos(2u) + \sin^2(u) \\ \cos^2(u) &= \cos(2u) + \underbrace{\sin^2(u) + \cos^2(u)}_1 - \cos^2(u) && / + \cos^2(u) \\ 2\cos^2(u) &= \cos(2u) + 1 && / : 2 \\ \cos^2(u) &= \frac{\cos(2u) + 1}{2} \end{aligned}$$

összefüggést, amelyet felhasználva folytatjuk az integrálást az alábbi módon:

$$\begin{aligned} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + r^2 \cdot \int_r^{2r} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_r^{2r} \cos(2u) + 1 du = \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r^2}{2} \cdot \int_r^{2r} \cos(2u) du + \frac{r^2}{2} \cdot \int_r^{2r} 1 du = \end{aligned}$$

Helyettesítéses integrálás

$$v = 2u$$

$$\frac{dv}{du} = 2$$

$$du = \frac{1}{2} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{2} \cdot \int_r^{2r} \frac{1}{2} \cdot \cos(v) dv + \frac{r^2}{2} \cdot [u]_r^{2r} = \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot \int_r^{2r} \cos(v) dv + \frac{r^2}{2} \cdot [u]_r^{2r} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot [\sin(v)]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot [u]_r^{2r} \\
&=
\end{aligned}$$

Most pedig elkezdjük visszavezetni a helyettesítéssel integrálásokat, elsőként az utolsót, ahol $v = 2u$.

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot [\sin(2u)]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot [u]_r^{2r} =$$

Ezután jön az $u = \arcsin\left(\frac{t}{2r}\right)$.

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot \left[\sin\left(2 \cdot \arcsin\left(\frac{t}{2r}\right)\right) \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{t}{2r}\right) \right]_r^{2r} =$$

Ezt a következő összefüggésekkel fogjuk tudni egyszerűsíteni:

$$u = \arcsin\left(\frac{t}{2r}\right) \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad \frac{t}{2r} = \sin(u)$$

$$\sin(2u) = 2 \sin(u) \cos(u)$$

$$\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$$

$$\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$$

$$\text{A fenti } \frac{t}{2r} = \sin(u) \quad \text{miatt}$$

$$\cos^2(u) = 1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2, \quad \text{tehát} \quad \cos(u) = \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2}$$

$$\sin(2u) = 2 \underbrace{\sin(u)}_{\frac{t}{2r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2}$$

$$\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{t}{2r}\right)\right) = 2 \cdot \frac{t}{2r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2}$$

Tehát folytatva a fenti integrálást

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot \left[2 \cdot \frac{t}{2r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{t}{2r}\right) \right]_r^{2r} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r^2}{4} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{t}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left[t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{t}{2r}\right) \right]_r^{2r} =
\end{aligned}$$

Ezután pedig $t = 2x - 3r$ visszahelyettesítéssel

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left[(2x-3r) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x-3r}{2r}\right)^2} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left[(2x-3r) \cdot \sqrt{1 - \frac{(2x-3r)^2}{4r^2}} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \left[(2x-3r) \cdot \sqrt{1 - \frac{4x^2 - 12xr + 9r^2}{4r^2}} \right]_r^{2r} + \frac{r^2}{2} \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \left[(2x-3r) \sqrt{1 - \frac{4r^2 + 4x^2 - 12xr + 5r^2}{4r^2}} \right]_r^{2r} + \\
&+ \frac{r^2}{2} \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \left[(2x-3r) \sqrt{1 - 1 - \frac{4x^2 - 12xr + 5r^2}{4r^2}} \right]_r^{2r} + \\
&+ \frac{r^2}{2} \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \left[(2x-3r) \sqrt{-\frac{4x^2 - 12xr + 5r^2}{4r^2}} \right]_r^{2r} + \\
&+ \frac{r^2}{2} \left[\arcsin\left(\frac{2x-3r}{2r}\right) \right]_r^{2r} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \\
&\cdot \left((4r-3r) \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot 4r^2 - 12 \cdot 2r^2 + 5r^2}{4r^2}} - \left((2r-3r) \cdot \sqrt{-\frac{4r^2 - 12r^2 + 5r^2}{4r^2}} \right) \right) + \\
&+ \frac{r^2}{2} \cdot \left(\left(\arcsin\left(\frac{2 \cdot 2r - 3r}{2r}\right) \right) - \left(\arcsin\left(\frac{2r - 3r}{2r}\right) \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left(\left(r \cdot \sqrt{-\frac{16r^2-24r^2+5r^2}{4r^2}} \right) - \left(-r \cdot \sqrt{-\frac{-3r^2}{4r^2}} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{r^2}{2} \cdot \left(\left(\arcsin\left(\frac{4r-3r}{2r}\right) \right) - \left(\arcsin\left(\frac{-r}{2r}\right) \right) \right) = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left(r \cdot \sqrt{-\frac{-3r^2}{4r^2}} + r \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \right) + \frac{r^2}{2} \cdot \left(\left(\arcsin\left(\frac{r}{2r}\right) \right) - \left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \right) \right) = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left(r \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + r \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \right) + \frac{r^2}{2} \cdot \left(\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \right) - \left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \right) \right) = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot \left(2r \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) + \frac{r^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{6} \right) - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r}{4} \cdot (r \cdot \sqrt{3}) + \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{6} = \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{\pi}{6}r^2 = \frac{6 \cdot (2-\sqrt{3})}{12}r^2 + \frac{3\sqrt{3}}{12}r^2 + \frac{2\pi}{12}r^2 = \\
&= \frac{12-6\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\pi}{12}r^2 = \frac{12-3\sqrt{3}+2\pi}{12}r^2
\end{aligned}$$

A 2. lépésben a következőt kapjuk:

$$\int_r^{\frac{3}{2}r} g(x) dx = \int_r^{\frac{3}{2}r} r - \sqrt{4rx - x^2 - 3r^2} dx = \frac{12+3\sqrt{3}-4\pi}{24}r^2$$

A 3. lépésben pedig erre az eredményre jutunk:

$$\int_{\frac{3}{2}r}^{2r} h(x) dx = \int_{\frac{3}{2}r}^{2r} r - \sqrt{2rx - x^2} dx = \frac{12+3\sqrt{3}-4\pi}{24}r^2$$

Végül a metszet területe a következő lesz:

$$\begin{aligned}
T_{\text{metszet}} &= \int_r^{2r} f(x) dx - \left(\int_r^{\frac{3}{2}r} g(x) dx + \int_{\frac{3}{2}r}^{2r} h(x) dx \right) = \\
&= \frac{12-3\sqrt{3}+2\pi}{12}r^2 - \left(\frac{12+3\sqrt{3}-4\pi}{24}r^2 + \frac{12+3\sqrt{3}-4\pi}{24}r^2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12 - 3\sqrt{3} + 2\pi}{12} r^2 - \left(\frac{12 + 3\sqrt{3} - 4\pi}{24} 2r^2 \right) \\
&= \frac{12 - 3\sqrt{3} + 2\pi}{12} r^2 - \frac{12 + 3\sqrt{3} - 4\pi}{12} r^2 = \\
&= \frac{-6\sqrt{3} + 6\pi}{12} r^2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} r^2
\end{aligned}$$

Az összefüggés a metszet területe és a kör területének negyede között:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} r^2 &< \frac{r^2 \pi}{4} && / \cdot 4 \\
(2\pi - 2\sqrt{3})r^2 &< r^2 \pi && / : r^2 \quad (r > 0) \\
2\pi - 2\sqrt{3} &< \pi && / -\pi \\
\pi - 2\sqrt{3} &< 0 && / +2\sqrt{3} \\
3,14 \approx \pi &< 2\sqrt{3} \approx 3,46
\end{aligned}$$

Tehát ebben a megoldásban is arra a következtetésre jutottunk, hogy a három kör metszetének területe kisebb, mint a kör területének negyede, úgyhogy a feladat szövegében szereplő állítás nem igaz. ■